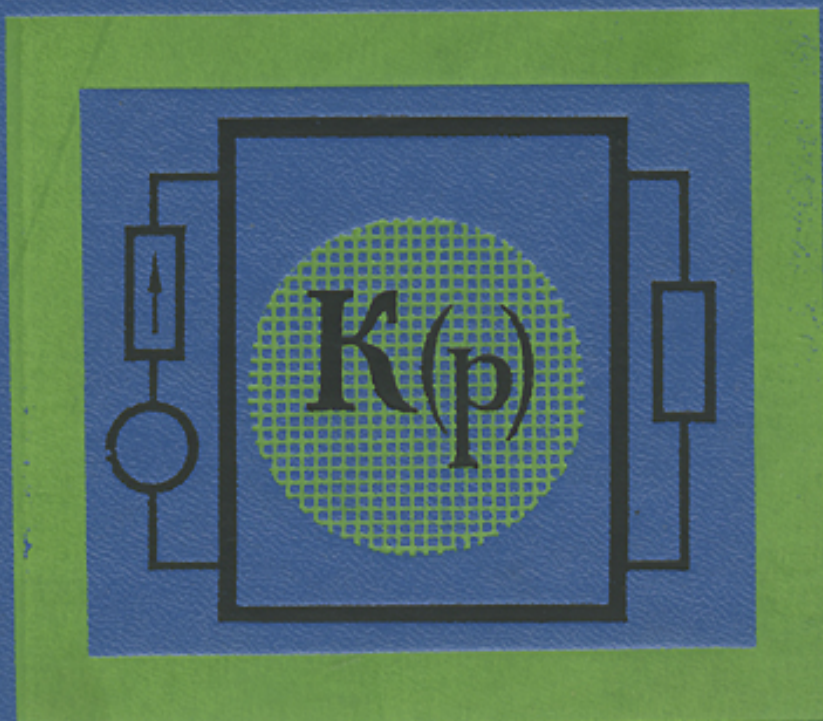


М. Р. ШЕБЕС

ТЕОРИЯ
ЛИНЕЙНЫХ
ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ
ЦЕПЕЙ
В УПРАЖНЕНИЯХ
И ЗАДАЧАХ



М. Р. ШЕБЕС

ТЕОРИЯ
ЛИНЕЙНЫХ
ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ
ЦЕПЕЙ
В УПРАЖНЕНИЯХ
И ЗАДАЧАХ

Издание второе,
переработанное и дополненное

Допущено
Министерством высшего и среднего
специального образования СССР
в качестве учебного пособия
для студентов электротехнических
и радиотехнических специальностей
вузов



ИЗДАТЕЛЬСТВО «ВЫСШАЯ ШКОЛА»
Москва — 1973

6П2.1
Ш30
УДК 6 21.3

Шебес М. Р.
Ш30 Теория линейных электрических цепей в упражнениях и задачах. Учебное пособие для электротехнич. и радиотехнич. специальностей вузов. М., «Высшая школа», 1973.

656 с. с илл.

Книга состоит из 18 глав. В каждой главе даются краткий теоретический материал и важнейшие расчетные формулы, типовые задачи с подробными решениями и пояснениями, к остальным задачам даны ответы; часть задач содержит методические указания.

Даны примеры применения основных методов расчета электрических цепей как в установившемся, так и в переходном режимах.

Во второе издание внесены изменения: расширен материал по двухполюсникам, четырехполюсникам, электрическим фильтрам, цепям с распределенными параметрами, основам синтеза двухполюсников; даны новые главы по корректирующим цепям и элементам синтеза четырехполюсников и др.

Ш $\frac{0338-495}{001(01)-73} 127-73$

Рецензент — зав. кафедрой ТОЭ Московского института радиотехники, электроники и автоматики, проф., докт. техн. наук Бессонов Л. А.

Глава первая

ЛИНЕЙНЫЕ ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ ЦЕПИ ПОСТОЯННОГО ТОКА

ОСНОВНЫЕ ПОЛОЖЕНИЯ И СООТНОШЕНИЯ

1. Элементы электрической цепи. *Пассивный линейный элемент*—электрическое сопротивление (рис. 1.1). Ток I и напряжение U_{ab} электрического сопротивления связаны *законом Ома*

$$U_{ab} = rI, \quad (1.1)$$

где r — сопротивление.

Величина, обратная сопротивлению, есть электрическая проводимость

$$g = 1/r. \quad (1.2)$$

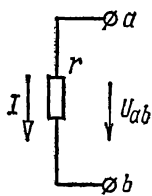


Рис. 1.1

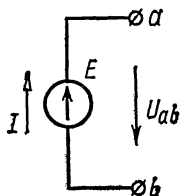


Рис. 1.2

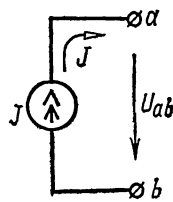


Рис. 1.3

Активные линейные элементы—источники электрической энергии.

Источник напряжения (идеальный). Напряжение U_{ab} источника напряжения не зависит от величины его тока I и характеризуется его электродвижущей силой (э.д.с.) E (обозначения положительных направлений показаны на рис. 1.2):

$$U_{ab} = E. \quad (1.3)$$

Внутреннее сопротивление источника напряжения равно нулю.

Источник тока (идеальный). Ток J источника тока (рис. 1.3) не зависит от величины приложенного к нему напряжения (внутренняя проводимость утечки источника тока равна нулю, сопротивление источника тока бесконечно велико).

Источник э.д.с. (с внутренним сопротивлением), или генератор (рис. 1.4, а), можно изобразить двояко: 1) в виде *генератора напряжения*—последовательной схемы, содержащей внутреннее (или входное) сопротивление генератора r_g , и источник напряжения с э.д.с. генератора E_g , численно равной напряжению генератора U_{ab} в ре-

жиме холостого хода (рис. 1.4, б); 2) в виде генератора тока — параллельной схемы, содержащей сопротивление генератора r_r и источник тока J , численно равный току короткого замыкания генератора (рис. 1.4, в).

Переход от схемы генератора напряжения к схеме генератора тока и обратно осуществляется по формулам:

$$J = \frac{E_r}{r_r}; \quad E_r = r_r J. \quad (1.4)$$

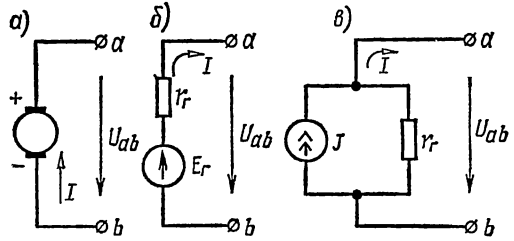


Рис. 1.4

2. Закон Ома. Этот закон применяется для ветви или для одноконтурной замкнутой цепи (не имеющей разветвлений).

При написании закона Ома следует прежде всего выбрать произвольно некоторое положительное направление тока.

Для ветви, состоящей только из сопротивлений и не содержащей э.д.с. (например, для ветви mn рис. 1.5), при положительном направлении тока от точки m к точке n

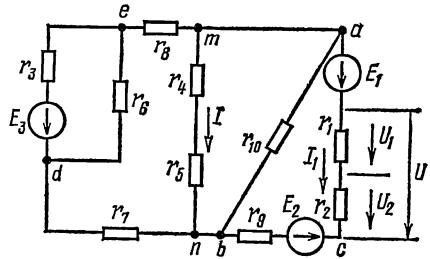


Рис. 1.5

$$I = \frac{\varphi_m - \varphi_n}{r_{mn}} = \frac{U_{mn}}{r_{mn}}, \quad (1.5)$$

где φ_m и φ_n — потенциалы точек m и n ;

U_{mn} — разность потенциалов или напряжение между точками m и n ;

$r_{mn} = r_4 + r_5$ — полное сопротивление ветви между точками m и n .

Для ветви, содержащей э.д.с. и сопротивления (например, для ветви acb рис. 1.5),

$$I_1 = \frac{\varphi_a - \varphi_b + \sum E}{\sum r_{ab}} = \frac{U_{ab} + \sum E}{\sum r_{ab}}, \quad (1.6)$$

где $U_{ab} = \varphi_a - \varphi_b$ — напряжение на концах ветви acb , отсчитываемое по выбранному положительному направлению тока;

$\sum E$ — алгебраическая сумма э.д.с., находящихся в этой ветви;

$\sum r_{ab}$ — арифметическая сумма ее сопротивлений.

В ветви acb (см. рис. 1.5) $\sum E = E_1 - E_2$, $\sum r_{ab} = r_1 + r_2 + r_9$. Формулу (1.6) называют *обобщенным законом Ома*.

Для замкнутой одноконтурной цепи

$$I = \frac{\Sigma E}{\Sigma r}, \quad (1.7)$$

где Σr — арифметическая сумма всех внешних и внутренних сопротивлений цепи; ΣE — алгебраическая сумма ее электродвижущих сил.

Со знаком плюс берут те э.д.с., направления которых совпадают с выбранным положительным направлением тока, и со знаком минус — э.д.с. с противоположными направлениями. Примеры приведены в задачах 1.6 и 1.8.

3. Законы Кирхгофа. Для написания законов Кирхгофа необходимо задаться положительными направлениями токов каждой ветви.

Первый закон Кирхгофа — *алгебраическая сумма всех токов, сходящихся в любом узле, равна нулю:*

$$\sum_{k=1}^n I_k = 0. \quad (1.8)$$

Токи, направленные к узлу, условно принимаются положительными, а направленные от него — отрицательными (или наоборот).

Второй закон Кирхгофа — *алгебраическая сумма э.д.с. замкнутого контура равна алгебраической сумме падений напряжений в нем:*

$$\sum_{k=1}^n E_k = \sum_{k=1}^n r_k I_k. \quad (1.9)$$

Направление обхода контура выбирается произвольно. При записи левой части равенства э.д.с., направления которых совпадают с выбранным направлением обхода (независимо от направления тока, протекающего через них), принимаются положительными, а э.д.с., направленные против выбранного направления обхода, — отрицательными. При записи правой части равенства со знаком плюс берутся падения напряжения в тех ветвях, в которых выбранное положительное направление тока совпадает с направлением обхода (независимо от направления э.д.с. в этих ветвях), и со знаком минус — падения напряжения в тех ветвях, в которых положительное направление тока противоположно направлению обхода.

Пример приведен в задаче 1.21.

4. Методы расчета сложных цепей постоянного тока (цепь состоит из N_v ветвей, имеет N_u узлов и N_t источников тока). Приводимые далее формулы пригодны для расчета цепей, содержащих и источники напряжения, и источники тока. Они справедливы и для тех частных случаев, когда в цепи имеются либо только источники напряжения, либо только источники тока.

Применение законов Кирхгофа. Устанавливается число неизвестных токов, которое равно $N_v - N_t$. Для каждой ветви задаются положительным направлением тока.

Число $У$ взаимонезависимых уравнений, составляемых по первому закону Кирхгофа, равно числу узлов без единицы. Число взаимонезависимых уравнений, составляемых по второму закону Кирхгофа,

$$K = N_b - N_y + 1 - N_T. \quad (1.10)$$

При составлении уравнений по второму закону Кирхгофа следует выбирать независимые контуры, не содержащие источников тока. Общее число уравнений, составляемых по первому и второму законам Кирхгофа, равно числу $(N_b - N_T)$ неизвестных токов.

Примеры приведены в задачах 1.10, 1.14, 1.21 и 1.34.

Метод контурных токов (Максвелла) позволяет уменьшить количество уравнений системы до числа K , определяемого формулой (1.10). Метод основывается на том свойстве, что ток в любой ветви цепи может быть представлен в виде алгебраической суммы независимых контурных токов, протекающих по этой ветви. При пользовании этим методом выбирают и обозначают независимые контурные токи (по любой ветви цепи должен проходить хотя бы один выбранный контурный ток). Из теории известно, что общее число независимых контурных токов равно $K = N_b - N_y + 1 - N_T$. Рекомендуются выбирать N_T независимых контурных токов так, чтобы каждый из них проходил через один источник тока (эти контурные токи можно считать совпадающими с соответствующими токами источников тока J_1, J_2, \dots, J_{N_T} , и они обычно являются заданными условиями задачи), а оставшиеся $K = N_b - N_y + 1 - N_T$ контурных токов выбирать проходящими по ветвям, не содержащим источников тока. Для определения последних контурных токов составляют по второму закону Кирхгофа для этих контуров K уравнений в виде:

$$\left. \begin{aligned} r_{11} J_1 + r_{12} J_2 + \dots + r_{1k} J_k + r_{1r1} J_1 + \dots + r_{1rN_T} J_{N_T} &= E_{11}; \\ r_{21} J_1 + r_{22} J_2 + \dots + r_{2k} J_k + r_{2r1} J_1 + \dots + r_{2rN_T} J_{N_T} &= E_{22}; \\ \dots &\dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ r_{k1} J_1 + r_{k2} J_2 + \dots + r_{kk} J_k + r_{kr1} J_1 + \dots + r_{krN_T} J_{N_T} &= E_{kk}, \end{aligned} \right\} (1.11)$$

- где r_{nn} — собственное сопротивление контура n (сумма сопротивлений всех ветвей, входящих в контур n);
 r_{nl} — общее сопротивление контуров n и l , причем $r_{nl} = r_{ln}$: если направления контурных токов в общей ветви для контуров n и l совпадают, то r_{nl} положительно ($r_{nl} > 0$), в противном случае r_{nl} отрицательно ($r_{nl} < 0$);
 E_{nn} — алгебраическая сумма э.д.с., включенных в ветви, образующие контур n ;
 r_{nrl} — общее сопротивление контура n с контуром, содержащим источник тока J_l .

Примеры приведены в задачах 1.36, 1.40 и 1.48.

Метод узловых потенциалов позволяет уменьшить количество уравнений системы до числа $У$; равного количеству узлов без одного

$$У = N_y - 1. \quad (1.12a)$$

где $\sum_n E_n g_n$ — алгебраическая сумма произведений э.д.с. ветвей (э.д.с. считаются положительными, если они направлены к узлу a , и отрицательными, если направлены от узла a к узлу b) на проводимости этих ветвей;
 J_n — токи источников тока (положительны, если они направлены к узлу a , и отрицательны, если направлены от узла a к узлу b);
 $\sum_m g_m$ — сумма проводимостей всех ветвей, соединяющих узлы a и b .

Пример приведен к задаче 1.68.

Метод наложения. Если в электрической цепи заданными величинами являются э.д.с. источников напряжения и токи источников тока, то расчет токов по методу наложения состоит в следующем. Ток в любой ветви может быть рассчитан как алгебраическая сумма токов, вызываемых в ней э.д.с. каждого источника напряжения в отдельности и током, проходящим по этой же ветви от действия каждого источника тока. При этом надо иметь в виду, что когда ведется расчет токов, вызванных каким-либо одним генератором, то остальные источники напряжения в схеме заменяются короткозамкнутыми участками (внутреннее сопротивление источников напряжения равно нулю), а ветви с источниками тока остальных генераторов отключаются (внутреннее сопротивление источников тока бесконечно). В то же время сопротивления всех генераторов схемы сохраняются.

Примеры приведены в задачах 1.49, 1.51 и 1.52.

Методы преобразования. Во всех случаях преобразования замена одних схем другими, им эквивалентными, не должна привести к изменению токов или напряжений на участках цепи, не подвергшихся преобразованию.

1. Замена последовательных сопротивлений одним эквивалентным. Сопротивления последовательны, если они обтекаются одним и тем же током (например, сопротивления r_1 , r_2 и r_3 соединены последовательно — см. рис. 1.5; также последовательны сопротивления r_7 и r_8).

Эквивалентное сопротивление цепи, состоящей из n последовательно соединенных сопротивлений, равно сумме этих сопротивлений:

$$r_3 = \sum_{k=1}^n r_k.$$

При последовательном соединении n сопротивлений напряжения на них распределяются прямо пропорционально этим сопротивлениям:

$$U_1 : U_2 : \dots : U_n = r_1 : r_2 : \dots : r_n.$$

В частном случае двух последовательно соединенных сопротивлений:

$$\frac{U_1}{U_2} = \frac{r_1}{r_2}; \quad U_1 = U \frac{r_1}{r_1 + r_2}; \quad U_2 = U \frac{r_2}{r_1 + r_2},$$

где U — общее напряжение, действующее на участке цепи, содержащем два сопротивления r_1 и r_2 (см. рис. 1.5).

2. Замена параллельных сопротивлений одним эквивалентным. Сопротивления параллельны, если все они присоединены к одной паре узлов (например, сопротивления $r_{45} = r_4 + r_5$ и r_{10} ; см. рис. 1.5).

Эквивалентное сопротивление цепи, состоящей из n параллельно соединенных сопротивлений, определяется из формулы

$$\frac{1}{r_э} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{r_k} \quad (1.15)$$

В частном случае параллельного соединения двух сопротивлений r_1 и r_2 эквивалентное сопротивление

$$r_э = \frac{r_1 r_2}{r_1 + r_2} \quad (1.16)$$

При параллельном соединении n сопротивлений токи в них распределяются обратно пропорционально их сопротивлениям или прямо пропорционально их проводимостям:

$$I_1 : I_2 : \dots : I_n = \frac{1}{r_1} : \frac{1}{r_2} : \dots : \frac{1}{r_n} = g_1 : g_2 : \dots : g_n \quad (1.17)$$

Ток I_s в каждой из них вычисляется через ток I в неразветвленной части цепи:

$$I_s = I \frac{g_s}{\sum_{k=1}^n g_k} \quad (1.18)$$

В частном случае двух параллельных ветвей (рис. 1.6, а):

$$\left. \begin{aligned} I_2 &= I_1 \frac{r_3}{r_2 + r_3}; & I_3 &= I_1 \frac{r_2}{r_2 + r_3} \\ \text{или } I_2 &= I_1 \frac{g_2}{g_2 + g_3}; & I_3 &= I_1 \frac{g_3}{g_2 + g_3} \end{aligned} \right\} (1.19)$$

3. Замена смешанного соединения сопротивлений одним эквивалентным. Смешанное соединение — это сочетание последовательного и параллельного соединений сопротивлений. Например, сопротивле-

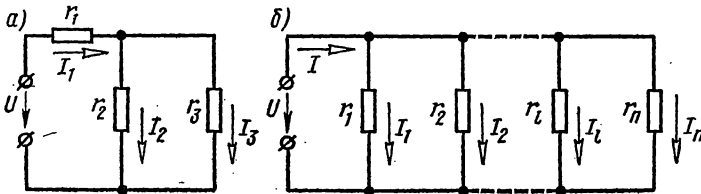


Рис. 1.6

ния r_1 , r_2 и r_3 (см. рис. 1.6; а) находятся в смешанном соединении. Их эквивалентное сопротивление

$$r_9 = r_1 + \frac{r_2 r_3}{r_2 + r_3} = \frac{r_1 r_2 + r_1 r_3 + r_2 r_3}{r_2 + r_3} \quad (1.20)$$

4. Формулы преобразования треугольника сопротивлений (рис. 1.7, а) в эквивалентную звезду сопротивлений (рис. 1.7, б) и наоборот имеют вид:

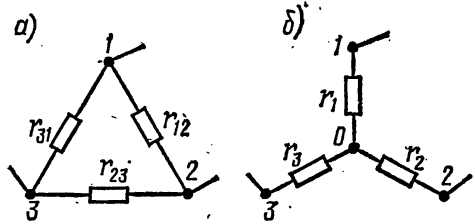


Рис. 1.7

$$r_1 = \frac{r_{12} r_{31}}{r_{12} + r_{23} + r_{31}}; \quad r_2 = \frac{r_{23} r_{12}}{r_{12} + r_{23} + r_{31}}; \quad r_3 = \frac{r_{31} r_{23}}{r_{12} + r_{23} + r_{31}}; \quad (1.21)$$

$$g_{12} = \frac{g_1 g_2}{g_1 + g_2 + g_3}; \quad g_{23} = \frac{g_2 g_3}{g_1 + g_2 + g_3}; \quad g_{31} = \frac{g_3 g_1}{g_1 + g_2 + g_3}, \quad (1.22)$$

где g — проводимость соответствующей ветви.

Формулы (1.22) можно записать через сопротивления:

$$\left. \begin{aligned} r_{12} &= r_1 + r_2 + \frac{r_1 r_2}{r_3}; & r_{23} &= r_2 + r_3 + \frac{r_2 r_3}{r_1}; \\ r_{31} &= r_3 + r_1 + \frac{r_3 r_1}{r_2}. \end{aligned} \right\} \quad (1.23)$$

Пример приведен в задаче 1.54.

Метод эквивалентного генератора (или метод активного двухполюсника или метод холостого хода и короткого замыкания). Применение метода целесообразно для определения тока в какой-либо одной ветви сложной электрической цепи. Имеется два варианта метода: 1) метод эквивалентного напряжения (ЭГН) и 2) метод эквивалентного генератора тока (ЭГТ).

1) Метод ЭГН. Для нахождения тока I в произвольной ветви ab , сопротивление которой r (рис. 1.8, а; буква А означает активный двухполюсник), надо эту ветвь разомкнуть (рис. 1.8, б), а часть цепи, подключенную к этой ветви, заменить эквивалентным генератором напряжения с э.д.с. E_r и внутренним сопротивлением r_r (рис. 1.8, в).

Э.д.с. E_r этого генератора равняется напряжению на зажимах разомкнутой ветви (напряжение холостого хода):

$$E_r = U_{ab \text{ х. х.}} = (\varphi_a - \varphi_b)_{\text{х. х.}}$$

Расчет схемы в режиме холостого хода (см. рис. 1.8, б) для определения E_r проводится любым известным способом.

Внутреннее сопротивление r_r эквивалентного генератора напряжения равняется входному сопротивлению пассивной цепи относительно

зажимов a и b исходной схемы, из которой исключены все источники (источники напряжения замены короткозамкнутыми участками, а ветви с источниками тока отключены, рис. 1.8, z ; буква Π указывает на пассивный характер цепи), при разомкнутой ветви ab . Сопротивление r_r может быть вычислено непосредственно по схеме рис. 1.8, z .

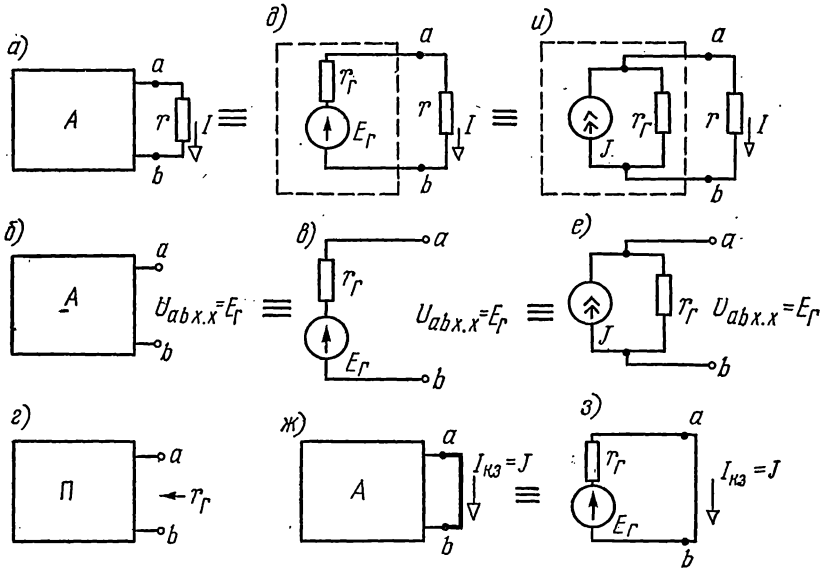


Рис. 1.8

Ток в искомой ветви схемы (рис. 1.8, $д$), имеющей сопротивление r , определяется по закону Ома [см. формулу (1.7)]:

$$I = \frac{U_{ab\ x.x}}{r + r_r} = \frac{E_r}{r + r_r}. \quad (1.24)$$

2) Метод ЭГТ. Для расчета тока по методу ЭГТ в ветви ab , сопротивление которой r , надо часть схемы относительно зажимов a и b (при разомкнутой ветви ab) заменить эквивалентным генератором тока, ток которого J , а сопротивление r_r (рис. 1.8, $е$).

Для нахождения тока J надо зажимы a и b замкнуть и любым способом рассчитать ток короткого замыкания $I_{к.з}$, протекающий по замкнутому участку (рис. 1.8, $ж$). При этом $J = I_{к.з}$. Сопротивление r_r можно найти, как и при расчете по методу ЭГН (см. рис. 1.8, z). Это же сопротивление может быть рассчитано, как это видно из схемы замещения заданной схемы в режиме короткого замыкания (рис. 1.8, $з$), по формуле

$$r_r = \frac{E_r}{I_{к.з}} = \frac{E_r}{J}. \quad (1.25)$$

Ток в искомой ветви r (рис. 1.8, u)

$$I = J \frac{r_{\Gamma}}{r + r_{\Gamma}}. \quad (1.26)$$

Примеры приведены в задачах 1.57, 1.58, 1.59, 1.63, 1.64 и 1.65.

Метод замены нескольких параллельных генераторов напряжения одним эквивалентным. Если имеется несколько генераторов напряжения с э.д.с. E_1, E_2, \dots, E_n и внутренними сопротивлениями r_1, r_2, \dots, r_n , работающих параллельно на общее сопротивление нагрузки r (рис. 1.9, a), то они могут быть

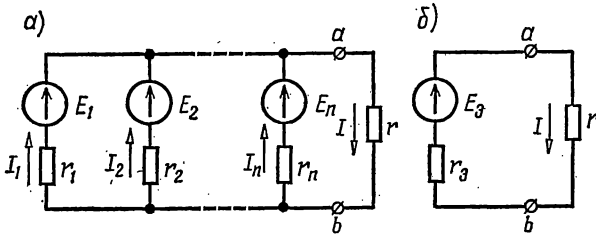


Рис. 1.9

заменены одним эквивалентным генератором напряжения, э.д.с. которого E_3 , а внутреннее сопротивление r_3 (рис. 1.9, b). При этом

$$E_3 = \frac{\sum_{k=1}^n E_k g_k}{\sum_{k=1}^n g_k}; \quad g_k = \frac{1}{r_k}; \quad \frac{1}{r_3} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{r_k}. \quad (1.27)$$

Ток в сопротивлении r

$$I = \frac{E_3}{r + r_3}. \quad (1.28)$$

Ток в каждой из ветвей

$$I_k = \frac{E_k - U}{r_k}, \quad (1.29)$$

где $U = U_{ab} = Ir$.

Пример приведен в задаче 1.68.

Метод замены параллельно соединенных генераторов тока одним эквивалентным. Если несколько генераторов тока с токами J_1, J_2, \dots, J_n и внутренними проводимостями g_1, g_2, \dots, g_n соединены параллельно (рис. 1.10, a), то они могут быть заменены одним эквивалентным генератором тока (рис. 1.10, b), ток

которого J равен алгебраической сумме токов, а его внутренняя проводимость g равна сумме внутренних проводимостей отдельных генераторов:

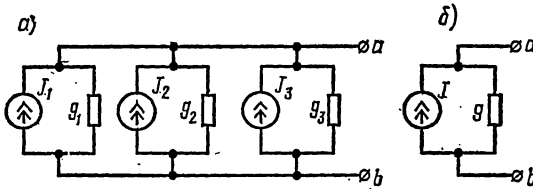


Рис. 1.10

$$J = \sum_{k=1}^n J_k; \quad (1.30)$$

$$g = \sum_{k=1}^n g_k. \quad (1.31)$$

5. **Принцип компенсации.** Любое сопротивление в электрической цепи может быть без изменения распределения токов в ее ветвях заменено э.д.с., численно равной падению напряжения в заменяемом сопротивлении и направленной навстречу току.

6. **Входные и взаимные сопротивления и проводимости.** Входное сопротивление цепи относительно ветви k определяется как отношение э.д.с. E_k , действующей в этой ветви, к току I_k в этой же ветви при э.д.с., в остальных ветвях равных нулю:

$$r_{kk} = \frac{E_k}{I_k}. \quad (1.32)$$

Входная проводимость ветви k есть величина, обратная входному сопротивлению этой ветви:

$$g_{kk} = \frac{1}{r_{kk}}. \quad (1.33)$$

Входная проводимость ветви может быть рассчитана по приращению тока входной ветви ΔI_k , вызванному приращением э.д.с. ΔE_k этой ветви:

$$g_{kk} = \frac{\Delta I_k}{\Delta E_k}. \quad (1.34)$$

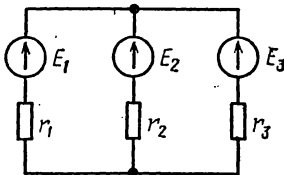


Рис. 1.11

Пример. Для схемы рис. 1.11 входные сопротивления цепи относительно ветвей 1, 2 и 3 соответственно равны:

$$r_{11} = \frac{D}{r_2 + r_3}; \quad r_{22} = \frac{D}{r_3 + r_1}; \quad r_{33} = \frac{D}{r_1 + r_2},$$

где $D = r_1 r_2 + r_2 r_3 + r_3 r_1$.

Взаимная проводимость ветвей k и l — отношение тока I_k в ветви k к вызывающей его э.д.с. E_l в ветви l (при отсутствии других источников энергии):

$$g_{kl} = \frac{I_k}{E_l}. \quad (1.35)$$

Если ток I_k создается единичной э.д.с. $E_l = 1$ в, то взаимная проводимость g_{kl} численно равна току I_k .

Если э.д.с. некоторых ветвей цепи не равны нулю, взаимная проводимость ветвей k и l может быть рассчитана по изменению тока ΔI_k ветви k , вызванному изменением э.д.с. ΔE_l ветви l , по формуле

$$g_{kl} = \frac{\Delta I_k}{\Delta E_l}. \quad (1.36)$$

Пример приведен в задаче 1.74.

Взаимное сопротивление ветвей k и l есть отношение напряжения U_k на ветви k к величине создающего его тока J_l (предполагается, что в ветви l включен источник тока J_l , а все другие источники энергии в схеме отсутствуют):

$$r_{kl} = \frac{U_k}{J_l}. \quad (1.37)$$

Пример приведен в задаче 1.74.

7. Принцип взаимности. В линейной электрической цепи, составленной из сопротивлений, источников напряжения и источников тока, соответственные взаимные проводимости $g_{lk} = g_{kl}$ равны. Из принципа взаимности следует: если э.д.с. E , находящаяся в ветви ab сколь угодно сложной цепи, вызывает ток I в другой ветви cd этой же цепи, то при переносе этой э.д.с. в ветвь cd она вызовет в ветви ab такой же ток I .

8. Линейные соотношения. При изменении параметра одного из элементов линейной электрической цепи (одного сопротивления или одной э.д.с., или тока одного из источников тока) связь между любыми двумя напряжениями U_i и U_l , любыми двумя токами I_l и I_k , между любым током I_k и произвольным напряжением U_i является линейной с постоянными коэффициентами a_i , b_i , a_l , ...

Например,

$$U_i = a_i + b_i U_l; \quad I_l = a_l + b_l I_k; \quad I_k = a_k + b_k U_l \text{ и т. д.} \quad (1.38)$$

Пример приведен в задаче 1.76.

9. Баланс мощностей. Для любой замкнутой электрической цепи сумма мощностей $P_{и}$, развиваемых источниками электрической энергии, равна сумме мощностей $P_{п}$, расходуемых в приемниках энергии:

$$\sum P_{и} = \sum P_{п} \quad \text{или} \quad \sum (E_k J_k + U_k J_k) = \sum I_k^2 r_k, \quad (1.39)$$

где $\Sigma E_k I_k$ — алгебраическая сумма; здесь положительны те из слагаемых, для которых направления действия э.д.с. E_k и соответствующего тока I_k совпадают, в противном случае слагаемое отрицательно;

$\Sigma U_k I_k$ — алгебраическая сумма; здесь положительны те из слагаемых, для которых напряжение на источнике тока U_k (оно определяется расчетом цепи внешней по отношению к зажимам источника тока) и его ток I_k совпадают по направлению (как, например, на рис. 1.3), в противном случае слагаемое отрицательно;

$\Sigma I_k^2 r_k$ — арифметическая сумма; здесь должны быть учтены как внешние сопротивления, так и сопротивления самих источников энергии.

Примеры приведены в задачах 1.21, 1.32, 1.34 и 1.40.

УПРАЖНЕНИЯ И ЗАДАЧИ

А. Расчет эквивалентных сопротивлений

1.1. Для цепи рис. 1.12 найти эквивалентные сопротивления между зажимами a и b , c и d , d и f , если $r_1 = 6$ ом, $r_2 = 5$ ом, $r_3 = 15$ ом, $r_4 = 30$ ом и $r_5 = 6$ ом.

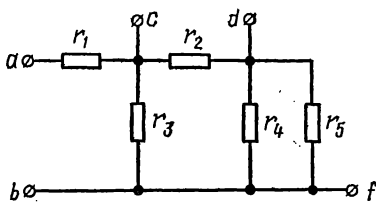


Рис. 1.12

Решение. Расчет сопротивления r_{ab} . Эквивалентное сопротивление соединенных параллельно сопротивлений r_4 и r_5 найдем по формуле (1.16):

$$r_{45} = \frac{r_4 r_5}{r_4 + r_5} = \frac{30 \cdot 6}{30 + 6} = 5 \text{ ом.}$$

Оно соединено последовательно с r_2 . Их общее сопротивление $r' =$

$$= r_2 + r_{45} = 5 + 5 = 10 \text{ ом.}$$

Сопротивление цепи состоит из сопротивления r_1 , последовательно с которым соединены два параллельных сопротивления r' и r_3 :

$$r_{ab} = r_1 + \frac{r' r_3}{r' + r_3} = 6 + \frac{10 \cdot 15}{10 + 15} = 12 \text{ ом.}$$

Расчет сопротивления r_{cd} . Сопротивления r_4 и r_5 теперь соединены параллельно друг другу; сопротивление r_3 к ним включено последовательно:

$$r'' = r_3 + \frac{r_4 r_5}{r_4 + r_5} = 15 + 5 = 20 \text{ ом.}$$

Сопротивление r_{cd} состоит из двух параллельно соединенных сопротивлений r_2 и r'' и равно

$$r_{cd} = \frac{r_2 r''}{r_2 + r''} = \frac{5 \cdot 20}{5 + 20} = 4 \text{ ом.}$$

Расчет сопротивления r_{df} . Эквивалентное сопротивление цепи между точками d и f состоит из трех параллельно соединенных сопротивлений r_5 , r_4 и $r_2 + r_3$ и может быть определено из формулы (1.15):

$$\frac{1}{r_{df}} = \frac{1}{r_5} + \frac{1}{r_4} + \frac{1}{r_2 + r_3} = \frac{1}{6} + \frac{1}{30} + \frac{1}{20} = \frac{1}{4},$$

откуда $r_{df} = 4 \text{ ом}$.

1.2. Определить эквивалентное сопротивление цепи между точками a и b при разомкнутом и замкнутом ключе K (рис. 1.13, a).

Даны: $r_1 = r_2 = r_3 = r_4 = r_5 = r_6 = r_7 = 10 \text{ ом}$.

Решение. При разомкнутом ключе заданная схема может быть изображена согласно рис. 1.13, b .

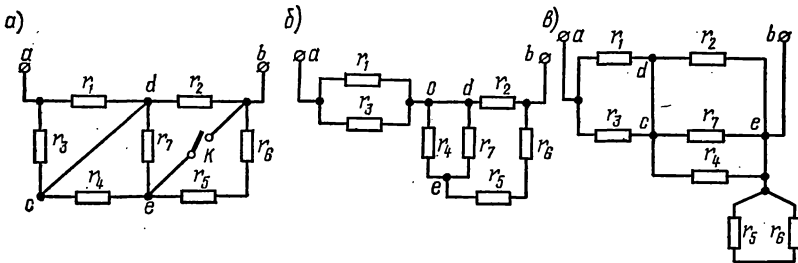


Рис. 1.13

Искомое сопротивление

$$r_{ab} = \frac{r_1 r_3}{r_1 + r_3} + \frac{\left(r_5 + r_6 + \frac{r_4 r_7}{r_4 + r_7} \right) r_2}{r_5 + r_6 + \frac{r_4 r_7}{r_4 + r_7}} = 5 + \frac{25 \cdot 10}{35} = 12,1 \text{ ом}.$$

При замкнутом ключе заданная схема может иметь также вид, изображенный на рис. 1.13, v .

Сопротивление цепи r'_{ab} равно сумме двух сопротивлений:

$$r' = \frac{r_1 r_3}{r_1 + r_3} = \frac{10 \cdot 10}{20} = 5 \text{ ом}$$

и r'' , определяемого из формулы

$$\frac{1}{r''} = \frac{1}{r_4} + \frac{1}{r_7} + \frac{1}{r_2},$$

откуда $r'' = 3,33 \text{ ом}$.

Таким образом,

$$r'_{ab} = r' + r'' = 5 + 3,33 = 8,33 \text{ ом}.$$

1.3. Определить сопротивление каждой из цепей (рис. 1.14, а—г) между зажимами 1-1' при холостом ходе (точки 2 и 2' разомкнуты) и при коротком замыкании (точки 2 и 2' замкнуты). Сопротивления в омах даны на схеме

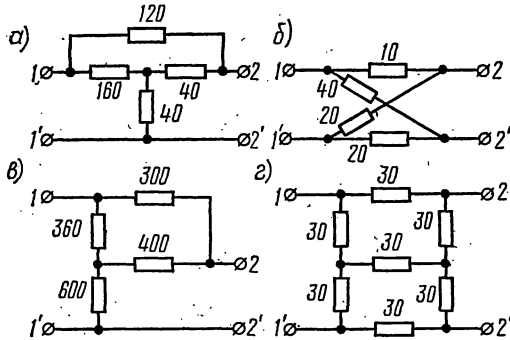


Рис. 1.14

1.4. Найти сопротивление между зажимами а и б для схемы рис. 1.15, а. Значения сопротивлений в омах даны на схеме.

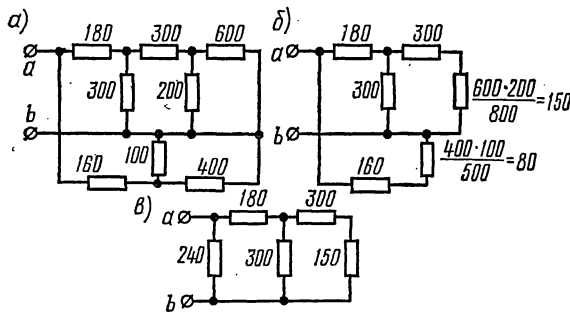


Рис. 1.15

Решение. От данной схемы можно перейти к более простым схемам, изображенным на рис. 1.15, б и в.

Искомое сопротивление

$$r_{ab} = \frac{240 \left(180 + \frac{300 \cdot 450}{750} \right)}{240 + 180 + \frac{300 \cdot 450}{750}} = 144 \text{ ом.}$$

Б. Законы Ома и Кирхгофа. Баланс мощностей

1.5. Источник с э.д.с. $E = 100$ в, внутренним сопротивлением $r_0 = 1$ ом замкнут на внешнее сопротивление r , которое меняется от нуля до бесконечности (рис. 1.16, а). Определить в функции

этого сопротивления: ток I ; напряжение на зажимах источника U ; мощность, отдаваемую источником во внешнюю цепь, $P_{\text{внеш}}$; мощность, затрачиваемую в самом источнике, $P_{\text{вн}}$; общую мощность $P_{\text{общ}}$; к.п.д. η . При каком внешнем сопротивлении мощность $P_{\text{внеш}}$ будет максимальной? Чему оно равно?

Построить кривые: $I = F_1(r)$, $U = F_2(r)$, $P_{\text{внеш}} = F_3(r)$, $P_{\text{вн}} = F_4(r)$, $P_{\text{общ}} = F_5(r)$, $\eta = F_6(r)$.

Написать уравнения и построить кривые зависимости U , $P_{\text{внеш}}$, $P_{\text{вн}}$, $P_{\text{общ}}$ и η в функции тока I .

Решение.

$$I = \frac{E}{r + r_0} = \frac{100}{r + 1};$$

$$U = rI = \frac{Er}{r + r_0} = \frac{100r}{r + 1};$$

$$P_{\text{внеш}} = I^2 r = \frac{E^2 r}{(r + r_0)^2} = \frac{10000r}{(r + 1)^2};$$

$$P_{\text{вн}} = I^2 r_0 = \frac{E^2 r_0}{(r + r_0)^2} = \frac{10000}{(r + 1)^2};$$

$$P_{\text{общ}} = EI = I^2 (r + r_0) = \frac{E^2}{r + r_0} = \frac{10000}{r + 1};$$

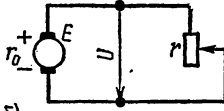
$$\eta = \frac{P_{\text{внеш}}}{P_{\text{общ}}} = \frac{r}{r + r_0} = \frac{r}{r + 1}.$$

Определим r , при котором $P_{\text{внеш}}$ будет максимальной. Для этого вычислим производную от $P_{\text{внеш}}$ по r и приравняем ее нулю:

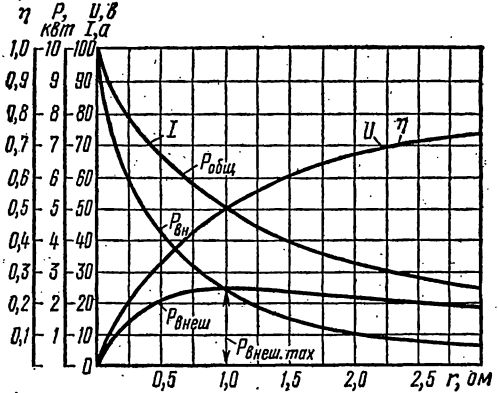
$$\frac{dP_{\text{внеш}}}{dr} = E \frac{(r + r_0)^2 - 2(r + r_0)r}{(r + r_0)^3} = 0.$$

Взяв вторую производную, можем убедиться, что она отрицательная. Это соответствует условию максимума.

а)



б)



в)

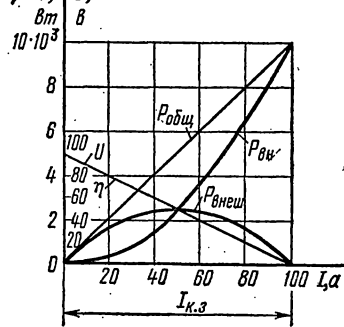


Рис. 1.16

Отсюда найдем, что $r = r_0$, т. е. при внешнем сопротивлении, равном внутреннему сопротивлению, мощность, поступающая во внешнюю цепь, максимальна. При этом по уравнению для η к.п.д. равен 0,5.

Величина максимальной мощности, поступающей во внешнюю цепь при $r = r_0$,

$$P_{\text{внеш max}} = \frac{E^2}{4r_0} = 2500 \text{ вт.}$$

По написанным выше уравнениям на рис. 1.16, б построены кривые. Искомые уравнения зависимостей в функции тока I :

$$U = E - Ir_0; \quad P_{\text{внеш}} = EI - I^2r_0; \quad P_{\text{вн}} = I^2r_0;$$

$$P_{\text{общ}} = EI; \quad \eta = 1 - \frac{Ir_0}{E}.$$

По этим уравнениям на рис. 1.16, в построены кривые.

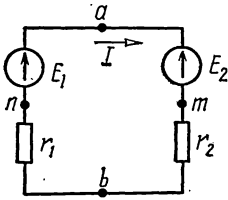


Рис. 1.17

1.6. В неразветвленной цепи рис. 1.17 э.д.с. $E_1 = 120 \text{ в}$, $E_2 = 40 \text{ в}$, а сопротивления $r_1 = 12 \text{ ом}$, $r_2 = 8 \text{ ом}$. Определить напряжение между точками a и b .

Решение. Задавись положительным направлением тока по часовой стрелке, на основании закона Ома [см. формулу (1.7)] ток

$$I = \frac{E_1 - E_2}{r_1 + r_2} = \frac{120 - 40}{12 + 8} = 4 \text{ а.}$$

Так как результат оказался положительным, то истинное направление тока совпадает с выбранным. Напряжение между точками a и b можно найти по закону Ома [см. формулу (1.6)], примененному к участку amb :

$$I = \frac{U_{ab} - E_2}{r_2},$$

откуда

$$U_{ab} = E_2 + r_2 I = 40 + 4 \cdot 8 = 72 \text{ в.}$$

Такой же результат можно получить, если применить ту же формулу к участку bna :

$$I = \frac{U_{ba} + E_1}{r_1}, \quad \text{или} \quad U_{ba} = r_1 I - E_1 = 4 \cdot 12 - 120 = -72 \text{ в,}$$

а следовательно, $U_{ab} = 72 \text{ в}$.

З а м е ч а н и е. Если на участке цепи, содержащем э.д.с. и сопротивление, ток и э.д.с. совпадают по направлению, то напряжение на зажимах участка меньше э.д.с. на величину падения напряжения в сопротивлении участка, а если нап-

равление тока противоположно направлению э.д.с., то напряжение на зажимах участка больше э.д.с. на величину падения напряжения в рассматриваемом участке.

1.7. Определить показание вольтметра (рис. 1.18), сопротивление которого весьма велико по сравнению с r_1 и r_2 .

1.8. Построить график изменения потенциала вдоль цепи, изображенной на рис. 1.19, а, при замкнутом и разомкнутом ключе, предполагая в обоих случаях, что точка a заземлена ($\varphi_a = 0$). В схеме найти точку, равнопотенциальную точке a . Определить, потенциал какой точки следует принять равным нулю, чтобы потенциалы всех остальных точек были положительны (при замкнутом ключе).

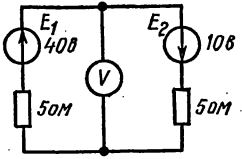


Рис. 1.18

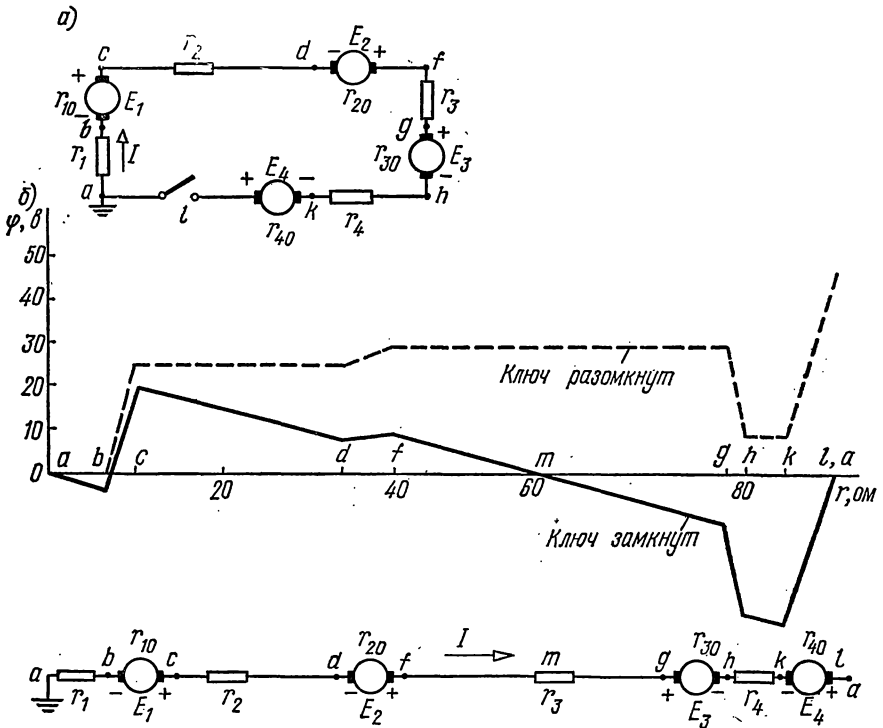


Рис. 1.19

Э.д.с. равны: $E_1 = 25$ в, $E_2 = 5$ в, $E_3 = 20$ в, $E_4 = 35$ в. Внешние сопротивления: $r_1 = 8$ ом, $r_2 = 24$ ом, $r_3 = 40$ ом и $r_4 = 4$ ом. Внутренние сопротивления источников электрической энергии: $r_{10} = 2$ ом, $r_{20} = 6$ ом, $r_{30} = 2$ ом и $r_{40} = 4$ ом.

Решение. 1. *Ключ замкнут.* Задавшись положительным направлением тока по часовой стрелке, на основании закона Ома [см. формулу (1.7)] найдем

$$I = \frac{E_1 + E_2 - E_3 + E_4}{r_1 + r_{10} + r_2 + r_{20} + r_3 + r_{30} + r_4 + r_{40}} = \frac{45}{90} = 0,5 \text{ а.}$$

Пользуясь формулами (1.5) и (1.6), вычислим потенциалы всех точек, обходя контур тока по часовой стрелке:

$$\begin{aligned} \varphi_a &= 0; \\ \varphi_b &= \varphi_a - r_1 I = -0,5 \cdot 8 = -4 \text{ в}; \\ \varphi_c &= \varphi_b + E_1 - r_{10} I = -4 + 25 - 0,5 \cdot 2 = 20 \text{ в}; \\ \varphi_d &= \varphi_c - r_2 I = 20 - 0,5 \cdot 24 = 8 \text{ в}; \\ \varphi_f &= \varphi_d + E_2 - r_{20} I = 8 + 5 - 0,5 \cdot 6 = 10 \text{ в}; \\ \varphi_g &= \varphi_f - r_3 I = 10 - 0,5 \cdot 40 = -10 \text{ в}; \\ \varphi_h &= \varphi_g - E_3 - r_{30} I = -10 - 20 - 0,5 \cdot 2 = 31 \text{ в}; \\ \varphi_k &= \varphi_h - r_4 I = -31 - 0,5 \cdot 4 = -33 \text{ в}; \\ \varphi_a &= \varphi_k + E_4 - r_4 I = -33 + 35 - 0,5 \cdot 4 = 0. \end{aligned}$$

На рис. 1.19, б начерчен потенциальный график. По оси абсцисс отложены величины сопротивлений отдельных участков цепи, а по оси ординат—значения потенциалов в отдельных точках цепи.

Найдем точку, равнопотенциальную точке a . Из графика видно, что искомая точка m находится на участке сопротивления fg , так как в этой точке прямая падения потенциалов пересекает ось абсцисс, потенциал которой равен $\varphi_m = 0$. Обозначая участок сопротивления между точками f и m через r_{fm} и применяя к участку $abcdfm$ формулу закона Ома (1.6) и учитывая, что $\varphi_a = \varphi_m$, найдем

$$I = \frac{\varphi_a - \varphi_m + E_1 + E_2}{r_1 + r_{10} + r_2 + r_{20} + r_{fm}}, \quad \text{или} \quad 0,5 = \frac{30}{40 + r_{fm}},$$

откуда $r_{fm} = 20 \text{ ом}$, т. е. точка m находится на середине сопротивления r_3 .

Для нахождения точки, потенциал которой следует принять равным нулю при условии, чтобы потенциалы всех остальных точек были положительны, следует обратиться к потенциальному графику, из которого видно, что такой точкой является точка k .

2. *Ключ разомкнут.* Тока в цепи нет, поэтому точки a и b равнопотенциальны, т. е. $\varphi_a = \varphi_b = 0$. Потенциал точки c превышает потенциал точки b на величину э.д.с. E_1 и $\varphi_c = E_1 = 25 \text{ в}$; рассуждая аналогично, найдем:

$$\begin{aligned} \varphi_d &= \varphi_c = 25 \text{ в}, & \varphi_f &= \varphi_d + E_2 = 30 \text{ в}, & \varphi_g &= \varphi_f = 30 \text{ в}, \\ \varphi_h &= \varphi_g - E_3 = 10 \text{ в}, & \varphi_k &= \varphi_h = 10 \text{ в}, & \varphi_l &= \varphi_k + E_4 = 10 + 35 = 45 \text{ в}. \end{aligned}$$

Используя полученные результаты, на рис. 1.19, б построен график изменения потенциала при разомкнутом ключе.

1.9. Для схемы рис. 1.20 построить потенциальные графики $0abcdfghkl$ при разомкнутом и замкнутом ключе.

1.10. Определить токи в ветвях цепи рис. 1.21, а и показание вольтметра, включенного между точками c и d , считая, что его сопротивление во много раз превышает сопротивление каждого из элементов цепи.

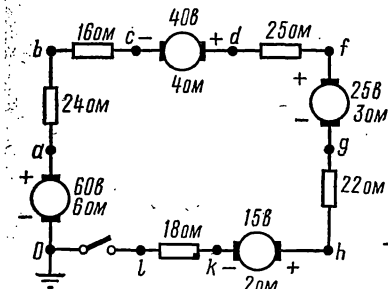


Рис. 1.20

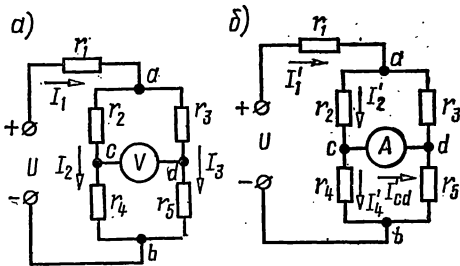


Рис. 1.21

Чему равно показание амперметра, включенного между точками c и d , сопротивление которого считать равным нулю? Сопротивления элементов цепи: $r_1 = 10 \text{ ом}$, $r_2 = r_3 = r_5 = 25 \text{ ом}$ и $r_4 = 50 \text{ ом}$, а приложенное к ней напряжение $U = 120 \text{ в}$.

Решение. Расчет показания вольтметра. Из условия вытекает, что его включение не оказывает влияния на распределение токов в цепи. Для расчета токов сначала определяем эквивалентное сопротивление всей цепи рис. 1.21, а:

$$r = r_1 + \frac{(r_2 + r_4)(r_3 + r_5)}{r_2 + r_4 + r_3 + r_5} = 10 + \frac{75 \cdot 50}{125} = 40 \text{ ом.}$$

В неразветвленной части цепи протекает ток

$$I_1 = \frac{U}{r} = \frac{120}{40} = 3 \text{ а.}$$

Токи, протекающие через сопротивления $r_2 + r_4$ и $r_3 + r_5$, можно найти различными способами.

1. В параллельных ветвях токи распределяются обратно пропорционально их сопротивлениям [см. формулу (1.19)]:

$$I_2 = I_1 \frac{r_3 + r_5}{r_2 + r_4 + r_3 + r_5} = 3 \frac{50}{125} = 1,2 \text{ а;}$$

$$I_3 = I_1 \frac{r_2 + r_4}{r_2 + r_4 + r_3 + r_5} = 3 \frac{75}{125} = 1,8 \text{ а.}$$

2. Найдем напряжение на зажимах параллельных ветвей:

$$U_{ab} = I_1 \frac{(r_2 + r_4)(r_3 + r_5)}{r_2 + r_4 + r_3 + r_5} = 3 \frac{75 \cdot 50}{125} = 90 \text{ в.}$$

Токи в ветвях с сопротивлениями $r_2 + r_4$ и $r_3 + r_5$ равны:

$$I_2 = \frac{U_{ab}}{r_2 + r_4} = \frac{90}{75} = 1,2 \text{ а; } I_3 = \frac{U_{ab}}{r_3 + r_5} = \frac{90}{50} = 1,8 \text{ а.}$$

Напряжение на зажимах параллельных ветвей может быть найдено как разность между приложенным напряжением и падением напряжения на сопротивлении r_1 : $U_{ab} = U - r_1 I_1$.

Найдем показание вольтметра, равное напряжению между точками c и d :

$$U_V = U_{cd} = -I_2 r_2 + I_3 r_3 = -1,2 \cdot 25 + 1,8 \cdot 25 = 15 \text{ в.}$$

Наконец, вычислим ток, проходящий через амперметр; он равен току короткого замыкания I'_{cd} (рис. 1.21, б). Для его нахождения вычислим токи:

$$I'_1 = \frac{U}{r_1 + \frac{r_2 r_3}{r_2 + r_3} + \frac{r_4 r_5}{r_4 + r_5}} = \frac{144}{47} \text{ а;}$$

$$I'_2 = I'_1 \frac{r_3}{r_2 + r_3} = \frac{72}{47} \text{ а; } I'_4 = I'_1 \frac{r_5}{r_4 + r_5} = \frac{48}{47} \text{ а.}$$

Искомый ток, проходящий через амперметр,

$$I_A = I'_{cd} = I'_2 - I'_4 = \frac{24}{47} = 0,51 \text{ а.}$$

1.11. Для измерения тока применены амперметры, пределы измерений которых равны 5 и 2,5 а, и шунт, сопротивление которого неизвестно. Первый амперметр, включенный с шунтом в некоторую цепь, показал 3,6 а, второй — с тем же шунтом показал в той же цепи ток 2 а. Сопротивления амперметров: $r_1 = 0,002 \text{ ом}$ и $r_2 = 0,004 \text{ ом}$. Чему равен ток в цепи?

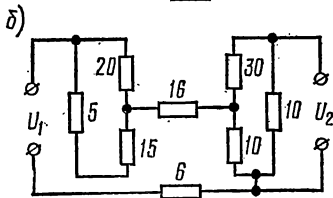
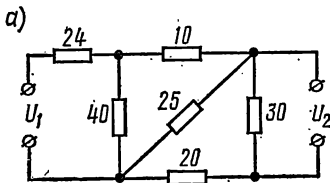


Рис. 1.22

1.12. Для цепей рис. 1.22, а и б определить отношение напряжения на выходе U_2 (выходные зажимы цепи разомкнуты) к напряжению на входе цепи U_1 . Сопротивления отдельных ветвей цепи в омах указаны на схеме.

1.13. Каким сопротивлением в схеме рис. 1.22, а надо нагрузить выходные зажимы (зашунтировать сопротивление 30 ом), чтобы получить отношение $U_2 : U_1 = 1 : 24$?

1.14. В схеме рис. 1.23 найти сопротивление r_x , если $I_1 = 2,6$ а, $I_3 = 0,6$ а, $r_1 = 0,5$ ом, $r_2 = 1,4$ ом, $r_3 = 3$ ом, $r_4 = 2,5$ ом. Найти э. д. с. батареи E , если ее внутреннее сопротивление $r_0 = 0,1$ ом.

Решение. На основании первого закона Кирхгофа

$$I_2 = I_1 = I_3 = 2,6 - 0,6 = 2$$
 а.

По закону Ома, примененному к участку цепи, содержащему сопротивление r_2 ,

$$U_{ab} = r_2 I_2 = 2 \cdot 1,4 = 2,8$$
 в.

Применяя закон Ома к участку цепи ab , содержащему э. д. с. E и сопротивления r_1 и r_0 , найдем искомую э. д. с.:

$$E = U_{ab} + (r_1 + r_0) I_1 = 2,8 + 0,6 \cdot 2,6 = 4,36$$
 в.

Теперь найдем напряжение на параллельных ветвях с сопротивлениями r_4 и r_x и точки в них:

$$U_{ac} = U_{ob} - r_3 I_3 = 2,8 - 0,6 \cdot 3 = 1$$
 в;

$$I_4 = \frac{U_{ac}}{r_4} = \frac{1}{2,5} = 0,4$$
 а,

$$I_x = I_3 - I_4 = 0,6 - 0,4 = 0,2$$
 а.

Искомое сопротивление

$$r_x = \frac{U_{ac}}{I_x} = \frac{1}{0,2} = 5$$
 ом.

1.15. В схеме моста (рис. 1.24) известны сопротивления $r_1 = 1300$ ом, $r_2 = 800$ ом, $r_3 = 400$ ом. Сопротивление гальванометра $r_g = 600$ ом. Через сопротивление r_1 протекает ток $I_1 = 1$ ма. К мосту приложено напряжение $U = 2,5$ в. Найти сопротивление r_4 .

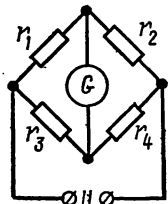


Рис. 1.24

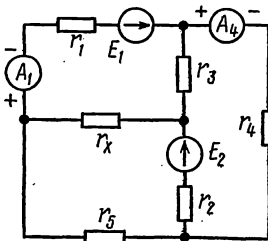


Рис. 1.25

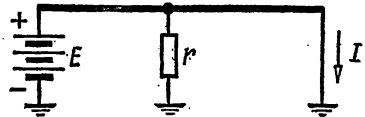


Рис. 1.26

1.16. В цепи рис. 1.25 найти E_1 и r_x , если $E_2 = 3$ в, $r_1 = r_2 = 1$ ком, $r_3 = 4$ ком, $r_4 = 2$ ком, $r_5 = 1$ ком. Амперметр A_1 показывает 4 ма, а A_4 — 3 ма; полярности приборов показаны на схеме, а их сопротивлениями можно пренебречь.

1.17. Однопроводная линия с сопротивлением r_0 на единицу длины, питаемая батареей с э. д. с., равной E , закорочена на приемном конце (рис. 1.26). На каком месте линия должна иметь утечку с сопротивлением r , чтобы ток I на приемном конце был максимальным?

1.18. Для определения места повреждения изоляции линии применяется схема, изображенная на рис. 1.27, а; r_1 и r_2 — магазины сопротивлений. Правый зажим гальванометра заземлен. Свободные

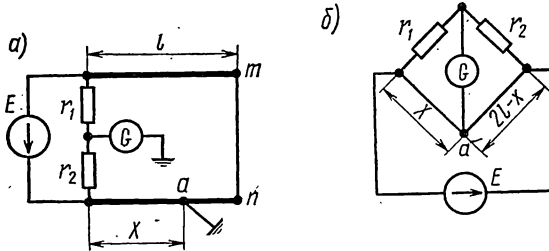


Рис. 1.27

концы m и n линии соединены между собой накоротко. Подбором сопротивлений r_1 и r_2 добиваются отсутствия тока в гальванометре. Показать, что если сечения обоих проводов одинаковы, то расстояние от места повреждения изоляции до начала линии равно $\frac{2lr_2}{r_1 + r_2}$.

Указание. Заданная схема может быть заменена схемой рис. 1.27, б

1.19. При проверке постоянной C счетчика оказалось, что при токе 10 а и напряжении 120 в якорь его в продолжение 30 сек сделал 37 оборотов. Определить ошибку в показаниях счетчика, если на счетчике указано, что $1\text{ ватт} \cdot \text{ч}$ соответствует 400 оборотам счетчика.

Примечание. Постоянной счетчика называется число ватт-часов, приходящихся на один оборот счетчика.

1.20. Каково должно быть сечение медных проводов линии для передачи потребителю мощности $P = 16\text{ кВт}$ при условии, что потеря мощности не превысит $\rho = 5\%$, если длина линии $l = 180\text{ м}$ и напряжение в конце линии равно $U_2 = 220\text{ в}$?

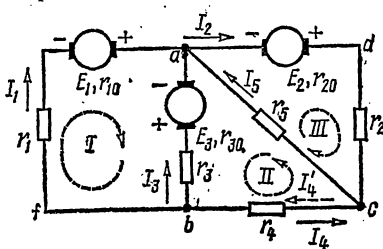


Рис. 1.28

1.21. Для схемы рис. 1.28, пользуясь законами Кирхгофа, найти токи и проверить баланс мощностей, если э. д. с. генераторов напряжения: $E_1 = 15\text{ в}$, $E_2 = 70\text{ в}$, $E_3 = 5\text{ в}$, их внутренние сопротивления: $r_{10} = r_{20} = 1\text{ ом}$, $r_{30} = 2\text{ ом}$, сопротивления элементов в цепи: $r_1 = 5\text{ ом}$, $r_2 = 4\text{ ом}$, $r_3 = 8\text{ ом}$, $r_4 = 2,5\text{ ом}$, $r_5 = 15\text{ ом}$.

Решение. Всего в схеме пять

ветвей ($N_b = 5 : bfa, adc, ba, bc, ca$), число узлов $N_y = 3$ (a, b , и c), генераторов тока нет ($N_T = 0$), число неизвестных токов равно $N_b - N_T = 5$. Число независимых уравнений, составляемых по первому закону Кирхгофа, равно числу узлов минус единица, т. е. двум ($N_y - 1 = 3 - 1 = 2$). Число уравнений, составляемых по второму закону Кирхгофа, согласно (1.10), равно трем ($K = N_b - N_y + 1 - N_T = 5 - 3 + 1 - 0 = 3$). Таким образом, общее число независимых уравнений, составляемых по первому и второму законам Кирхгофа, равно числу неизвестных токов в пяти ветвях схемы.

Выберем положительные направления токов и обозначим их стрелками. Выберем и обозначим стрелками направление обхода трех независимых контуров: I, II, и III. Составим систему уравнений Кирхгофа:

для узла a

$$I_1 - I_2 + I_3 + I_5 = 0; \quad (1)$$

для узла b

$$-I_1 - I_3 - I_4 = 0; \quad (2)$$

для контура I -

$$E_1 + E_3 = (r_1 + r_{10}) I_1 - (r_8 + r_{30}) I_3; \quad (3)$$

для контура II

$$E_3 = -(r_3 + r_{30}) I_3 + r_4 I_4 + r_5 I_5; \quad (4)$$

для контура III

$$E_2 = (r_2 + r_{20}) I_2 + r_5 I_5. \quad (5)$$

Уравнения (1) — (5) после подстановки в них числовых значений будут иметь следующий вид:

$$I_1 - I_2 + I_3 + I_5 = 0; \quad I_1 + I_3 + I_4 = 0;$$

$$6 I_1 - 10 I_3 = 20; \quad -10 I_3 + 2,5 I_4 + 15 I_5 = 5; \quad 5 I_2 + 15 I_5 = 70.$$

Решая эту систему уравнений, получим:

$$I_1 = 5 a; \quad I_2 = 8 a; \quad I_3 = 1 a; \quad I_4 = -6 a; \quad I_5 = 2 a.$$

Отрицательный знак для тока I_4 означает, что истинное направление тока в сопротивлении r_4 противоположно принятому. Истинное направление тока в сопротивлении r_4 обозначено I'_4 и показано на схеме штриховой стрелкой.

При проверке баланса мощностей надо иметь в виду, что в тех ветвях цепи, где истинное направление тока совпадает с направлением э. д. с., соответствующая э. д. с. является источником энергии, а в тех участках, где направления э. д. с. и тока противоположны, э. д. с. — потребитель энергии. Все сопротивления, как внешние, так и генераторов энергии, независимо от протекающего через них тока будут являться потребителями энергии.

Баланс мощностей для рассматриваемой схемы [см. формулы (1.39)]

$$E_1 I_1 + E_2 I_2 - E_3 I_3 = I_1^2 (r_1 + r_{10}) + I_2^2 (r_2 + r_{20}) + \\ + I_3^2 (r_3 + r_{30}) + I_4^2 r_4 + I_5^2 r_5,$$

или

$$15 \cdot 5 + 70 \cdot 8 - 5 \cdot 1 = 5^2 \cdot 6 + 8^2 \cdot 5 + 1^2 \cdot 10 + 6^2 \cdot 2,5 + 2^2 \cdot 15;$$

получено тождество $630 = 630$.

1.22. В схеме рис. 1.29 найти все токи.

1.23. Для цепи, изображенной на рис. 1.30, рассчитать токи и определить показание вольтметра, если $E_1 = 40$ в, $E_2 = 5$ в, $E_3 = 25$ в, $r_1 = 5$ ом, $r_2 = r_3 = 10$ ом. Током, протекающим через вольтметр, можно пренебречь.

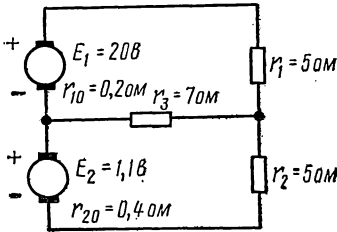


Рис. 1.29

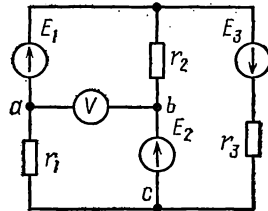


Рис. 1.30

1.24. Аккумуляторная батарея из 20 последовательно соединенных элементов работает параллельно с генератором на сеть, имеющую нагрузку 30 а. Каждый аккумулятор имеет э. д. с. 1,82 в и сопротивление 0,001 ом. Э. д. с. генератора 36,4 в и его сопротивление 0,04 ом. Определить нагрузку генератора и батареи (т. е. отдаваемые ими токи) и напряжение на их зажимах.

Какую э. д. с. должен развивать генератор, чтобы нагрузка распределилась поровну между генератором и батареей?

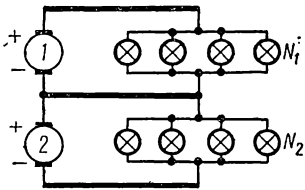


Рис. 1.31

1.25. По трехпроводной линии длиной 0,5 км (рис. 1.31) от двух генераторов 1 и 2 питаются две группы ламп 50 вт, 110 в. В первой группе $N_1 = 200$ ламп, а во второй $N_2 = 600$ ламп. Сечение крайних проводов $q = 35$ мм², а сечение среднего (нулевого) провода $q_0 = 16$ мм². Каждый генератор имеет внутреннее сопротивление 0,01 ом и развивает э. д. с. 120 в. Определить токи во всех проводах линии и

напряжение на зажимах каждой группы ламп, сопротивления которых считать постоянными. Материал проводов линии — медь.

1.26. Напряжения, измеренные электростатическим вольтметром между узловыми точками схемы и землей равны $U_{10} = -15$ в, $U_{20} =$

$= 52 \text{ в}$, $U_{30} = 64 \text{ в}$ (рис. 1.32). Определить токи в ветвях и отходящих проводах при $E_1 = 80 \text{ в}$, $E_3 = 70 \text{ в}$, $r_1 = 5 \text{ ом}$, $r_2 = 10 \text{ ом}$, $r_3 = 12 \text{ ом}$.

Решение. Вычислим напряжения между точками 1 и 2, 2 и 3, 3 и 1:

$$U_{10} - U_{20} = U_{12} = -15 - 52 = -67 \text{ в};$$

$$U_{20} - U_{30} = U_{23} = 52 - 64 = -12 \text{ в};$$

$$U_{30} - U_{10} = U_{31} = 64 - (-15) = 79 \text{ в}.$$

Произвольно выберем положительные направления токов ветвей и укажем их стрелками.

Применяя к ветвям закон Ома, определим:

$$I_1 = \frac{U_{12} + E_1}{r_1} = \frac{-67 + 80}{5} = 2,6 \text{ а},$$

$$I_2 = \frac{U_{32}}{r_2} = \frac{12}{10} = 1,2 \text{ а};$$

$$I_3 = \frac{U_{31} - E_3}{r_3} = \frac{79 - 70}{12} = 0,75 \text{ а}.$$

Токи в ответвлениях от узловых точек находим по первому закону Кирхгофа:

$$I_4 = I_3 - I_1 = -1,85 \text{ а}; \quad I_5 = I_1 + I_2 = 3,8 \text{ а};$$

$$I_6 = -I_2 - I_3 = -1,95 \text{ а}.$$

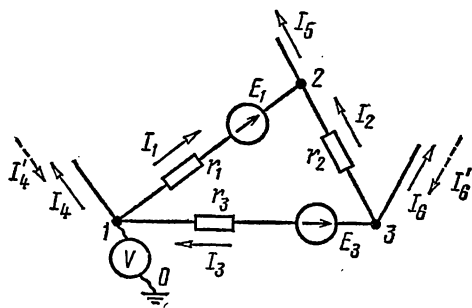


Рис. 1.32

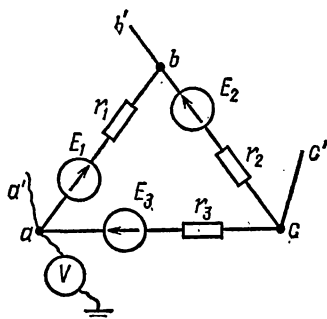


Рис. 1.33

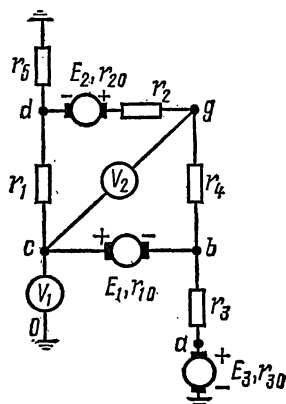


Рис. 1.34

Токи I_4 и I_6 получились со знаком минус. Это указывает на то, что через узлы 1 и 3 в схему протекают «истинные» положительные токи I'_4 и I'_6 , обозначенные на схеме штриховыми стрелками.

1.27. В цепи рис. 1.33 известны э. д. с. $E_1 = 120$ в, $E_2 = 40$ в, $E_3 = 70$ в и сопротивления $r_1 = 20$ ом, $r_2 = 10$ ом, $r_3 = 40$ ом. Потенциалы точек a , b , и c относительно земли соответственно равны (определены посредством вольтметра) $U_{a0} = 160$ в, $U_{b0} = 180$ в, $U_{c0} = 50$ в. Определить токи в ветвях ab , bc , ca и в проводах aa' , bb' и cc' , подходящих к точкам a , b и c .

1.28. В цепи рис. 1.34 найти токи и показания вольтметров, если известно, что $E_1 = 32$ в, $E_2 = 64$ в, $E_3 = 72$ в, $r_1 = 9$ ом, $r_{10} = 1$ ом, $r_2 = 5$ ом, $r_{20} = 1$ ом, $r_3 = 2$ ом, $r_{30} = 1$ ом, $r_4 = 2$ ом, $r_5 = 1$ ом. Сопротивления вольтметра весьма велики по сравнению с сопротивлениями элементов цепи.

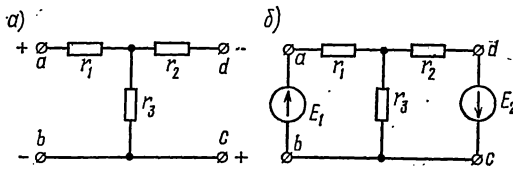


Рис. 1.35

1.29. Для схемы рис. 1.35, а найти токи и проверить баланс мощностей, если $U_{ab} = 12$ в, $U_{cd} = 5,6$ в, $r_1 = 4$ ом, $r_2 = 5$ ом, $r_3 = 3$ ом.

Указание. Данная схема может быть заменена эквивалентной, в которой между точками a и b , c и d включены источники напряжения с э. д. с., численное значение которых $E_1 = U_{ab}$ и $E_2 = U_{cd}$ (рис. 1.35, б) Обращаем внимание на то, что при включении э. д. с. следует соблюдать заданные полярности напряжений.

1.30. В цепи рис. 1.36 найти токи и проверить баланс мощностей.

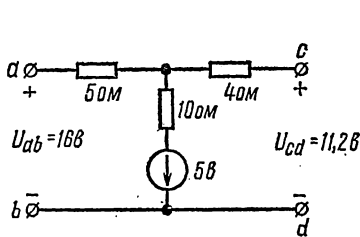


Рис. 1.36

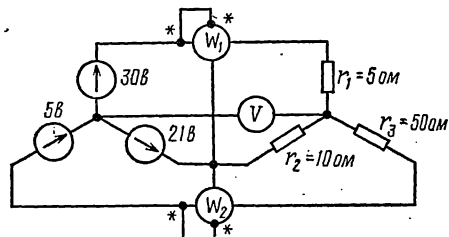


Рис. 1.37

1.31. Чему равно показание вольтметра на рис. 1.37, если током вольтметра можно пренебречь по сравнению с токами в нагрузках?

Определить показания ваттметров и убедиться в том, что их сумма равна сумме мощностей, расходуемых в сопротивлениях r_1 , r_2 и r_3 . Потерями в катушках ваттметров пренебречь.

1.32. К источнику тока $J = 0,1$ а подключены сопротивления (рис. 1.38): $r_1 = 12$ ом, $r_2 = 10$ ом, $r_3 = 16$ ом, $r_4 = 40$ ом, $r_5 = 60$ ом. Определить напряжение U_{ab} источника тока и все токи. Проверить баланс мощностей.

Решение. Вначале найдем сопротивление схемы между зажимами a и b :

$$r_{ab} = r_1 + \frac{r_2 \left(r_3 + \frac{r_4 r_5}{r_4 + r_5} \right)}{r_2 + r_3 + \frac{r_4 r_5}{r_4 + r_5}} = 12 + \frac{10 \left(16 + \frac{40 \cdot 60}{100} \right)}{10 + 16 + \frac{40 \cdot 60}{100}} = 20 \text{ ом.}$$

Напряжение источника тока

$$U_{ab} = r_{ab} J = 20 \cdot 0,1 = 2 \text{ в}$$

По закону Ома находим ток, который проходит через r_2 :

$$I_2 = \frac{U_{ab} - J r_1}{r_2} = \frac{2 - 0,1 \cdot 12}{10} = 0,08 \text{ а.}$$

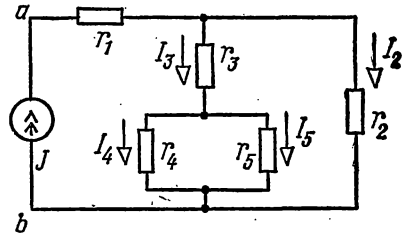


Рис. 1.38

Ток I_3 , проходящий через r_3 , найдем из уравнения первого закона Кирхгофа:

$$I_3 = J - I_2 = 0,1 - 0,08 = 0,02 \text{ а.}$$

Этот ток распределяется обратно пропорционально сопротивлениям r_4 и r_5 :

$$I_4 = I_3 \frac{r_5}{r_4 + r_5} = 0,02 \frac{60}{100} = 0,012 \text{ а;}$$

$$I_5 = I_3 - I_4 = 0,008 \text{ а.}$$

Проверка баланса мощностей. Мощность, доставляемая источником тока,

$$P_{\text{и}} = U_{ab} J = 2 \cdot 0,1 = 0,2 \text{ вт.}$$

Мощность, расходуемая в нагрузочных сопротивлениях,

$$P_{\text{н}} = J^2 r_1 + I_2^2 r_2 + I_3^2 r_3 + I_4^2 r_4 + I_5^2 r_5 = 0,1^2 \cdot 12 + 0,08^2 \cdot 10 + 0,02^2 \cdot 16 + 0,012^2 \cdot 40 + 0,008^2 \cdot 60 = 0,2 \text{ вт,}$$

т. е. получено тождество

$$P_{\text{и}} = P_{\text{н}} = 0,2 \text{ вт.}$$

1.33. Источник тока $J = 30 \text{ ма}$ (рис. 1.39). Чему равны токи в ветвях, сопротивления которых $r_1 = 1,8 \text{ ком}$, $r_2 = 3 \text{ ком}$, $r_3 = 1,5 \text{ ком}$, $r_4 = 2 \text{ ком}$? Вычислить напряжение на источнике тока.

1.34. Цепь рис. 1.40 содержит генератор тока, имеющий внутреннюю проводимость $g_r = 5 \cdot 10^{-5} \text{ сим}$ и ток $J = 80 \text{ ма}$, и источник напряжения с э. д. с. $E_1 = 230 \text{ в}$; сопротивления $r_1 = 1 \text{ ком}$, $r_2 = 2 \text{ ком}$. Определить все токи. Проверить баланс мощностей.

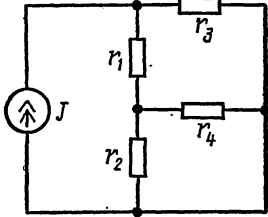


Рис. 1.39

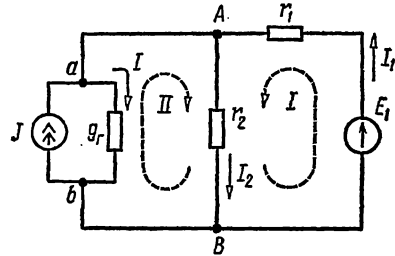


Рис. 1.40

Решение. Выберем положительные направления токов, как это указано на рис. 1.40, и составим уравнения по законам Кирхгофа. Цепь содержит четыре ветви ($N_b = 4$), два узла A и B ($N_y = 2$), один генератор тока ($N_T = 1$). Число уравнений, составляемых по первому закону Кирхгофа, равно $N_y - 1 = 1$, а по второму закону Кирхгофа [см. формулу (1.10)]

$$K = N_b - N_y + 1 - N_T = 4 - 2 + 1 - 1 = 2.$$

Выберем два независимых контура I и II, не содержащих источника тока.

Уравнение для узла A

$$J - I - I_2 + I_1 = 0;$$

для контура I

$$r_1 I_1 + r_2 I_2 = E_1;$$

для контура II

$$r_2 I_2 - \frac{1}{g_r} I = 0.$$

Подставляя цифровые значения в эти уравнения и решив их, получим: $I_1 = 30 \text{ ма}$; $I_2 = 100 \text{ ма}$; $I = 10 \text{ ма}$.

Для проверки баланса мощностей вначале определим напряжение на источнике тока:

$$U_{ab} = \frac{1}{g_r} I = \frac{1}{5 \cdot 10^{-5}} 10 \cdot 10^{-3} = 200 \text{ в}.$$

Мощности, доставляемые источником тока и генератором напряжения,

$$P_{\text{и}} = U_{ab} J + E_1 I_1 = 200 \cdot 80 \cdot 10^{-3} + 230 \cdot 30 \cdot 10^{-3} = 22,9 \text{ вт.}$$

Мощности, расходуемые в сопротивлениях,

$$P = I_1^2 r_1 + I_2^2 r_2 + I^2 \frac{1}{g_r} = 0,03^2 \cdot 10^3 + 0,1^2 \cdot 2 \cdot 10^3 + \\ + 0,01^2 \frac{1}{5 \cdot 10^{-5}} = 22,9 \text{ вт,}$$

т.е. баланс мощностей соблюдается.

1.35. Два источника тока $J_1 = 100 \text{ ма}$ и $J_2 = 50 \text{ ма}$ (рис. 1.41) включены в схему, содержащую сопротивления $r_1 = 20 \text{ ом}$, $r_2 = 50 \text{ ом}$, $r_3 = 30 \text{ ом}$.

Вычислить все токи и проверить баланс мощностей.

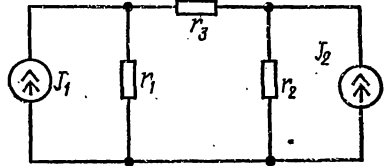


Рис. 1.41

В. Методы контурных токов и узловых потенциалов

1.36. Методом контурных токов найти токи в цепи, схема которой изображена на рис. 1.42. Даны: $E_1 = 100 \text{ в}$, $E_2 = 30 \text{ в}$, $E_3 = 10 \text{ в}$, $E_4 = 6 \text{ в}$, $r_1 = 10 \text{ ом}$, $r_2 = 10 \text{ ом}$, $r_4 = 6 \text{ ом}$, $r_5 = 5 \text{ ом}$, $r_6 = 15 \text{ ом}$, $r_{40} = 1 \text{ ом}$.

Решение. Выберем направления контурных токов, которые обозначим через J_1 , J_2 , J_3 .

Составим систему уравнений для контуров:

$$E_1 - E_2 - E_3 = (r_1 + r_2) J_1 - r_2 J_2;$$

$$E_2 - E_4 = (r_2 + r_5 + r_{40} + r_4) J_2 + (r_{40} + r_4) J_3 - r_2 J_1;$$

$$-E_3 - E_4 = (r_6 + r_{40} + r_4) J_3 + (r_{40} + r_4) J_2.$$

После подстановки числовых значений имеем:

$$60 = 20 J_1 - 10 J_2;$$

$$24 = -10 J_1 + 22 J_2 + 7 J_3;$$

$$-16 = 7 J_2 + 22 J_3.$$

Решив эту систему уравнений, найдем контурные токи:

$$J_1 = 5 \text{ а}; J_2 = 4 \text{ а}; J_3 = -2 \text{ а,}$$

затем найдем истинные токи во всех ветвях.

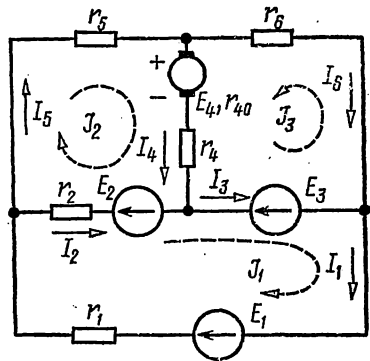


Рис. 1.42

В ветви, где действует э. д. с. E_1 , истинный ток I_1 имеет направление контурного тока \mathcal{J}_1 и равен $I_1 = \mathcal{J}_1 = 5 a$.

В ветви с сопротивлением r_5 истинный ток I_5 имеет направление контурного тока \mathcal{J}_2 и равен $I_5 = \mathcal{J}_2 = 4 a$.

В ветви с сопротивлением r_6 истинный ток I_6 имеет направление, противоположное контурному току \mathcal{J}_3 , и равен $I_6 = -\mathcal{J}_3 = 2 a$.

В ветви с сопротивлением r_2 истинный ток I_2 получится от наложения контурных токов \mathcal{J}_1 и \mathcal{J}_2 и будет иметь направление большего контурного тока \mathcal{J}_1 :

$$I_2 = \mathcal{J}_1 - \mathcal{J}_2 = 5 - 4 = 1 a.$$

В ветви с сопротивлением r_4 истинный ток I_4 получится от наложения контурных токов \mathcal{J}_2 и \mathcal{J}_3 и будет иметь направление контурного тока \mathcal{J}_2 :

$$I_4 = \mathcal{J}_2 + \mathcal{J}_3 = 4 + (-2) = 2 a.$$

В ветви, где действует э. д. с. E_3 , истинный ток I_3 получится от наложения контурных токов \mathcal{J}_1 и \mathcal{J}_3 и будет иметь направление тока \mathcal{J}_1 :

$$I_3 = \mathcal{J}_1 + \mathcal{J}_3 = 5 + (-2) = 3 a.$$

Покажем, как эта же задача может быть решена с помощью определителей. Для этого уравнения контурных токов следует записать в форме (1.11):

$$r_{11} \mathcal{J}_1 + r_{12} \mathcal{J}_2 + r_{13} \mathcal{J}_3 = E_{11};$$

$$r_{21} \mathcal{J}_1 + r_{22} \mathcal{J}_2 + r_{23} \mathcal{J}_3 = E_{22};$$

$$r_{31} \mathcal{J}_1 + r_{32} \mathcal{J}_2 + r_{33} \mathcal{J}_3 = E_{33},$$

где

$$r_{11} = r_1 + r_2 = 20 \text{ ом}, \quad r_{12} = r_{21} = -r_2 = -10 \text{ ом};$$

$$r_{13} = r_{31} = 0, \quad r_{22} = r_2 + r_5 + r_{40} + r_4 = 22 \text{ ом};$$

$$r_{23} = r_{32} = r_{40} + r_4 = 7 \text{ ом}, \quad r_{33} = r_6 + r_{40} + r_4 = 22 \text{ ом};$$

$$E_{11} = E_1 - E_2 - E_3 = 60 \text{ в}; \quad E_{22} = E_2 - E_4 = 24 \text{ в}; \quad E_{33} = -E_3 - E_4 = -16 \text{ в}.$$

Составим определитель Δ и вычислим его значение:

$$\Delta = \begin{vmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 20 & -10 & 0 \\ -10 & 22 & 7 \\ 0 & 7 & 22 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 20 & -10 & 0 & 20 & -10 \\ -10 & 22 & 7 & -10 & 22 \\ 0 & 7 & 22 & 0 & 7 \end{vmatrix} =$$

$$= 20 \cdot 22 \cdot 22 + (-10) \cdot 7 \cdot 0 + 0 \cdot (-10) \cdot 7 - 0 \cdot 22 \cdot 0 - 20 \cdot 7 \cdot 7 -$$

$$- (-10)(-10)22 = 9680 - 980 - 2200 = 6500.$$

Вычислим значения алгебраических дополнений определителя, считав его миноры и умножив каждый из них на $(-1)^{k+l}$, где k — номер вычеркиваемой строки, а l — номер вычеркиваемого столбца; Δ_{11} — это алгебраическое дополнение, получающееся из основного определителя Δ путем вычеркивания первой строки и первого столбца, умноженное на $(-1)^{1+1}$:

$$\Delta_{11} = \begin{vmatrix} 22 & 7 \\ 7 & 22 \end{vmatrix} (-1)^2 = 22 \cdot 22 - 7 \cdot 7 = 435;$$

Δ_{12} — алгебраическое дополнение, получающееся из основного определителя Δ при вычеркивании первой строки и второго столбца, умноженное на $(-1)^{1+2}$:

$$\Delta_{12} = \begin{vmatrix} -10 & 7 \\ 0 & 22 \end{vmatrix} (-1)^3 = -(-10 \cdot 22 - 7 \cdot 0) = 220 = \Delta_{21}.$$

Аналогично найдем:

$$\Delta_{13} = \Delta_{31} = -70; \quad \Delta_{22} = 440; \quad \Delta_{23} = \Delta_{32} = -140; \quad \Delta_{33} = 340.$$

Искомые контурные токи:

$$\begin{aligned} J_1 &= \frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} E_{11} & E_{22} & E_{33} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{vmatrix} = E_{11} \frac{\Delta_{11}}{\Delta} + E_{22} \frac{\Delta_{12}}{\Delta} + E_{33} \frac{\Delta_{13}}{\Delta} = \\ &= 60 \frac{435}{6500} + 24 \frac{220}{6500} - 16 \frac{(-70)}{6500} = 5 \text{ а}; \end{aligned}$$

$$J_2 = \frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ E_{11} & E_{22} & E_{33} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{vmatrix} = E_{11} \frac{\Delta_{21}}{\Delta} + E_{22} \frac{\Delta_{22}}{\Delta} + E_{33} \frac{\Delta_{23}}{\Delta} = 4 \text{ а};$$

$$J_3 = \frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ E_{11} & E_{22} & E_{33} \end{vmatrix} = E_{11} \frac{\Delta_{31}}{\Delta} + E_{22} \frac{\Delta_{32}}{\Delta} + E_{33} \frac{\Delta_{33}}{\Delta} = -2 \text{ а}.$$

Таким образом, получили те же результаты, что и ранее.

1.37. Найти все токи и определить потенциалы точек a , b и o относительно земли 0 (рис. 1.43). Задачу решить методом контурных токов. Даны: $E_1 = 85 \text{ в}$, $E_2 = 84 \text{ в}$, $E_3 = 5 \text{ в}$, $E_4 = 12 \text{ в}$, $r_1 = 8 \text{ ом}$, $r_2 = 10 \text{ ом}$, $r_3 = 10 \text{ ом}$, $r_4 = 10 \text{ ом}$, $r_5 = 10 \text{ ом}$, $r_6 = 4 \text{ ом}$.

1.38. Для схемы рис. 1.44 вычислить токи. Даны токи и внутренние проводимости генераторов тока соответственно первого и второго: $J_1 = 50 \text{ ма}$, $g_1 = 10^{-4} \text{ сим}$, $J_2 = 60 \text{ ма}$, $g_2 = 0,5 \cdot 10^{-3} \text{ сим}$,

э. д. с. генератора напряжения $E_3 = 270$ в; сопротивления $r_3 = 1$ ком, $r_4 = 2$ ком, $r_5 = 7,5$ ком, $r_6 = 3$ ком.

1.39. Решить задачу 1.34 методом контурных токов.

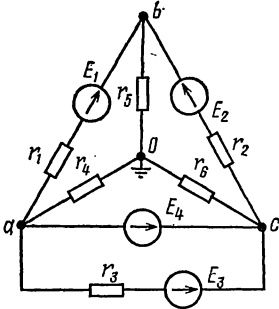


Рис. 1.43

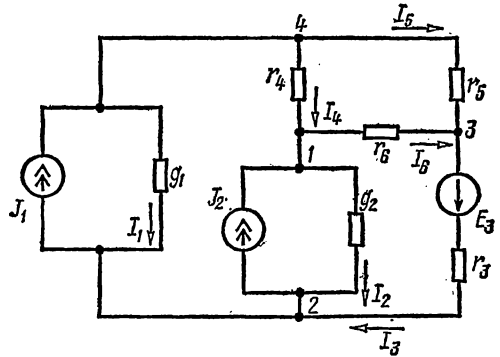


Рис. 1.44

1.40. Цепь рис. 1.45 содержит источник тока $J = 50$ ма, источник напряжения с э. д. с. $E = 60$ в и сопротивления $r_1 = 5$ ком, $r_2 = 4$ ком, $r_3 = 16$ ком, $r_4 = 2$ ком, $r_5 = 8$ ком.

Вычислить все токи методом контурных токов. Проверить баланс мощностей.

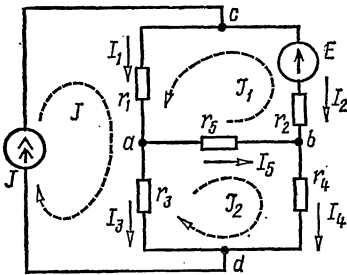


Рис. 1.45

Решение. Схема содержит шесть ветвей ($N_b = 6$), четыре узла ($N_y = 4$), один генератор тока ($N_T = 1$). Число независимых уравнений, составляемых по методу контурных токов, равно двум ($K = 6 - 4 + 1 - 1 = 2$). Зададимся направлениями контурных токов $\mathcal{J}_1, \mathcal{J}_2$, как показано на рис. 1.45. Там же нанесен известный контурный ток источника тока J . Составим систему уравнений для первого и второго контуров:

$$(r_1 + r_2 + r_5) \mathcal{J}_1 + r_5 \mathcal{J}_2 + r_1 J = E;$$

$$r_5 \mathcal{J}_1 + (r_3 + r_4 + r_5) \mathcal{J}_2 - r_3 J = 0.$$

Подставляя цифровые значения и решая эти уравнения, найдем контурные токи:

$$\mathcal{J}_1 = -30 \text{ ма и } \mathcal{J}_2 = 40 \text{ ма.}$$

Искомые токи:

$$I_1 = J + \mathcal{J}_1 = 20 \text{ ма; } I_2 = -\mathcal{J}_1 = 30 \text{ ма; } I_3 = J - \mathcal{J}_2 = 10 \text{ ма;}$$

$$I_4 = \mathcal{J}_2 = 40 \text{ ма; } I_5 = \mathcal{J}_1 + \mathcal{J}_2 = 10 \text{ ма.}$$

Баланс мощностей

$$\begin{aligned}
 -E I_2 + U_{cd} J &= -E I_2 + (r_1 I_1 + r_3 I_3) J = \\
 &= I_1^2 r_1 + I_2^2 r_2 + I_3^2 r_3 + I_4^2 r_4 + I_5^2 r_5.
 \end{aligned}$$

Подставляя числовые значения, получим тождество: $11,2 \text{ вт} = 11,2 \text{ вт}$.

1.41. Для схемы рис. 1.46, а, пользуясь методом узловых потенциалов, определить все токи. Дано: $E_1 = 30 \text{ в}$, $E_2 = 10 \text{ в}$, $E_3 = 200 \text{ в}$, $E_4 = 56 \text{ в}$, $r_1 = 20 \text{ ом}$, $r_2 = 30 \text{ ом}$, $r_3 = 6 \text{ ом}$, $r_4 = 8 \text{ ом}$, $r_5 = 15 \text{ ом}$, $r_6 = 40 \text{ ом}$ и $r_7 = 10 \text{ ом}$.

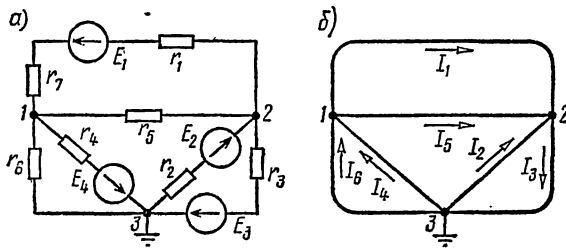


Рис. 1.46

Решение. Примем потенциал точки 3 равным нулю ($\varphi_3 = 0$). Тогда на основании (1.13) запишем систему уравнений для определения потенциалов точек 1 и 2:

$$\varphi_1 g_{11} - \varphi_2 g_{12} = \sum_1 E g; \quad (1)$$

$$-\varphi_1 g_{21} + \varphi_2 g_{22} = \sum_2 E g. \quad (2)$$

Подсчитаем g_{11} — сумму проводимостей ветвей, присоединенных к узлу 1:

$$g_{11} = \frac{1}{r_1 + r_7} + \frac{1}{r_6} + \frac{1}{r_4} + \frac{1}{r_8} = \frac{1}{30} + \frac{1}{15} + \frac{1}{8} + \frac{1}{40} = 0,25 \text{ см.}$$

Аналогично g_{22} — сумма проводимостей ветвей, присоединенных к узлу 2:

$$g_{22} = \frac{1}{r_1 + r_7} + \frac{1}{r_5} + \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3} = \frac{1}{30} + \frac{1}{15} + \frac{1}{30} + \frac{1}{6} = 0,3 \text{ см.}$$

Сумма проводимостей, соединяющих первый и второй узлы,

$$g_{12} = g_{21} = \frac{1}{r_1 + r_7} + \frac{1}{r_8} = \frac{1}{30} + \frac{1}{15} = 0,1 \text{ см.}$$

Подставляя числовые значения в уравнения (1) и (2), получим:

$$0,25 \varphi_1 - 0,1 \varphi_2 = 30 \frac{1}{30} - 56 \frac{1}{8} = -6;$$

$$-0,1 \varphi_1 + 0,3 \varphi_2 = -30 \frac{1}{30} + 10 \frac{1}{30} - 200 \frac{1}{6} = -34.$$

Решив последние два уравнения, найдем потенциалы точек 1 и 2:

$$\varphi_1 = -80 \text{ в}; \quad \varphi_2 = -140 \text{ в}.$$

Наконец, применяя закон Ома для отдельных ветвей, определим искомые токи:

$$I_1 = \frac{\varphi_1 - \varphi_2 - E_1}{r_1} = \frac{-80 + 140 - 30}{30} = 1 \text{ а};$$

$$I_2 = \frac{\varphi_2 - \varphi_3 + E_2}{r_2} = \frac{140 + 10}{30} = 5 \text{ а};$$

$$I_3 = \frac{\varphi_2 - \varphi_3 + E_3}{r_3} = \frac{-140 + 200}{6} = 10 \text{ а};$$

$$I_4 = \frac{\varphi_3 - \varphi_1 - E_4}{r_4} = \frac{80 - 56}{8} = 3 \text{ а};$$

$$I_5 = \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{r_5} = \frac{-80 + 140}{15} = 4 \text{ а};$$

$$I_6 = \frac{\varphi_3 - \varphi_1}{r_6} = \frac{80}{40} = 2 \text{ а}.$$

Направления найденных токов указаны на структурной схеме рис. 1.46, б цепи рис. 1.46, а.

Рекомендуем читателю решить ту же задачу, приняв за нуль потенциал узловой точки 1.

1.42. Методом узловых потенциалов определить токи во всех ветвях схемы, изображенной на рис. 1.47, а. Заданы: $E_1 = 20 \text{ в}$, $E_2 = 30 \text{ в}$, $E_3 = 2 \text{ в}$, $E_4 = 1,2 \text{ в}$, $E_5 = 5,6 \text{ в}$, $r_2 = 50 \text{ ом}$, $r_3 = 10 \text{ ом}$, $r_4 = 20 \text{ ом}$, $r_5 = 10 \text{ ом}$, $r_6 = 100 \text{ ом}$, $r_7 = 50 \text{ ом}$, $r_8 = 20 \text{ ом}$.

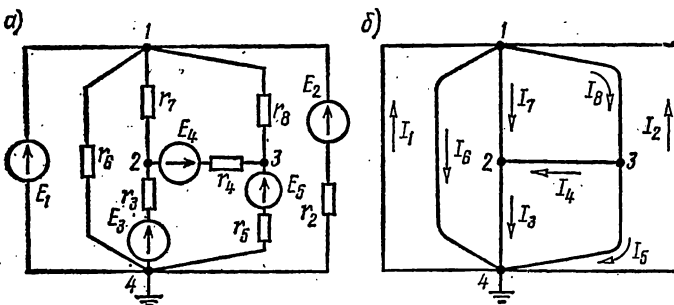


Рис. 1.47

Решение. В цепи имеется ветвь с источником напряжения, не содержащая сопротивлений. Целесообразно принять равным нулю потенциал одной из узловых точек, к которой подходит указанная ветвь, например потенциал узла 4 ($\varphi_4 = 0$). Тогда потенциал точки 1 имеет значение, равное E_1 , т. е. $\varphi_1 = 20$ в. Общее число уравнений, согласно формуле (1.13), равно двум ($N_y = 4$, $N_n = 1$, $U = N_y - N_n - 1 = 2$). Таким образом, в данной задаче достаточно составить по методу узловых потенциалов [см. формулу (1.13)] всего два уравнения для узлов 2 и 3:

для узла 2

$$-\varphi_1 g_{21} + \varphi_2 g_{22} - \varphi_3 g_{23} - \varphi_4 g_{24} = \sum_2 Eg = E_3 \frac{1}{r_3} - E_4 \frac{1}{r_4},$$

для узла 3

$$-\varphi_1 g_{31} - \varphi_2 g_{32} + \varphi_3 g_{33} - \varphi_4 g_{34} = \sum_3 Eg = E_4 \frac{1}{r_4} + E_5 \frac{1}{r_5}.$$

Подставляя в эти уравнения числовые значения сопротивлений, э. д. с., а также значения $\varphi_1 = 20$ в, $\varphi_4 = 0$, получим после перегруппировки членов для двух неизвестных потенциалов φ_2 и φ_3 систему уравнений:

$$\begin{aligned} \varphi_2 \left(\frac{1}{50} + \frac{1}{10} + \frac{1}{20} \right) - \varphi_3 \frac{1}{20} &= \frac{2}{10} - \frac{1,2}{20} + \frac{20}{50}; \\ -\varphi_2 \frac{1}{20} + \varphi_3 \left(\frac{1}{20} + \frac{1}{20} + \frac{1}{10} \right) &= \frac{1,2}{20} + \frac{5,6}{10} + \frac{20}{20}, \end{aligned}$$

или

$$0,17\varphi_2 - 0,05\varphi_3 = 0,54; \quad -0,05\varphi_2 + 0,2\varphi_3 = 1,62.$$

Решая эту систему уравнений, найдем:

$$\varphi_2 = 6 \text{ в}; \quad \varphi_3 = 9,6 \text{ в}.$$

Наконец, применяя к отдельным ветвям формулы закона Ома, получим значения всех токов, которые нанесены на структурной схеме (рис. 1.47, б):

$$I_2 = 0,2 \text{ а}, \quad I_3 = 0,4 \text{ а}, \quad I_4 = 0,12 \text{ а}, \quad I_5 = 0,4 \text{ а},$$

$$I_6 = 0,2 \text{ а}, \quad I_7 = 0,28 \text{ а}, \quad I_8 = 0,52 \text{ а}.$$

Обращаем особое внимание на то, что в ветви без сопротивления ток I_1 не определяется законом Ома и вычисляется на основании первого закона Кирхгофа:

$$I_1 = I_3 + I_5 + I_6 - I_2 = 0,8 \text{ а}.$$

1.43. Методом узловых потенциалов рассчитать токи в цепи (рис. 1.48).

У к а з а н и е. Если потенциал точки 4, являющейся общей для э. д. с. E_1 и E_2 , принять равным нулю ($\varphi_4 = 0$), то $\varphi_3 = -E_1$, $\varphi_2 = -E_2$ и для решения задачи достаточно составить всего одно уравнение для узловой точки 1.

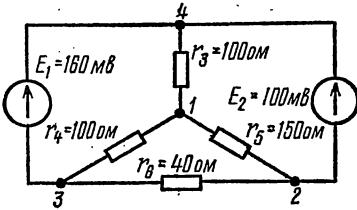


Рис. 1.48

1.44. По данным задачи 1.38. (см. рис. 1.44) найти токи методом узловых потенциалов.

Решение. Потенциал узла 4 примем равным нулю ($\varphi_4 = 0$). Составим систему уравнений, подобную системе (1.13), по методу узловых потенциалов для узлов 1, 2, 3.

Для узла 1

$$\varphi_1(g_2 + g_4 + g_6) - \varphi_2g_2 - \varphi_3g_6 - \varphi_4g_4 = J_2;$$

для узла 2

$$-\varphi_1g_2 + \varphi_2(g_1 + g_2 + g_3) - \varphi_3g_3 - \varphi_4g_1 = -J_1 - J_2 + E_3g_3;$$

для узла 3

$$-\varphi_1g_6 - \varphi_2g_3 + \varphi_3(g_3 + g_5 + g_6) - \varphi_4g_5 = -E_3g_3.$$

Подставляя числовые значения в уравнения и решая их, найдем потенциалы узловых точек: $\varphi_1 = -30$ в, $\varphi_2 = -50$ в и $\varphi_3 = -225$ в.

Наконец, определяем по закону Ома токи в каждой из ветвей:

$$I_1 = (\varphi_4 - \varphi_2)g_1 = [0 - (-50)]10^{-4} = 5 \cdot 10^{-3} \text{ а} = 5 \text{ ма};$$

$$I_2 = (\varphi_1 - \varphi_2)g_2 = [-30 - (-50)]0,5 \cdot 10^{-3} = 10 \cdot 10^{-3} \text{ а} = 10 \text{ ма};$$

$$I_3 = \frac{\varphi_3 - \varphi_2 + E_3}{r_3} = \frac{-225 - (-50) + 270}{1 \cdot 10^8} = 95 \cdot 10^{-3} \text{ а} = 95 \text{ ма};$$

$$I_4 = \frac{\varphi_4 - \varphi_1}{r_4} = 15 \cdot 10^{-3} \text{ а} = 15 \text{ ма};$$

$$I_5 = \frac{\varphi_4 - \varphi_3}{r_5} = 30 \cdot 10^{-3} \text{ а} = 30 \text{ ма};$$

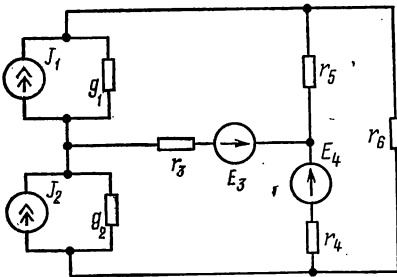


Рис. 1.49

$$I_6 = \frac{\varphi_1 - \varphi_3}{r_6} = 65 \cdot 10^{-3} \text{ а} = 65 \text{ ма}.$$

1.45. Решить задачу 1.35 методом узловых потенциалов.

1.46. Рассчитать токи в цепи рис. 1.49. Дано: $J_1 = 10$ ма, $g_1 = 1 \cdot 10^{-3}$ сим, $J_2 = 45$ ма, $g_2 = 2,5 \cdot 10^{-3}$ сим, $E_3 = 40$ в, $r_3 = 250$ ом, $E_4 = 55$ в, $r_4 = 300$ ом, $r_5 = 500$ ом, $r_6 = 200$ ом.

Задачу решить методами контурных токов и узловых потенциалов

1.47. Методом узловых потенциалов найти токи в схеме рис. 1.50, а. Дано: $E = 100$ в, $E_2 = 10$ в, $E_5 = 40$ в; $r_1 = 20$ ом, $r_2 = 30$ ом, $r_3 = 20$ ом, $r_4 = 10$ ом.

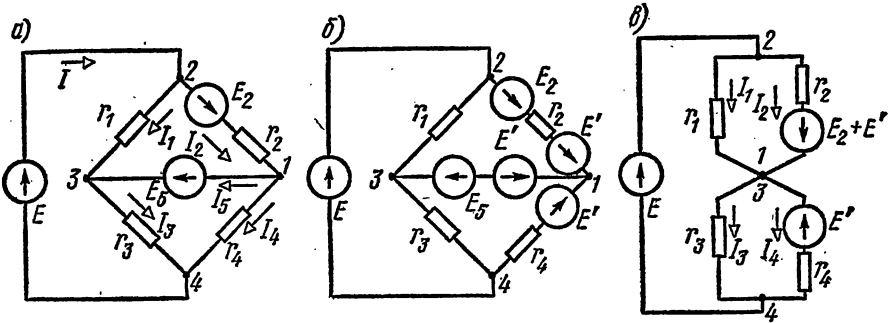


Рис. 1.50

Решение. Всего в схеме четыре узла ($N_y = 4$), две ветви, содержащие только источники напряжения: ветви с э. д. с. E и E_5 ($N_n = 2$). Согласно (1.12 б) число уравнений, составляемых по методу узловых потенциалов, равно одному:

$$Y = N_y - N_n - 1 = 4 - 2 - 1 = 1.$$

Однако при составлении уравнений согласно формулам (1.13) для любого из узлов в него войдут слагаемые, имеющие бесконечно большую проводимость.

Покажем, как обойти указанное затруднение.

Известно, что если во все ветви, примыкающие к какому-либо узлу, ввести одинаковые э. д. с., направленные к узлу (или от него), то это не окажет влияния на распределение токов в схеме, так как в уравнениях второго закона Кирхгофа для любого контура эти э. д. с. взаимно компенсируются. Воспользовавшись этим свойством, введем во все ветви, примыкающие к узлу 1, э. д. с. E' , направленные к этому узлу и равные E_5 (рис. 1.50, б). Теперь окажется, что в ветви 1—3 действуют две одинаковые и противоположно направленные э. д. с., а их сумма равна нулю. Поэтому точки 1 и 3 равнопотенциальны и их можно закоротить (рис. 1.50, в). Эта схема имеет три узла и содержит одну ветвь, имеющую только э. д. с. E ($N_n = 1$). Поэтому согласно (1.12.б) по методу узловых потенциалов надо составить всего одно уравнение. Составим его для узла 1, приняв $\varphi_4 = 0$. Тогда $\varphi_2 = E = 100$ в. Уравнение для узла 1 будет иметь вид

$$\begin{aligned} \varphi_1 g_{11} - \varphi_2 g_{12} - \varphi_4 g_{14} &= \varphi_1 \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3} + \frac{1}{r_4} \right) - \varphi_2 \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right) - \\ &- \varphi_4 \left(\frac{1}{r_3} + \frac{1}{r_4} \right) = (E_2 + E') \frac{1}{r_2} + E' \frac{1}{r_4}. \end{aligned}$$

Подставляя сюда числовые значения, получим $\varphi_1 = 60$ в.
 Наконец, найдем токи в ветвях исходной схемы по закону Ома:

$$I_1 = 2 \text{ а}; \quad I_2 = 3 \text{ а}; \quad I_3 = 3 \text{ а}; \quad I_4 = 2 \text{ а}.$$

Токи в ветвях с э. д. с. E и E_5 определяем по первому закону Кирхгофа:

$$I = I_1 + I_2 = 5 \text{ а}; \quad I_5 = I_2 - I_4 = 1 \text{ а}.$$

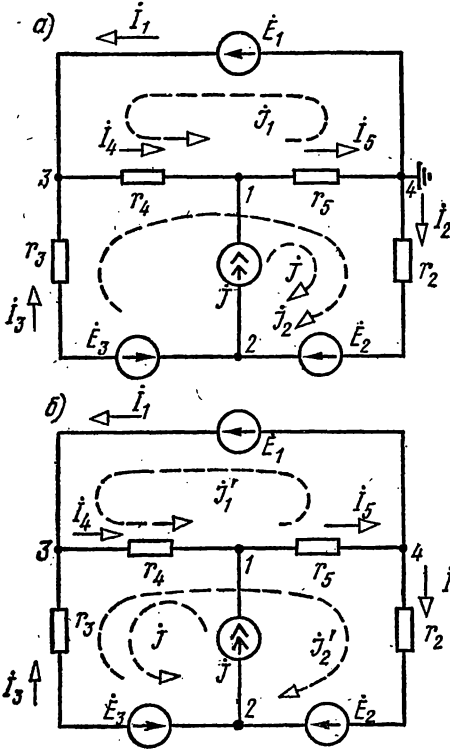


Рис. 1.51

В целях упражнения рекомендуется решить эту задачу, введя в каждую из ветвей, примыкающую к узлу 2, э. д. с. $E'' = E$.

1.48. Даны: цепь (рис. 1.51, а), $E_1 = 100$ в, $E_2 = 150$ в, $E_3 = 28$ в, $J = 2$ ма, $r_2 = 2$ ком, $r_3 = 4$ ком, $r_4 = 6$ ком, $r_5 = 8$ ком. Простейшим способом рассчитать токи всех ветвей.

Решение. При решении задачи по методу контурных токов [см. формулу (1.10)] надо составить два уравнения ($K = N_B - N_Y + 1 - N_T = 6 - 4 + 1 - 1 = 2$). По методу узловых потенциалов в соответствии с формулой (1.12 б) надо составить также два уравнения: ($Y = N_Y - N_H - 1 = 4 - 1 - 1 = 2$).

Вначале решим задачу методом контурных токов, выбрав их направления в соответствии с рис. 1.51, а:

$$(r_4 + r_5) \mathcal{J}_1 + (r_4 + r_5) \mathcal{J}_2 + r_5 J = E_1;$$

$$(r_4 + r_5) \mathcal{J}_1 + (r_2 + r_3 + r_4 + r_5) \mathcal{J}_2 + r_5 J = E_2 - E_3.$$

Подставляя числовые значения и решая эти уравнения, найдем контурные токи: $\mathcal{J}_1 = 3$ ма; $\mathcal{J}_2 = 3$ ма и токи в ветвях:

$$I_1 = \mathcal{J}_1 = 3 \text{ ма}; \quad \mathcal{J}_2 = \mathcal{J}_2 + J = 5 \text{ ма}; \quad \mathcal{J}_3 = \mathcal{J}_2 = 3 \text{ ма};$$

$$I_4 = \mathcal{J}_1 + \mathcal{J}_2 = 6 \text{ ма}; \quad \mathcal{J}_5 = \mathcal{J}_1 + \mathcal{J}_2 + J = 8 \text{ ма}.$$

Если контурный ток J источника тока направить так, как показано на рис. 1.51, б, а направления остальных контурных токов

Оставить неизменными, то контурные уравнения имеют вид:

$$(r_4 + r_5) \mathcal{J}'_1 + (r_4 + r_5) \mathcal{J}'_2 - r_4 J = E_1; \quad (1)$$

$$(r_4 + r_5) \mathcal{J}'_1 + (r_2 + r_3 + r_4 + r_5) \mathcal{J}'_2 - r_4 J = E_2 - E_3. \quad (2)$$

Решая эти уравнения, найдем контурные токи:

$$\mathcal{J}'_1 = 3 \text{ ма}; \quad \mathcal{J}'_2 = 5 \text{ ма}.$$

Один из них \mathcal{J}'_2 отличается от ранее найденного \mathcal{J}'_2 . Однако токи в каждой из ветвей будут иметь те же значения. Действительно,

$$I_1 = \mathcal{J}'_1 = 3 \text{ ма}; \quad I_2 = \mathcal{J}'_2 = 5 \text{ ма}; \quad I_3 = \mathcal{J}'_2 - J = 3 \text{ ма};$$

$$I_4 = \mathcal{J}'_1 + \mathcal{J}'_2 - J = 6 \text{ ма}; \quad I_5 = \mathcal{J}'_1 + \mathcal{J}'_2 = 8 \text{ ма}.$$

Решим задачу методом узловых потенциалов. Примем потенциал узла 4 равным нулю ($\varphi_4 = 0$), тогда потенциал узла 3 равен $\varphi_3 = E_1 = 100 \text{ в}$. Согласно (1.13) составим систему уравнений для узлов 1 и 2 (при этом учтем, что проводимость ветви, соединяющей узлы 1 и 2, $g_{12} = g_{21} = 0$):

$$\varphi_1 g_{11} - \varphi_2 g_{12} - \varphi_3 g_{13} = \left(\frac{1}{r_4} + \frac{1}{r_5} \right) \varphi_1 - E_1 \frac{1}{r_4} = J; \quad (1')$$

$$- \varphi_2 g_{21} + \varphi_2 g_{22} - \varphi_3 g_{23} = \left(\frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3} \right) \varphi_2 - E_1 \frac{1}{r_3} = E_2 \frac{1}{r_2} + E_3 \frac{1}{r_3}. \quad (2')$$

Решив эти уравнения, найдем потенциалы точек 1 и 2:

$$\varphi_1 = 64 \text{ в}; \quad \varphi_2 = 140 \text{ в}.$$

Применяя к отдельным ветвям закон Ома, найдем токи ветвей:

$$I_2 = \frac{\varphi_4 - \varphi_2 + E_2}{r_2} = \frac{0 - 140 + 150}{2} = 5 \text{ ма};$$

$$I_3 = \frac{\varphi_2 - \varphi_3 - E_3}{r_3} = \frac{140 - 100 - 28}{4} = 3 \text{ ма};$$

$$I_4 = \frac{\varphi_3 - \varphi_1}{r_4} = \frac{100 - 64}{6} = 6 \text{ ма}; \quad I_5 = \frac{\varphi_1 - \varphi_4}{r_5} = \frac{64 - 0}{8} = 8 \text{ ма}.$$

Ток, проходящий через источник E_1 , надо находить по первому закону Кирхгофа, примененному к узлам 3 или 4:

$$I_1 = I_4 - I_3 = 6 - 3 = 3 \text{ ма} \text{ или } I_1 = I_5 - I_2 = 8 - 5 = 3 \text{ ма}.$$

Проверка показывает, что первый закон Кирхгофа для узлов 1 и 2 соблюдается:

$$J = I_5 - I_4 = 8 - 6 = 2 \text{ ма} \text{ или } J = I_2 - I_3 = 5 - 3 = 2 \text{ ма}.$$

Сопоставление двух приведенных методов решения показывает, что хотя в обоих случаях приходится составлять одинаковое число уравнений (по два), второй метод проще, так как одно из уравнений (1) содержит лишь одну неизвестную величину.

Г. Метод наложения. Преобразование треугольника в звезду и обратно

1.49. Методом наложения рассчитать токи в схеме рис. 1.52, а, если $E_1 = 10$ в, $E_2 = 40$ в, $E_3 = 5$ в, $r_{10} = 5$ ом, $r_{20} = r_{30} = 2$ ом, $r_1 = 30$ ом, $r_2 = 3$ ом, $r_3 = 8$ ом.

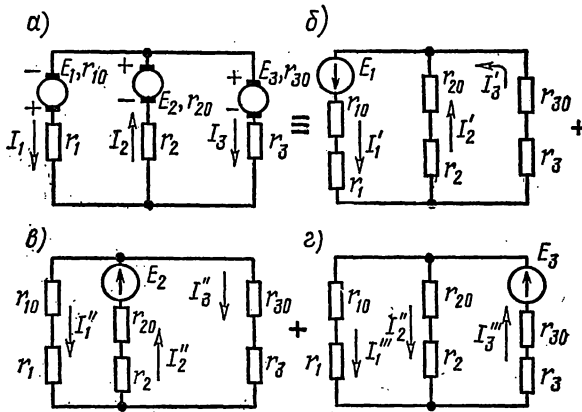


Рис. 1.52

Решение. Обозначим положительные направления токов исходной схемы на рис. 1.52, а. Предположим, что действует только э. д. с. E_1 , а э. д. с. E_2 и E_3 — недействующие (рис. 1.52, б).

Тогда

$$I'_1 = \frac{E_1}{r_{13}},$$

где

$$r_{13} = r_1 + r_{10} + \frac{(r_2 + r_{20})(r_3 + r_{30})}{r_2 + r_{20} + r_3 + r_{30}} = 35 + \frac{5 \cdot 10}{15} = \frac{115}{3} \text{ ом.}$$

Ток

$$I'_1 = 10 : \frac{115}{3} = \frac{6}{23} \text{ а.}$$

Токи в параллельных ветвях определяются по формуле (1.19):

$$I'_2 = I'_1 \frac{r_3 + r_{30}}{r_2 + r_{20} + r_3 + r_{30}} = \frac{6}{23} \cdot \frac{10}{15} = \frac{4}{23} \text{ а;}$$

$$I'_3 = I'_1 \frac{r_2 + r_{20}}{r_2 + r_{20} + r_3 + r_{30}} = \frac{6}{23} \cdot \frac{5}{15} = \frac{2}{23} \text{ а.}$$

Проведем расчет, предполагая, что действует э. д. с. E_2 , а э. д. с. E_1 и E_3 не действуют (рис. 1.52, в):

$$I_2'' = \frac{E_2}{r_{23}},$$

где

$$r_{23} = r_2 + r_{20} + \frac{(r_1 + r_{10})(r_3 + r_{30})}{r_1 + r_{10} + r_3 + r_{30}} = \frac{115}{9} \text{ ом};$$

$$I_2'' = 40: \frac{9}{115} = \frac{72}{23} \text{ а};$$

$$I_1'' = I_2'' \frac{r_3 + r_{30}}{r_1 + r_{10} + r_3 + r_{30}} = \frac{72}{23} \cdot \frac{10}{46} = \frac{16}{23} \text{ а};$$

$$I_3'' = I_2'' - I_1'' = \frac{72}{23} - \frac{16}{23} = \frac{56}{23} \text{ а}.$$

Аналогично рассчитаем величины токов при действии только одной э. д. с. E_3 (рис. 1.52, г):

$$r_{33} = r_3 + r_{30} + \frac{(r_1 + r_{10})(r_2 + r_{20})}{r_1 + r_{10} + r_2 + r_{20}} = \frac{115}{8} \text{ ом};$$

$$I_3''' = \frac{E_3}{r_{33}} = 5: \frac{115}{8} = \frac{8}{23} \text{ а};$$

$$I_1''' = \frac{1}{23} \text{ а}; \quad I_2''' = \frac{7}{23} \text{ а}.$$

Истинное значение тока в каждой ветви найдется как алгебраическая сумма токов, определяемых действием каждой э. д. с. в отдельности.

Ток в первой ветви

$$I_1 = I_1' + I_1'' + I_1''' = \frac{6}{23} + \frac{16}{23} + \frac{1}{23} = 1 \text{ а}.$$

Ток во второй ветви

$$I_2 = \frac{4}{23} + \frac{72}{23} - \frac{7}{23} = 3 \text{ а}.$$

Ток в третьей ветви

$$I_3 = -\frac{2}{23} + \frac{56}{23} - \frac{8}{23} = 2 \text{ а}.$$

1.50. Найти токи в ветвях цепи рис. 1.53. Задачу решить методами наложения, контурных токов и узловых потенциалов.

1.51. В схеме рис. 1.54, а методом наложения найти все токи. Даны: $E_1 = 96 \text{ в}$, $E_2 = 75 \text{ в}$, $r_3 = 3 \text{ ом}$, $r_4 = 15 \text{ ом}$, $r_5 = 10 \text{ ом}$, $r_6 = 6 \text{ ом}$.

Решение. Положим, что действует только э. д. с. E_1 , а э. д. с. E_2 не действует. В этом случае схема примет вид рис. 1.54, б. Так как внутреннее сопротивление источника напряжения E_2 равно нулю, то на его месте между точками b и d показано короткое замыкание. Для большей наглядности схему рис. 1.54, б можно нарисовать в виде схемы рис. 1.54, в.

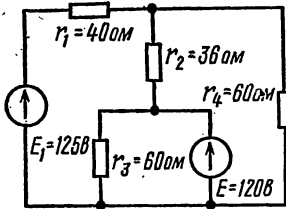


Рис. 1.53

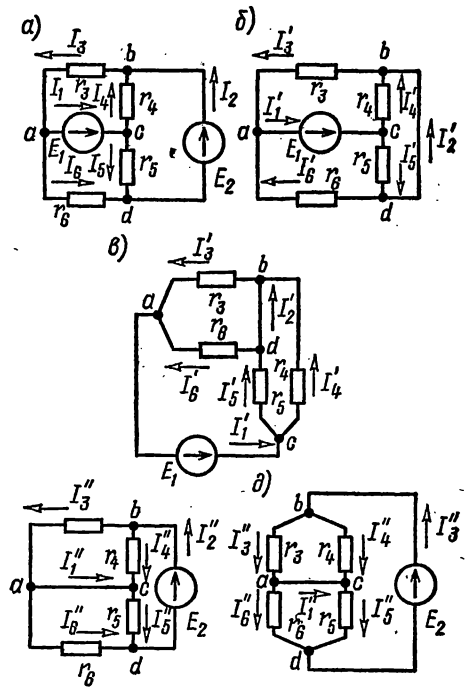


Рис. 1.54

Полное сопротивление этой схемы

$$r_{1э} = \frac{r_3 r_6}{r_3 + r_6} + \frac{r_4 r_5}{r_4 + r_5} = \frac{3 \cdot 6}{9} + \frac{15 \cdot 10}{25} = 8 \text{ ом.}$$

Определим все токи:

$$I'_1 = \frac{E_1}{r_{1э}} = \frac{96}{8} = 12 \text{ а;}$$

$$I'_3 = I'_1 \frac{r_6}{r_3 + r_6} = 12 \cdot \frac{6}{9} = 8 \text{ а; } I'_6 = I'_1 - I'_3 = 4 \text{ а;}$$

$$I'_4 = I'_1 \frac{r_5}{r_4 + r_5} = 12 \cdot \frac{10}{25} = 4,8 \text{ а; } I'_5 = I'_1 - I'_4 = 7,2 \text{ а;}$$

$$I'_2 = I'_3 - I'_4 = 8 - 4,8 = 3,2 \text{ а или } I'_2 = I'_5 - I'_6 = 3,2 \text{ а.}$$

Допустим, что действует только э. д. с. E_2 , а э. д. с. E_1 не действует (рис. 1.54, в). Схему рис. 1.54, в для большей наглядности можно представить в виде схемы рис. 1.54, д. Полное сопротивление схемы

$$r_{2э} = \frac{r_3 r_4}{r_3 + r_4} + \frac{r_5 r_6}{r_5 + r_6} = \frac{3 \cdot 15}{18} + \frac{6 \cdot 10}{16} = 6,25 \text{ ом.}$$

Вычислим:

$$I_2' = \frac{E_2}{r_{23}} = \frac{75}{6,25} = 12 \text{ а};$$

$$I_3'' = I_2'' \frac{r_4}{r_3 + r_4} = 12 \cdot \frac{15}{18} = 10 \text{ а}; \quad I_4'' = I_2'' - I_3'' = 2 \text{ а};$$

$$I_6'' = I_2'' \frac{r_6}{r_5 + r_6} = 12 \cdot \frac{10}{16} = 7,5 \text{ а}; \quad I_5'' = I_2'' - I_6'' = 4,5 \text{ а};$$

$$I_1' = I_3' - I_6' = 10 - 7,5 = 2,5 \text{ а}.$$

Складывая алгебраически токи, полученные от действия каждой э. д. с. в отдельности (см. рис. 1.54, б и в), найдем токи в каждой ветви исходной схемы (см. рис. 1.54, а):

$$I_1 = I_1' + I_1'' = 12 + 2,5 = 14,5 \text{ а}; \quad I_2 = I_2' + I_2'' = 3,2 + 12 = 15,2 \text{ а};$$

$$I_3 = I_3' + I_3'' = 8 + 10 = 18 \text{ а}; \quad I_4 = I_4' - I_4'' = 4,8 - 2 = 2,8 \text{ а};$$

$$I_5 = I_5' + I_5'' = 7,2 + 4,5 = 11,7 \text{ а}; \quad I_6 = I_6' - I_6'' = 7,5 - 4 = 3,5 \text{ а}.$$

1.52. Решить задачу 1.34 (см. рис. 1.40) методом наложения.

Решение. Вначале предположим, что действует только генератор напряжения с э. д. с. E_1 . В этом случае генератор тока следует считать недействующим, и в схеме надо оставить лишь его внутреннюю проводимость g_r (рис. 1.55, а). Для этой схемы рассчитаем токи. Сначала найдем полное сопротивление r_3' , которое является суммой сопротивления r_1 и параллельных сопротивлений r_2

$$\frac{1}{g_r};$$

$$r_3' = r_1 + \frac{1}{g_r + \frac{1}{r_2}} = \frac{31}{11} 10^3 \text{ ом}.$$

Находим:

$$I_1' = \frac{E_1}{r_3'} = \frac{2530}{31} 10^{-3} \text{ а};$$

$$I_2' = I_1' \frac{r_r}{r_r + r_2} = \frac{2300}{31} 10^{-3} \text{ а}; \quad I_1'' = I_1' - I_2' = \frac{230}{31} 10^{-3} \text{ а}.$$

Теперь допустим, что в цепи действует только генератор тока, при этом генератор напряжения следует считать недействующим ($E_1 = 0$) и в схеме надо оставить лишь его внутреннее сопротивление

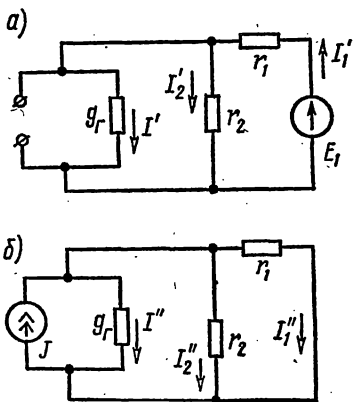


Рис. 1.55

ние (рис. 1.55, б). Имея в виду, что в параллельных ветвях токи распределяются прямо пропорционально их проводимостям [см. формулу (1.18)], найдем:

$$I_1'' = J \frac{g_1}{g_1 + g_2 + g_r} = 80 \cdot 10^{-3} \frac{10\text{f} \cdot 10^{-6}}{100 \cdot 10^{-6} + 50 \cdot 10^{-6} + 5 \cdot 10^{-6}} = \frac{1600}{31} \cdot 10^{-3} \text{ а};$$

$$I_2'' = J \frac{g_2}{g_1 + g_2 + g_r} = \frac{800}{31} \cdot 10^{-3} \text{ а}; \quad I'' = J \frac{g_r}{g_1 + g_2 + g_r} = \frac{80}{31} \cdot 10^{-3} \text{ а},$$

Искомые токи в каждой ветви найдем в результате наложения токов (с учетом их направлений), проходящих в каждой из ветвей, созданных генератором напряжения и генератором тока:

$$I_1 = I_1' - I_1'' = 30 \text{ ма}; \quad I_2 = I_2' + I_2'' = 100 \text{ ма}; \quad I = I' + I'' = 10 \text{ ма}.$$

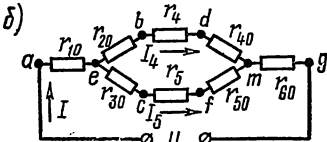
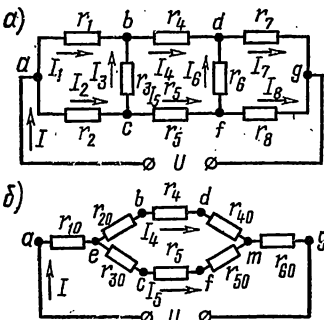


Рис. 1.56

1.53. Методом наложения решить задачу 1.35 (см. рис. 1.41).

1.54. Найти эквивалентное сопротивление цепи (рис. 1.56, а) и все токи, если $U = 114 \text{ в}$, $r_1 = 30 \text{ ом}$, $r_2 = r_3 = 10 \text{ ом}$, $r_4 = 26 \text{ ом}$, $r_5 = 11 \text{ ом}$, $r_6 = 10 \text{ ом}$, $r_7 = 40 \text{ ом}$, $r_8 = 50 \text{ ом}$. Задачу решить методом преобразования треугольника сопротивлений в эквивалентную звезду.

Решение. Заменим треугольники сопротивлений abc и dfg эквивалентными звездами (рис. 1.56, б). В преобразованной схеме появились новые узлы e и m . Обратим внимание на то, что в

преобразованной схеме сохраняются значения токов I , I_4 , I_5 в участках цепи, которые не подвергались преобразованию.

Подсчитаем сопротивления лучей звезды r_{10} , r_{20} и r_{30} , эквивалентной треугольнику abc сопротивлений r_1 , r_2 , r_3 [см. формулы (1.21)]:

$$r_{10} = \frac{r_1 r_2}{r_1 + r_2 + r_3} = 6 \text{ ом}; \quad r_{20} = \frac{r_1 r_3}{r_1 + r_2 + r_3} = 6 \text{ ом};$$

$$r_{30} = \frac{r_2 r_3}{r_1 + r_2 + r_3} = 2 \text{ ом}.$$

Определим сопротивления лучей звезды r_{40} , r_{50} , r_{60} , эквивалентной треугольнику dfg сопротивлений r_6 , r_7 , r_8 :

$$r_{40} = \frac{r_6 r_7}{r_6 + r_7 + r_8} = 4 \text{ ом}; \quad r_{50} = \frac{r_6 r_8}{r_6 + r_7 + r_8} = 5 \text{ ом};$$

$$r_{60} = \frac{r_7 r_8}{r_6 + r_7 + r_8} = 20 \text{ ом}.$$

Входное сопротивление всей схемы

$$r_9 = r_{10} + \frac{r_1 r_{11}}{r_1 + r_{11}} + r_{60} = 38 \text{ ом},$$

где

$$r_1 = r_{20} + r_4 + r_{40} = 36 \text{ ом}; \quad r_{11} = r_{30} + r_5 + r_{50} = 18 \text{ ом}.$$

Ток в неразветвленной части цепи

$$I = \frac{U}{r_9} = \frac{114}{38} = 3 \text{ а}.$$

Токи в параллельных ветвях:

$$I_4 = I \cdot \frac{r_{11}}{r_1 + r_{11}} = 3 \cdot \frac{18}{38 + 18} = 1 \text{ а};$$

$$I_5 = I - I_4 = 2 \text{ а}.$$

Теперь найдем токи в сопротивлениях заданной цепи. Для этого предварительно из схемы рис. 1.56, б определим напряжения между точками a и b , a и c , c и b , d и g , f и g , f и d :

$$U_{ab} = r_{10}I + r_{20}I_4 = 6 \cdot 3 + 6 \cdot 1 = 24 \text{ в};$$

$$U_{ac} = r_{10}I + r_{30}I_5 = 6 \cdot 3 + 2 \cdot 2 = 22 \text{ в};$$

$$U_{cb} = U_{ab} - U_{ac} = (\varphi_a - \varphi_b) - (\varphi_a - \varphi_c) = \varphi_c - \varphi_b = 24 - 22 = 2 \text{ в};$$

$$U_{dg} = r_{40}I_4 + r_{60}I = 4 \cdot 1 + 20 \cdot 3 = 64 \text{ в};$$

$$U_{fg} = r_{50}I_5 + r_{60}I = 5 \cdot 2 + 20 \cdot 3 = 70 \text{ в};$$

$$U_{fd} = U_{fg} - U_{dg} = (\varphi_f - \varphi_g) - (\varphi_d - \varphi_g) = \varphi_f - \varphi_d = 70 - 64 = 6 \text{ в}.$$

Искомые токи:

$$I_1 = \frac{U_{ab}}{r_1} = \frac{24}{30} = 0,8 \text{ а}; \quad I_2 = \frac{U_{ac}}{r_2} = \frac{22}{10} = 2,2 \text{ а};$$

$$I_3 = \frac{U_{cb}}{r_3} = \frac{2}{10} = 0,2 \text{ а}; \quad I_4 = 1 \text{ а};$$

$$I_5 = 2 \text{ а}; \quad I_6 = \frac{U_{fd}}{r_6} = \frac{6}{10} = 0,6 \text{ а};$$

$$I_7 = \frac{U_{dg}}{r_7} = \frac{64}{40} = 1,6 \text{ а}; \quad I_8 = \frac{U_{fg}}{r_8} = \frac{70}{50} = 1,4 \text{ а}.$$

1.55. В схеме рис. 1.57 найти токи, применив преобразование треугольника в звезду. Определить эквивалентное сопротивление между точками a и b . Определить показание ваттметра и убедиться в том, что оно равно сумме мощностей, расходуемых во всех сопротивлениях.

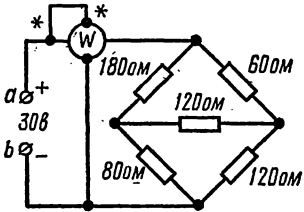


Рис. 1.57

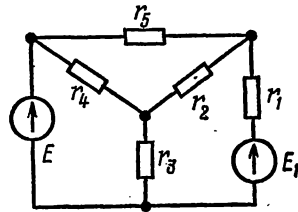


Рис. 1.58

1.56. Вычислить токи, проходящие во всех ветвях схемы рис. 1.58, если $E = 213$ в, $E_1 = 90$ в, $r_1 = 6$ ом, $r_2 = 40$ ом, $r_3 = 10$ ом, $r_4 = 100$ ом, $r_5 = 60$ ом.

Задачу решить преобразованием треугольника в эквивалентную звезду.

Определить входное сопротивление относительно ветви r_1 .

Д. Метод эквивалентного генератора.

Преобразование источников. Принцип взаимности

1.57. Для схемы рис. 1.59, а методом эквивалентного генератора напряжения найти ток в ветви с сопротивлением r_1 , если $E_1 = 18$ в, $E_2 = 21$ в, $r_{10} = 1$ ом, $r_1 = 2$ ом, $r_{20} = 2$ ом, $r_2 = 7$ ом, $r_3 = 6$ ом

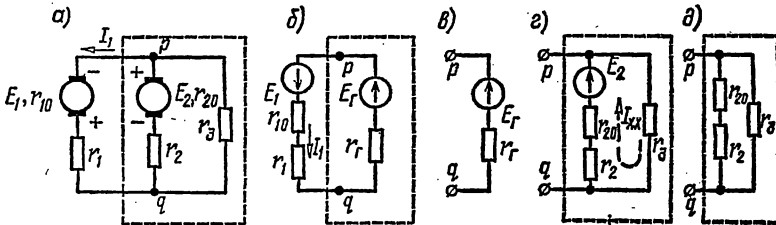


Рис. 1.59

Решение. Обозначим положительное направление искомого тока I_1 на исходной схеме (см. рис. 1.59, а). Рассмотрим часть схемы, подключенную к исследуемой первой ветви (обведенную штриховой линией), в качестве эквивалентного генератора напряжения с э. д. с. E_r и сопротивлением r_r . Нарисуем эквивалентную

электрическую схему с эквивалентным генератором напряжения (рис. 1.59, б).

На схеме произвольно выбрано положительное направление э. д. с. эквивалентного генератора E_r к точке p . Это позволяет записать для режима холостого хода эквивалентного генератора с отключенной первой ветвью (рис. 1.59, в)

$$E_r = U_{pq \text{ х.х}} = (\varphi_p - \varphi_q)_{\text{х.х.}}$$

Развернутая схема эквивалентного генератора в режиме холостого хода показана на рис. 1.59, г. Во внутренних ветвях генератора ток

$$I_{\text{х.х}} = \frac{E_2}{r_3 + r_2 + r_{20}} = \frac{21}{15} = 1,4 \text{ а.}$$

Напряжение холостого хода определяет э. д. с. генератора:

$$U_{pq \text{ х.х}} = r_3 I_{\text{х.х}} = 6 \cdot 1,4 = 8,4 \text{ в} = E_r.$$

Найдем сопротивление r_r эквивалентного генератора.

Для подсчета сопротивления генератора преобразуем его схему (см. рис. 1.59, г), заменив источник напряжения E_2 короткозамкнутым участком (рис. 1.59, д). Входное сопротивление последней схемы является сопротивлением эквивалентного генератора

$$r_r = \frac{(r_2 + r_{20}) r_3}{r_2 + r_{20} + r_3} = \frac{9 \cdot 6}{15} = 3,6 \text{ ом.}$$

Возвращаясь к схеме рис. 1.59, б, находим искомый ток по закону Ома:

$$I_1 = \frac{E_r + E_1}{r_r + r_{10} + r_1} = \frac{8,4 + 18}{3,6 + 1 + 2} = 4 \text{ а.}$$

1.58. Методами эквивалентного генератора напряжения и эквивалентного генератора тока найти ток в ветви r_5 , если $E_1 = E_2 = 20 \text{ в}$, $r_1 = r_2 = 40 \text{ ом}$, $r_3 = 10 \text{ ом}$, $r_4 = 160 \text{ ом}$, $r_5 = 20 \text{ ом}$ (рис. 1.60, а).

Решение. Расчет методом ЭГН. Отключим ветвь с r_5 (рис. 1.60, б) и найдем параметры ЭГН с э. д. с. E_r , т. е. напряжение $U_{ab \text{ х.х}}$ холостого хода между точками a и b и r_r — сопротивление

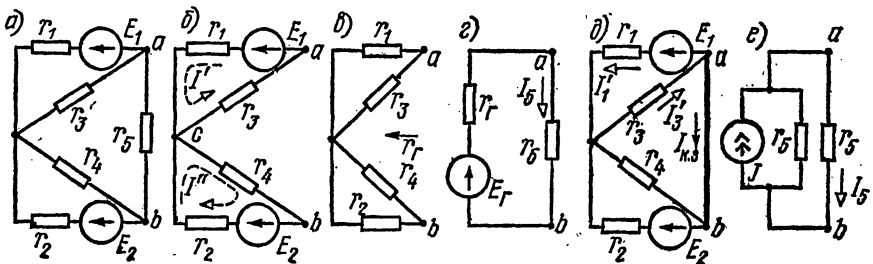


Рис. 1.60

ние схемы рис. 1.60, в между точками a и b в режиме холостого хода при закороченных э. д. с. E_1 и E_2 . Схема эквивалентного генератора напряжения приведена на рис. 1.60 з. Э. д. с. эквивалентного генератора и его сопротивление равны:

$$U_{ab \text{ х. х}} = E_{\Gamma} = -I' r_3 + I'' r_4 = -\frac{E_1}{r_1 + r_3} r_3 + \frac{E_2}{r_2 + r_4} r_4 = 12 \text{ в,}$$

$$r_{\Gamma} = \frac{r_1 r_3}{r_1 + r_3} + \frac{r_2 r_4}{r_2 + r_4} = 40 \text{ ом.}$$

Искомый ток согласно формуле (1.24)

$$I_5 = \frac{E_{\Gamma}}{r_{\Gamma} + r_5} = \frac{12}{40 + 20} = 0,2 \text{ а.}$$

При расчете методом ЭГТ ветвь r_5 закорачиваем (рис. 1.60, д). Ток $I_{к.з.}$, проходящий по закороченной ветви ab , является током эквивалентного генератора тока ($I_{к.з.} = J$). Найдем его. Это можно сделать, рассчитав двухузловую схему рис. 1.60, д методом узловых потенциалов. Приняв потенциал точек a и b равным нулю ($\varphi_a = \varphi_b = 0$), найдем

$$\varphi_c = \frac{E_1 \frac{1}{r_1} + E_2 \frac{1}{r_2}}{\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3} + \frac{1}{r_4}} = 6,4 \text{ в.}$$

Для определения тока $I_{к.з.} = J$ вычисляем I'_1 и I'_3 и по первому закону Кирхгофа находим

$$I_{к.з.} = J = I'_3 - I'_1 = \frac{\varphi_c - \varphi_a}{r_3} - \frac{\varphi_a - \varphi_c + E_1}{r_1} = \frac{6,4}{10} - \frac{13,6}{40} = 0,3 \text{ а.}$$

Сопротивление эквивалентного генератора тока r_{Γ} равно сопротивлению эквивалентного генератора напряжения; однако его можно найти по (1.25):

$$r_{\Gamma} = \frac{E_{\Gamma}}{I_{к.з.}} = \frac{12}{0,3} = 40 \text{ ом.}$$

Из схемы эквивалентного генератора тока (рис. 1.60, е) по формуле (1.26) находим искомый ток:

$$I_5 = J \frac{r_{\Gamma}}{r_{\Gamma} + r_5} = 0,3 \frac{40}{40 + 20} = 0,2 \text{ а.}$$

Получили тот же результат, что и по методу ЭГН.

1.59. Методом ЭГН найти ток I_5 (рис. 1.61, а), проходящий через сопротивление r_5 , если $E = 120 \text{ в}$, $r_1 = 60 \text{ ом}$, $r_2 = 15 \text{ ом}$, $r_3 = 90 \text{ ом}$, $r_4 = 60 \text{ ом}$, $r_5 = 12 \text{ ом}$. Тем же методом определить ток в сопротивлении r_4 .

Решение. Обозначим на схеме рис. 1.61, а произвольное положительное направление искомого тока I_5 . Часть схемы (внешнюю

к исследуемой ветви r_5) рассмотрим в виде некоторого генератора напряжения E_r , r_r . Стрелку э. д. с. E_r произвольно направим к точке c (рис. 1.61, б). Таким образом, э. д. с. генератора определится напряжением холостого хода:

$$E_r = U_{cd \text{ х. х}} = (\varphi_c - \varphi_d)_{\text{х. х.}}$$

На развернутой схеме генератора в режиме холостого хода (рис. 1.61, в) обозначим токи в ветвях $I_{0 \text{ х. х.}}$, $I_{1 \text{ х. х.}}$, $I_{3 \text{ х. х.}}$.

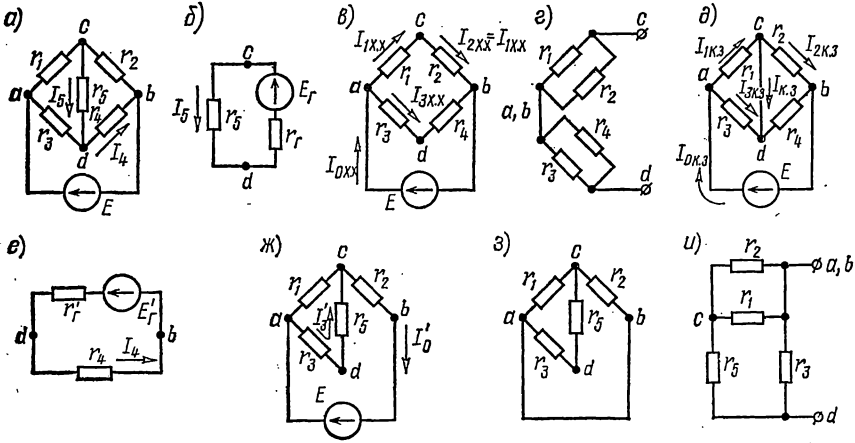


Рис. 1.61

По закону Ома,

$$I_{1 \text{ х. х.}} = \frac{E}{r_1 + r_2} = \frac{120}{75} = 1,6 \text{ а;}$$

$$I_{3 \text{ х. х.}} = \frac{E}{r_3 + r_4} = \frac{120}{150} = 0,8 \text{ а;}$$

$$(\varphi_a - \varphi_c)_{\text{х. х.}} = U_{ac \text{ х. х.}} = r_1 I_{1 \text{ х. х.}} = 60 \cdot 1,6 = 96 \text{ в;}$$

$$(\varphi_a - \varphi_d)_{\text{х. х.}} = U_{ad \text{ х. х.}} = r_3 I_{3 \text{ х. х.}} = 90 \cdot 0,8 = 72 \text{ в.}$$

Таким образом, э. д. с. эквивалентного генератора напряжения

$$E_r = (\varphi_c - \varphi_d)_{\text{х. х.}} = (\varphi_c - \varphi_a + \varphi_a - \varphi_d)_{\text{х. х.}} = (\varphi_a - \varphi_d)_{\text{х. х.}} - (\varphi_a - \varphi_c)_{\text{х. х.}} = 72 - 96 = -24 \text{ в.}$$

Найдем сопротивление ЭГН двумя способами:

1. Путем непосредственного расчета по схеме. Для этого в схеме рис. 1.61, в источник напряжения заменим короткозамкнутым участком. После этого схему рис. 1.61, в нарисуем в виде рис. 1.61, з.

Сопrotивление генератора r_r равно сопротивлению цепи между точками c и d :

$$r_r = \frac{r_1 r_2}{r_1 + r_2} + \frac{r_3 r_4}{r_3 + r_4} = \frac{60 \cdot 15}{75} + \frac{90 \cdot 60}{150} = 48 \text{ ом.}$$

2. Путем вычисления отношения э. д. с. эквивалентного генератора к току короткого замыкания. Для этого надо в схеме рис. 1.61, *б* замкнуть точки c и d накоротко, вычислить ток $I_{\text{к.з}}$, протекающий через короткозамкнутый участок (рис. 1.61, *д*), и найти сопротивление короткого замыкания по формуле (1.25). Источник напряжения E в короткозамкнутой схеме рис. 1.61, *д* нагружаем на эквивалентное сопротивление

$$r_э = \frac{r_1 r_3}{r_1 + r_3} + \frac{r_2 r_4}{r_2 + r_4} = \frac{60 \cdot 90}{150} + \frac{15 \cdot 60}{75} = 48 \text{ ом.}$$

Ток источника напряжения

$$I_{\text{ок.э}} = \frac{E}{r_э} = \frac{120}{48} = 2,5 \text{ а.}$$

Токи в ветвях:

$$I_{1\text{к.з}} = I_{\text{ок.э}} \frac{r_3}{r_1 + r_3} = 2,5 \cdot \frac{90}{150} = 1,5 \text{ а;}$$

$$I_{2\text{к.з}} = I_{\text{ок.э}} \frac{r_4}{r_2 + r_4} = 2,5 \cdot \frac{60}{75} = 2 \text{ а.}$$

Отсюда

$$I_{\text{к.з}} = I_{1\text{к.з}} - I_{2\text{к.з}} = -0,5 \text{ а.}$$

Сопротивление генератора

$$r_r = \frac{E_r}{I_{\text{к.з}}} = \frac{-24}{-0,5} = 48 \text{ ом.}$$

Значения сопротивления генератора, полученные этими способами, одинаковы.

Возвращаясь к схеме рис. 1.61, *б*, находим искомый ток I_b по закону Ома:

$$I_b = \frac{E_r}{r_b + r_r} = \frac{-24}{12 + 48} = -0,4 \text{ а.}$$

Таким образом, ток в сопротивлении r_b течет от точки d к точке c и равен $0,4 \text{ а}$.

Расчет тока в сопротивлении r_4 методом эквивалентного генератора напряжения проводится аналогично. Заменяем часть схемы, подключенную к точкам d и b ветви с сопротивлением r_4 , эквивалентным генератором E'_r , r'_r (рис. 1.61, *е*). Э. д. с. генератора совпадает с напряжением в режиме холостого хода:

$$E'_r = U'_{db \text{ х.х.}}$$

Для определения этого напряжения рассчитываем вначале токи I'_3 и I'_0 в развернутой схеме генератора в режиме холостого хода (рис. 1.61, ж):

$$I'_0 = \frac{E}{r_2 + \frac{r_1(r_3 + r_5)}{r_1 + r_3 + r_5}} = \frac{216}{95} \text{ а}; \quad I'_3 = I'_0 \frac{r_1}{r_1 + r_3 + r_5} = \frac{16}{19} \text{ а}.$$

Отсюда находим э. д. с. генератора:

$$E'_r = U'_{db \text{ x.x}} = r_5 I'_3 + r_2 I'_0 = \frac{840}{19} \text{ в}.$$

Для определения сопротивления генератора рассмотрим соответствующую пассивную схему (в схеме генератора источник напряжения заменен короткозамкнутым отрезком), показанную на рис. 1.61, з. Для ясности эта схема показана в виде рис. 1.61, и.

Сопротивление генератора, равное входному сопротивлению последней схемы относительно зажимов d и b ,

$$r_r = \frac{r_3 \left(r_5 + \frac{r_1 r_2}{r_1 + r_2} \right)}{r_3 + r_5 + \frac{r_1 r_2}{r_1 + r_2}} = \frac{360}{19} \text{ ом}.$$

Наконец находим искомый ток I_4 по схеме эквивалентного генератора (см. рис. 1.61, е):

$$I_4 = \frac{E'_r}{r_r + r_4} = \frac{\frac{840}{19}}{\frac{360}{19} + 60} = 0,56 \text{ а}.$$

1.60. По данным задачи 1.58 для схемы рис. 1.60 методом ЭГН или ЭГТ найти ток в ветви с сопротивлением r_3 .

1.61. Считая зажимы a и b входными клеммами схем (рис. 1.62, а—д), определить параметры E_r и r_r соответствующих эквивалентных генераторов (рис. 1.62, е).

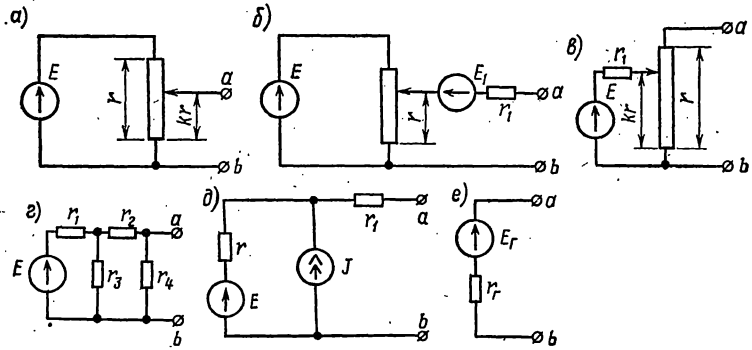


Рис. 1.62

1.62. Для экспериментального исследования двухполюсника собрана схема рис. 1.63. Требуется найти э. д. с. и сопротивление генераторов, эквивалентных исследовавшимся двухполюсникам, по данным двух опытов (для каждого двухполюсника): 1) $U_1 = 20$ в; $I_1 = 2$ а; $U_2 = 30$ в; $I_2 = 3$ а; 2) $U_1 = 20$ в; $I_1 = 12$ а; $U_2 = 30$ в; $I_2 = 14$ а; 3) $U_1 = 20$ в; $I_1 = 3$ а; $U_2 = 30$ в; $I_2 = 5$ а.

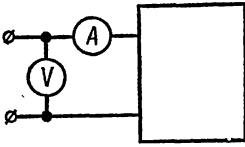


Рис. 1.63

$= 6$ ом, $r_2 = 4$ ом.

Решение. Задачу решаем двумя способами: 1) методом ЭГТ и 2) методом преобразования.

1.63. Определить ток I_3 в ветви с сопротивлением $r_3 = 12$ ом (рис. 1.64, а). Э. д. с. генераторов напряжения $E_1 = 120$ в, $E_2 = 100$ в, их внутренние сопротивления $r_1 =$

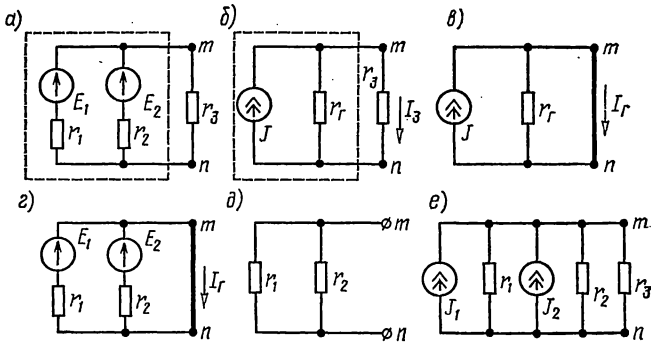


Рис. 1.64

1. Часть схемы, подключенную к зажимам m и n ветви с сопротивлением r_3 (на рис. 1.64, а обведена штриховой линией), можно рассматривать в виде эквивалентного генератора тока J , r_Γ (на рис. 1.64, б обведен штриховой линией). Ток генератора J определяется по опыту короткого замыкания (рис. 1.64, в).

На развернутой схеме генератора (рис. 1.64, г)

$$J = \frac{E_1}{r_1} + \frac{E_2}{r_2} = 45 \text{ а,}$$

а внутреннее сопротивление генератора тока равно сопротивлению пассивной цепи между зажимами m и n при разомкнутой ветви r_3 (рис. 1.64, д):

$$r_\Gamma = \frac{r_1 r_2}{r_1 + r_2} = 2,4 \text{ ом.}$$

По схеме эквивалентного генератора тока, представленной на рис. 1.64, б, находим искомый ток:

$$I_3 = J \frac{r_\Gamma}{r_\Gamma + r_3} = 45 \cdot \frac{2,4}{2,4 + 12} = 7,5 \text{ а.}$$

2. При решении методом преобразования заменяем генераторы напряжения схемы рис. 1.64, а эквивалентными генераторами тока (рис. 1.64, е). Токи генераторов:

$$J_1 = \frac{E_1}{r_1} = \frac{120}{6} = 20 \text{ а}; \quad J_2 = \frac{E_2}{r_2} = \frac{100}{4} = 25 \text{ а}.$$

Преобразуем полученную схему, заменив параллельные сопротивления r_1 и r_2 эквивалентным сопротивлением

$$r_r = \frac{r_1 r_2}{r_1 + r_2} = \frac{6 \cdot 4}{6 + 4} = 2,4 \text{ ом},$$

и параллельные источники тока J_1 и J_2 — одним эквивалентным источником тока J ; получим схему рис. 1.64, б, причем

$$J = J_1 + J_2 = 20 + 25 = 45 \text{ а}.$$

Ток J последней схемы разветвляется по сопротивлениям r_r и r_3

$$I_3 = J \frac{r_r}{r_r + r_3} = 45 \cdot \frac{2,4}{2,4 + 12} = 7,5 \text{ а}.$$

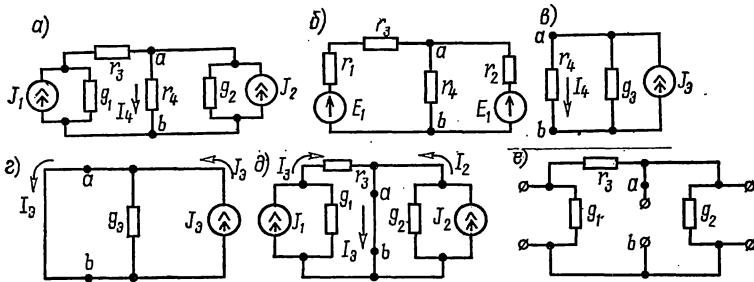


Рис. 1.65

1.64. Два генератора тока соединены в цепь рис. 1.65, а. Ток первого генератора $J_1 = 3 \text{ ма}$, его внутренняя проводимость $g_1 = 0,05 \text{ см}$, второго генератора $J_2 = 2 \text{ ма}$, $g_2 = 0,01 \text{ см}$. Сопротивления $r_3 = 5 \text{ ом}$, $r_4 = 30 \text{ ом}$. Определить ток, проходящий через сопротивление r_4 .

Решение. 1. Преобразуем генераторы тока в эквивалентные генераторы напряжения (рис. 1.65, б). Э. д. с. и внутренние сопротивления генераторов напряжения находим по формулам (1.4):

$$E_1 = \frac{J_1}{g_1} = \frac{3}{0,05} = 60 \text{ мв}; \quad r_1 = \frac{1}{g_1} = \frac{1}{0,05} = 20 \text{ ом}.$$

$$E_2 = \frac{J_2}{g_2} = \frac{2}{0,01} = 200 \text{ мв}; \quad r_2 = \frac{1}{g_2} = 100 \text{ ом}.$$

Далее любым способом находим искомый ток. Выберем метод узловых потенциалов. Обозначим $g'_1 = \frac{1}{r_1 + r_3}$, находим:

$$U_{ab} = \frac{E_1 g'_1 + E_2 g_2}{g'_1 + g_2 + g_4} = \frac{60 \frac{1}{20+5} + 200 \frac{1}{100}}{\frac{1}{20+5} + \frac{1}{100} + \frac{1}{30}} = 52,8 \text{ мв};$$

$$I_4 = \frac{U_{ab}}{r_4} = \frac{52,8}{30} = 1,76 \text{ ма}.$$

2. Решим задачу методом эквивалентного генератора тока. Для этого заменим всю цепь, за исключением ветви с r_4 , эквивалентным генератором тока (рис. 1.65, в). Для определения его параметров J_3 и g_3 сначала исключим ветвь с r_4 , а точки a и b замкнем (рис. 1.65, г). Найдем ток короткого замыкания, равный J_3 . Для этого предварительно определим токи I_3 и I_2 (рис. 1.65, д):

$$I_3 = J_1 \frac{\frac{1}{g_1}}{\frac{1}{g_1} + r_3} = 2,4 \text{ ма}; \quad I_2 = J_2 = 2 \text{ ма}.$$

Следовательно, ток эквивалентного генератора тока

$$J_3 = I_3 + I_2 = 2,4 + 2 = 4,4 \text{ ма}.$$

Определим внутреннюю проводимость эквивалентного генератора тока g_3 между точками a и b . Для этого исключим генераторы тока и оставим лишь их внутренние проводимости (рис. 1.65, е):

$$g_3 = g_{ab} = \frac{1}{r_3 + \frac{1}{g_1}} + g_2 = \frac{1}{5 + 20} + 0,01 = 0,05 \text{ см}.$$

В искомой ветви (см. рис. 1.65, в) ток

$$I_4 = J_3 \frac{\frac{1}{g_3}}{\frac{1}{g_3} + r_4} = 4,4 \frac{10}{20 + 30} = 1,76 \text{ ма}.$$

1.65. Вычислить ток в ветви с r_5 задачи 1.40 (см. рис. 1.45), пользуясь преобразованием схем с источниками тока в эквивалентные схемы с источниками напряжения, и наоборот.

Решение. 1. Для ясности перерисуем схему рис. 1.45 в виде рис. 1.66, а. Эквивалентность исходной и новой схем очевидна: к соответствующим узлам обеих схем подходят одинаковые токи. В частности, результирующий ток, подводимый к узлу a , равен нулю. Преобразуем генераторы тока J последней схемы в генераторы с э. д. с. E_1 и E_3 (рис. 1.66, б):

$$E_1 = Jr_1 = 50 \cdot 10^{-3} \cdot 5 \cdot 10^3 = 250 \text{ в.}$$

$$E_3 = Jr_3 = 50 \cdot 10^{-3} \cdot 16 \cdot 10^3 = 800 \text{ в.}$$

Складывая последние элементы ветвей, приводим рис. 1.66, б к виду рис. 1.66, в, для которого:

$$E_6 = E - E_1 = 60 - 250 = -190 \text{ в.}$$

$$r_6 = r_1 + r_2 = 9 \text{ ком.}; \quad r_7 = r_3 + r_4 = 18 \text{ ком.}$$

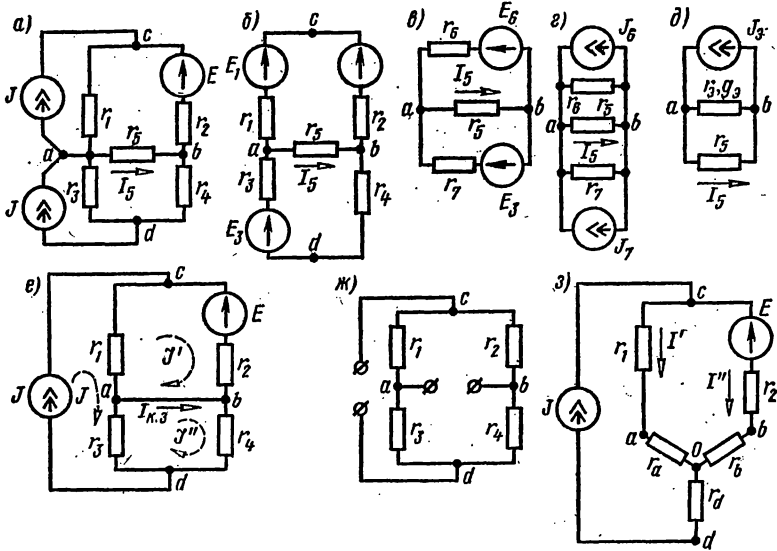


Рис. 1.66

Преобразуем схему рис. 1.66, в в схему с источниками тока (рис. 1.66, г):

$$J_6 = \frac{E_6}{r_6} = -\frac{190}{9} = -21,1 \text{ ма.}; \quad J_7 = \frac{E_7}{r_7} = \frac{800}{18} = 44,4 \text{ ма.}$$

Сложив параллельные элементы, преобразуем схему рис. 1.66, г к виду схемы рис. 1.66, д:

$$I_9 = I_6 + I_7 = -21,1 + 44,4 = 23,3 \text{ ма.}$$

$$r_9 = \frac{r_6 r_7}{r_6 + r_7} = \frac{9 \cdot 18}{9 + 18} = 6 \text{ ком.}$$

В ветвь r_6 отводится часть тока I_9 , равная

$$I_6 = I_9 \frac{r_9}{r_9 + r_6} = 23,3 \cdot \frac{6}{14} = 10 \text{ ма.}$$

2. Метод ЭГТ. Определим ток J_3 эквивалентного генератора тока, который равен току $I_{к.3}$ при замыкании накоротко сопротивления r_5 (рис. 1.66, е). Ток $I_{к.3}$ можно вычислить различными способами, например методом контурных токов:

$$\begin{aligned}(r_1 + r_2) \mathcal{J}' - r_1 J &= -E; \\ (r_3 + r_4) \mathcal{J}'' - r_3 J &= 0.\end{aligned}$$

Подставляя числовые значения и решая эти уравнения, найдем:

$$\mathcal{J}' = 21,1 \text{ ма}; \quad \mathcal{J}'' = 44,4 \text{ ма}; \quad I_3 = I_{к.3} = \mathcal{J}'' - \mathcal{J}' = 23,3 \text{ ма}.$$

Затем рассчитаем внутреннюю проводимость g_3 генератора тока. Она равна проводимости пассивной цепи между зажимами a и b при разомкнутой ветви с r_5 (рис. 1.66, ж); ветвь, содержащая генератор тока, показана разомкнутой, так как внутреннее сопротивление идеального генератора тока бесконечно велико:

$$g_3 = \frac{1}{r_1 + r_2} + \frac{1}{r_3 + r_4} = \frac{1}{6 \cdot 10^3} \text{ см}; \quad r_3 = \frac{1}{g_3} = 6 \cdot 10^3 \text{ ом}.$$

На рис. 1.66, д приведена схема эквивалентного генератора тока относительно зажимов a и b . Из нее находим искомый ток:

$$I_b = I_3 \frac{r_3}{r_5 + r_3} = 23,3 \cdot 10^{-3} \frac{6 \cdot 10^3}{14 \cdot 10^3} = 10 \cdot 10^{-3} \text{ а} = 10 \text{ ма}.$$

3. Преобразуем треугольник сопротивлений $r_3 r_4 r_5$ в эквивалентную звезду (рис. 1.66, з). Ее сопротивления [см. формулы (1.21)] равны:

$$r_a = \frac{r_3 r_5}{r_3 + r_4 + r_5} = \frac{64}{13} \text{ ком}; \quad r_b = \frac{8}{13} \text{ ком}; \quad r_d = \frac{16}{13} \text{ ком}.$$

Полученная схема содержит всего два узла 0 и c . Приняв потенциал узловой точки 0 равным нулю ($\varphi_0 = 0$), вычислим потенциал точки c [см. формулу (1.14)]:

$$\varphi_c = \frac{E \frac{1}{r_2 + r_b} + J}{\frac{1}{r_1 + r_a} + \frac{1}{r_2 + r_b}} = 198 \text{ в}.$$

Обращаем внимание на то, что в знаменателе последнего выражения отсутствует слагаемое, учитывающее сопротивление r_d , это связано с тем, что сопротивление источника тока бесконечно велико и прибавление к нему конечного сопротивления r_d не изменило бы бесконечно большое сопротивление ветви источника тока.

По закону Ома найдем токи:

$$I' = \frac{\varphi_c - \varphi_0}{r_1 + r_a} = 20 \text{ ма}, \quad I'' = \frac{\varphi_c - \varphi_0 - E}{r_2 + r_b} = 30 \text{ ма}$$

и напряжение между точками a и b :

$$U_{ab} = I'r_a - I''r_b = 80 \text{ в.}$$

Наконец находим искомый ток.

$$I_5 = \frac{U_{ab}}{r_5} = 10 \text{ ма.}$$

1.66. Для цепи рис. 1.49 по данным задачи 1.46 найти ток в r_4 , пользуясь преобразованиями генераторов тока в генераторы напряжения, и наоборот.

1.67. Цепь рис. 1.67, содержащая два генератора тока ($J_1 = 30 \text{ ма}$, $g_1 = 1 \cdot 10^{-3} \text{ сим}$, $J_2 = 20 \text{ ма}$, $g_2 = 1,5 \cdot 10^{-3} \text{ сим}$) и генератор напряжения ($E_3 = 45 \text{ в}$, $r_3 = 100 \text{ ом}$), включена на нагрузочное сопротивление $r_H = 20 \text{ ом}$. Определить ток I_H .

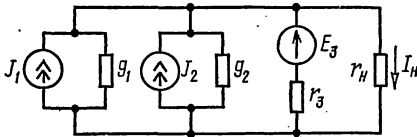


Рис. 1.67

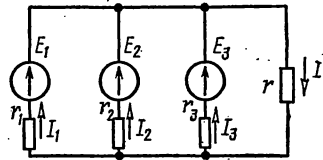


Рис. 1.68

1.68. Три генератора напряжений, э. д. с. которых $E_1 = 48 \text{ в}$, $E_2 = 45 \text{ в}$, $E_3 = 45 \text{ в}$, а внутренние сопротивления $r_1 = 1,2 \text{ ом}$, $r_2 = 1 \text{ ом}$, $r_3 = 1,5 \text{ ом}$, работают параллельно на общую нагрузку, сопротивление которой $r = 4,2 \text{ ом}$ (рис. 1.68). Произвести замену заданных генераторов напряжений одним эквивалентным, определив его э. д. с. и внутреннее сопротивление. Чему равны токи, протекающие через каждый генератор и нагрузку?

Решение. Значения э. д. с. и внутреннего сопротивления эквивалентного генератора напряжения могут быть определены по формулам (1.27):

$$E_3 = U_{ab} = \frac{E_1 \frac{1}{r_1} + E_2 \frac{1}{r_2} + E_3 \frac{1}{r_3}}{\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3}} = \frac{115}{2,5} = 46 \text{ в;}$$

$$\frac{1}{r_3} = \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3} = 2,5 \text{ сим; } r_3 = 0,4 \text{ ом.}$$

Ток в нагрузке

$$I = \frac{E_3}{r + r_3} = \frac{46}{4,2 + 0,4} = 10 \text{ а.}$$

Напряжение на нагрузке

$$U_{ab} = Ir = 10 \cdot 4,2 = 42 \text{ в.}$$

Таково же напряжение на каждой из параллельных ветвей. Ток в каждой из ветвей найдем по формуле (1.29):

$$I_1 = \frac{E_1 - U_{ab}}{r_1} = 5 \text{ а}; \quad I_2 = \frac{E_2 - U_{ab}}{r_2} = 3 \text{ а}; \quad I_3 = \frac{E_3 - U_{ab}}{r_3} = 2 \text{ а}.$$

Проверка показывает, что ток в нагрузке I равен сумме токов I_1 , I_2 и I_3 .

1.69. Воспользовавшись принципом взаимности, найти показания амперметров A_4 и A_5 (рис. 1.69). Даны: $E = 30 \text{ в}$, $r_1 = 6 \text{ ком}$, $r_2 = 4 \text{ ком}$, $r_3 = 8 \text{ ком}$, $r_4 = r_5 = 2 \text{ ком}$.

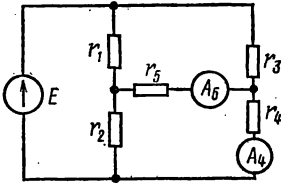


Рис. 1.69

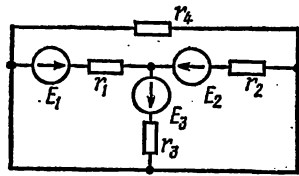


Рис. 1.70

1.70. В схеме рис. 1.70 простейшим способом вычислить токи. Даны: $E_1 = 100 \text{ в}$, $E_2 = 80 \text{ в}$, $E_3 = 40 \text{ в}$, $r_1 = r_2 = 10 \text{ ом}$, $r_3 = 20 \text{ ом}$, $r_4 = 15 \text{ ом}$.

1.71. По данным задачи 1.50 (см. рис. 1.53) методом эквивалентного генератора определить ток в сопротивлении r_4 .

Е. Условие выделения максимальной мощности в нагрузке

1.72. В схеме рис. 1.71, а известны: $E = 100 \text{ в}$, $r_1 = 10 \text{ ом}$, $r_2 = 40 \text{ ом}$, $r_3 = 12 \text{ ом}$. При каком значении нагрузочного сопротивления r_H в нём выделится максимальная мощность и чему она равна?

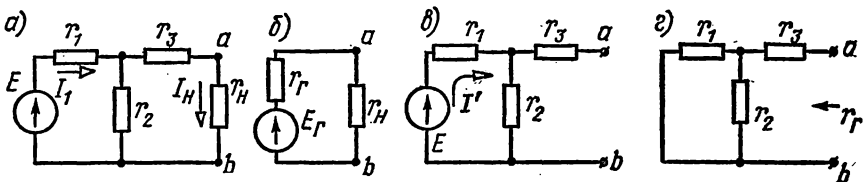


Рис. 1.71

Определить отношение мощности, расходуемой в r_H к доставляемой источником. Вычислить коэффициент передачи, т. е. отношение напряжения на r_H к э. д. с. E .

Решение. 1. Рассчитаем ток I_H , проходящий через сопротивление r_H , и расходуемую в нем мощность P_H :

$$I_H = I_1 \frac{r_2}{r_2 + r_3 + r_H} = \frac{E}{r_1 + \frac{r_2(r_3 + r_H)}{r_2 + r_3 + r_H}} \cdot \frac{r_2}{r_2 + r_3 + r_H} =$$

$$= \frac{Er_2}{r_1(r_2 + r_3 + r_H) + r_2(r_3 + r_H)}; \quad (1)$$

$$P_H = I_H^2 r_H = \frac{E^2 r_2^2 r_H}{[r_1(r_2 + r_3 + r_H) + r_2(r_3 + r_H)]^2}. \quad (2)$$

Для расчета максимальной мощности, выделяемой в нагрузке, возьмем производную от P_H по r_H и приравняем ее нулю. В результате получим

$$r_H = \frac{r_1 r_2 + r_1 r_3 + r_2 r_3}{r_1 + r_2} = \frac{10 \cdot 40 + 10 \cdot 12 + 40 \cdot 12}{50} = 20 \text{ ом.}$$

Подставляя найденное значение r_H в (2), получим искомую величину максимальной мощности:

$$P_{H \max} = \frac{100^2 \cdot 40^2 \cdot 20}{(10 \cdot 72 + 40 \cdot 32)^2} = 80 \text{ вт.}$$

Вычислим мощность P , доставляемую источником э. д. с.:

$$P = EI_1 = \frac{E}{r_1 + \frac{r_2(r_3 + r_H)}{r_2 + r_3 + r_H}} = 360 \text{ вт.}$$

Искомое отношение мощностей

$$\eta = \frac{P_{H \max}}{P} = \frac{80}{360} = 0,222.$$

Напряжение на нагрузочном сопротивлении

$$U_H = I_H r_H = 2 \cdot 20 = 40 \text{ в.}$$

Коэффициент передачи

$$K = \frac{U_H}{E} = \frac{40}{100} = 0,4.$$

2. Часть схемы левее зажимов ab заменим эквивалентным генератором напряжения с э. д. с. E_r и сопротивлением r_r (рис. 1.71, б). Найдем E_r и r_r . Для вычисления E_r отключим ветвь r_H (рис. 1.71, в) и определим напряжение $U_{ab \text{ х. х}}$ между точками a и b в режиме холостого хода, которая численно равна E_r :

$$U_{ab \text{ х. х}} = E_r = I' r_2 = \frac{E r_2}{r_1 + r_2} = \frac{100 \cdot 40}{50} = 80 \text{ в.}$$

Сопrotивление r_r равно сопrotивлению цепи между зажимами a и b при закороченном источнике э. д. с. E (рис. 1.71, z):

$$r_r = r_3 + \frac{r_1 r_2}{r_1 + r_2} = 12 + \frac{10 \cdot 40}{50} = 20 \text{ ом.}$$

Как известно, в схеме, эквивалентной заданной (см. рис. 1.71, b), максимальная мощность выделится, если сопrotивление нагрузки r_n будет равно внутреннему сопrotивлению генератора, т. е. при $r_n = r_r = 20 \text{ ом}$. Следовательно, получено то же значение, которое было найдено. Максимальная мощность

$$P_{n \max} = I_n^2 r_n = \left(\frac{E_r}{r_r + r_n} \right)^2 r_n = \left(\frac{80}{40} \right)^2 20 = 80 \text{ вт.}$$

1.73. К зажимам 1-1' цепи рис. 1.14, a и b подведено напряжение $U_1 = 72 \text{ в}$. При какой величине сопrotивления r_2 , подключенном к зажимам 2-2', в нем выделится максимальная мощность и чему она равна? Определить отношение мощностей, расходуемой в сопrotивлении r_2 к доставляемой источником. Вычислить коэффициент передачи, т. е. отношение напряжения на r_2 к подведенному.

Ж. Входные и взаимные проводимости ветвей

1.74. Определить входные и взаимные проводимости ветвей схемы рис. 1.72, a , необходимые для вычисления токов, если $r_1 = 15 \text{ ом}$, $r_2 = 12 \text{ ом}$, $r_3 = 10 \text{ ом}$, $r_4 = 40 \text{ ом}$, $r_5 = 20 \text{ ом}$, $E_1 = 25 \text{ в}$, $E_2 = 20 \text{ в}$, $E_3 = 50 \text{ в}$. Используя найденные значения проводимостей, вычислить все токи.

Вычислить входное (относительно зажимов ab) и взаимные (передаточные) сопrotивления между первой и остальными ветвями.

Решение. Для определения входной проводимости g_{11} и взаимных проводимостей g_{n1} ($n = 1, 2, \dots, 5$) между первой и остальными ветвями исключим все заданные э. д. с. и положим, что в ветвь с r_1 включена э. д. с., равная 1 в (рис. 1.72, b) и направленная, как э. д. с. E_1 ; при этом вычислим токи, вызванные ею в каждой из ветвей. Фактически расчет проще проводить методом пропорциональных величин, задавшись током в крайней первой ветви. В результате расчета получим, что $I_1' = 0,04 \text{ а}$, $I_2' = 0,02 \text{ а}$, $I_3' = 0,016 \text{ а}$, $I_4' = 0,004 \text{ а}$, $I_5' = 0,02 \text{ а}$. Их числовые значения равны соответствующим проводимостям, поэтому $g_{11} = I_1' = 0,04 \text{ сим}$, $g_{21} = I_2' = 0,02 \text{ сим}$, $g_{31} = I_3' = 0,016 \text{ сим}$, $g_{41} = I_4' = 0,004 \text{ сим}$, $g_{51} = I_5' = 0,02 \text{ сим}$.

Затем вычисляем входную проводимость g_{22} и взаимные проводимости между второй и остальными ветвями. Для этого аналогично предыдущему исключим все э. д. с., а в ветвь с r_2 вводим э. д. с., равную 1 в (рис. 1.72, $в$) и имеющую направление э. д. с. E_2 , и вычислим токи, созданные ею в каждой из ветвей. В результате получим: $I_2'' = 0,035 \text{ а}$; $I_1'' = 0,02 \text{ а}$; $I_3'' = 0,028 \text{ а}$; $I_4'' = 0,007 \text{ а}$; $I_5'' =$

$= 0,015 \cdot a$, а соответствующие входная g_{22} и взаимные g_{n2} ($n = 1, 3, 4, 5$) проводимости будут:

$$g_{22} = 0,035 \text{ см}, \quad g_{12} = 0,02 \text{ см}, \quad g_{32} = 0,028 \text{ см}, \quad g_{42} = 0,007 \text{ см}, \\ g_{52} = 0,015 \text{ см}.$$

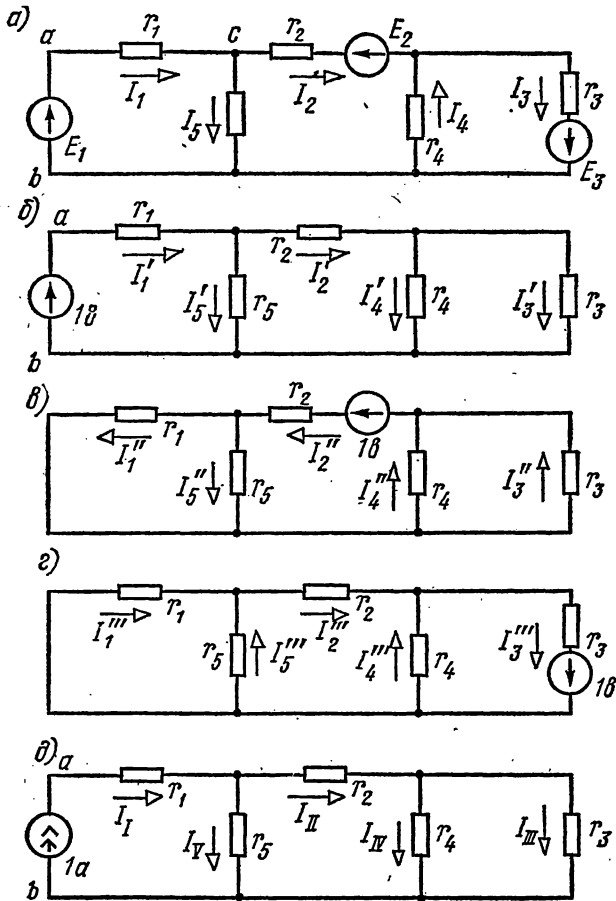


Рис. 1.72

Аналогично, введя в третью ветвь э.д.с., равную 1 в и направленную, как и э.д.с. E_3 (рис. 1.17, г), получим; $I_4''' = 0,0424 \text{ а}$; $I_1''' = 0,016 \text{ а}$; $I_2''' = 0,028 \text{ а}$; $I_4''' = 0,0144 \text{ а}$; $I_5''' = 0,012 \text{ а}$ и соответствующие входную и взаимные g_{n3} ($n = 1, 2, 4, 5$) проводимости:

$$g_{33} = 0,0424 \text{ см}; \quad g_{13} = 0,016 \text{ см}; \quad g_{23} = 0,028 \text{ см}; \quad g_{43} = 0,0144 \text{ см}; \\ g_{53} = 0,012 \text{ см}.$$

Расчет входных проводимостей g_{44} и взаимных проводимостей g_{n4} между четвертой и остальными ветвями не произведем, так как в ветви r_4 нет источника э.д.с. и поэтому при расчете токов соответствующие проводимости не используются. По тем же соображениям не вычисляем g_{55} и g_{n5} .

Отметим, что входная проводимость каждой ветви является суммой взаимных проводимостей между рассматриваемой ветвью и каждой из остальных ветвей, присоединенных к одному из двух узлов, к которому эта ветвь подключена. Например, ветвь с сопротивлением r_1 присоединена к узлам b и c , ее входная проводимость g_{11} равняется сумме взаимных проводимостей g_{21} и g_{51} или сумме g_{51} , g_{41} и g_{31} . Действительно, $g_{11} = g_{21} + g_{51}$ ($0,04 = 0,02 + 0,02$) или $g_{11} = g_{51} + g_{41} + g_{31}$ ($0,04 = 0,02 + 0,004 + 0,016$), т. е. получены тождества.

Аналогично,

$$g_{22} = g_{12} + g_{52} \quad \text{или} \quad g_{22} = g_{42} + g_{32};$$

$$g_{33} = g_{23} + g_{43} \quad \text{или} \quad g_{33} = g_{43} + g_{53} + g_{13}.$$

Подставляя числовые значения, убедимся, что и здесь имеются тождества.

Найдем токи в ветвях. Применив принцип наложения, получим:

$$I_1 = g_{11}E_1 - g_{21}E_2 + g_{31}E_3 = 0,04 \cdot 25 - 0,02 \cdot 20 + 0,016 \cdot 50 = 1,4 \text{ а};$$

$$I_2 = g_{12}E_1 - g_{22}E_2 + g_{32}E_3 = 1,2 \text{ а};$$

$$I_3 = g_{13}E_1 - g_{23}E_2 + g_{33}E_3 = 1,96 \text{ а};$$

$$I_4 = -g_{14}E_1 + g_{24}E_2 + g_{34}E_3 = 0,76 \text{ а};$$

$$I_5 = g_{15}E_1 + g_{25}E_2 - g_{35}E_3 = 0,2 \text{ а}.$$

Направления найденных токов нанесены на рис. 1.72, а.

Перейдем к определению входного и взаимных (передаточных) сопротивлений между первой и остальными ветвями. Для этого, исключая из схемы все э.д.с., к зажимам ab подводим источник единичного тока $J = 1 \text{ а}$ (рис. 1.72, б) и любым способом (например, сворачиванием схемы) находим токи в ветвях. В результате расчета получим:

$$I_I = J = 1 \text{ а}; \quad I_{II} = 0,5 \text{ а}; \quad I_{III} = 0,4 \text{ а}; \quad I_{IV} = 0,1 \text{ а}; \quad I_V = 0,4 \text{ а}.$$

Вычисляем напряжение на зажимах ab источника тока:

$$U_{ab} = I_I r_1 + I_V r_5 = 1 \cdot 15 + 0,5 \cdot 20 = 25 \text{ в}.$$

Входное сопротивление есть отношение напряжения на входных зажимах к току J :

$$r_{11} = \frac{U_{ab}}{J} = \frac{25}{1} = 25 \text{ ом}.$$

Входное сопротивление всегда величина, обратная входной проводимости:

$$r_{11} = \frac{1}{g_{11}} = \frac{1}{0,04} = 25 \text{ ом.}$$

Вычислим взаимные сопротивления между первой и каждой из остальных ветвей. Взаимное сопротивление есть отношение напряжения на соответствующей ветви к току источника тока J . Поэтому

$$r_{12} = \frac{U_2}{J} = \frac{I_{11} r_2}{J} = \frac{0,5 \cdot 12}{1} = 6 \text{ ом;}$$

$$r_{13} = \frac{U_3}{J} = \frac{I_{111} r_3}{J} = \frac{0,4 \cdot 10}{1} = 4 \text{ ом;}$$

$$r_{15} = \frac{U_5}{J} = \frac{I_{V} r_5}{J} = \frac{0,4 \cdot 50}{1} = 20 \text{ ом;}$$

Следует заметить, что в общем случае взаимные сопротивления не обратны соответствующим взаимным проводимостям. Например,

$$g_{21} = 0,02 \neq \frac{1}{r_{21}} = \frac{1}{6} = 0,167 \text{ сим;}$$

$$g_{31} = 0,016 \neq \frac{1}{r_{31}} = \frac{1}{4} = 0,25 \text{ сим}$$

и т. д.

1.75. В схеме рис. 1.73 известны $r_1 = 10 \text{ ом}$, $r_2 = 16 \text{ ом}$, $r_3 = 60 \text{ ом}$, $r_4 = r_5 = 40 \text{ ом}$, $E_1 = 120 \text{ в}$, $E_3 = 150 \text{ в}$, $E_5 = 80 \text{ в}$.

Рассчитать все входные и взаимные проводимости и все токи.

3. Линейные соотношения

1.76. В цепи рис. 1.74, а сопротивление r является переменной величиной. Даны: $E_1 = 100 \text{ в}$, $E_2 = 120 \text{ в}$, $r_1 = 10 \text{ ом}$, $r_2 = 20 \text{ ом}$, $r_3 = r_4 = 10 \text{ ом}$.

Найти зависимости: 1) напряжения U на сопротивлении r от тока I , протекающего через это сопротивление; 2) тока I_3 , проходящего через r_3 , от напряжения U на зажимах сопротивления r .

Решение. 1. Воспользуемся линейным соотношением (см. п. 8 основных положений)

$$U = A + BI. \quad (1)$$

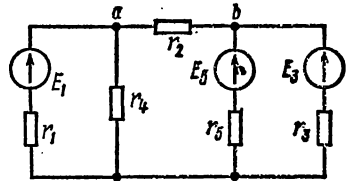


Рис. 1.73

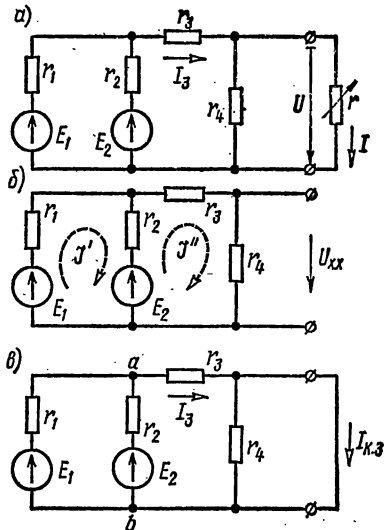


Рис. 1.74

Для определения двух постоянных A и B достаточно найти значения U и I для каких-либо двух режимов работы цепи. Проще всего это сделать для холостого хода и короткого замыкания.

В режиме холостого хода (т. е. при $r = \infty$) ток $I = 0$, а напряжение $U = U_{x,x}$ можно определить, рассчитав токи любым способом в схеме рис. 1.74, б. Например, по методу контурных токов

$$E_1 - E_2 = \mathcal{J}'(r_1 + r_2) - \mathcal{J}''r_2; \quad E_2 = \mathcal{J}''(r_2 + r_3 + r_4) - \mathcal{J}'r_2.$$

Подставляя цифровые значения и решив эти уравнения, найдем $\mathcal{J}'' = 4$ а; $U = U_{x,x} = r_4 \mathcal{J}'' = 40$ в. Подставляя в уравнение (1) значения напряжения и тока при холостом ходе ($U = 40$ в, $I = 0$), получим $A = 40$ в.

В режиме короткого замыкания, т. е. при $r = 0$, напряжение $U = U_{к,з} = 0$, а ток $I_{к,з}$ (рис. 1.74, в) может быть найден различными способами. Определим его по методу узловых потенциалов, для чего найдем напряжение

$$U_{ab} = \frac{E_1 g_1 + E_2 g_2}{g_1 + g_2 + g_3} = \frac{100 \cdot 0,1 + 120 \cdot 0,05}{0,1 + 0,05 + 0,1} = \frac{16}{0,25} = 64 \text{ в}$$

и ток

$$I_{к,з} = \frac{U_{ab}}{r_3} = \frac{64}{10} = 6,4 \text{ а.}$$

Подставляя в уравнение (1) величины напряжения и тока при коротком замыкании ($U = U_{кз} = 0$; $I = I_{к,з} = 6,4$ а); получим

$$0 = A + 6,4 B,$$

откуда

$$B = \frac{A}{6,4} = -\frac{40}{6,4} = -6,25 \text{ ом.}$$

Искомая зависимость на основании уравнения (1) имеет вид

$$U = 40 - 6,25 I.$$

2. Воспользуемся линейным соотношением

$$I_3 = a + b U. \quad (2)$$

Для определения постоянных a и b воспользуемся значениями напряжений в ветви r и токов в ветви r_3 при холостом ходе и коротком замыкании ветви r .

При коротком замыкании (рис. 1.74, в) напряжение $U = U_{кз} = 0$, а ток в r_3 равен $I_3 = I_{к,з} = 6,4$ а. Подставляя $U = U_{к,з} = 0$ и $I_3 = I_{к,з} = 6,4$ а в уравнение (2), найдем $a = 6,4$ а.

При холостом ходе (см. рис. 1.74, б), как было найдено, напряжение $U = U_{x,x} = 40$ в, а ток ветви $r_3 - I' = 4$ а. Подставляя $U = U_{x,x} = 40$ в $I' = I'' = 4$ а в уравнение (2), получим $4 = 6,4 + b 40$, отсюда $b = -0,06$.

Искомое уравнение примет вид

$$I_3 = 6,4 - 0,06 U$$

1.77. На рис. 1.75 изображена схема с сопротивлением r , изменяющимся от нуля до бесконечности.

Найти зависимости напряжения U на сопротивлении r от тока I , протекающего через это же сопротивление, если $E_1 = 45$ в, $E_2 = 54$ в, $r_1 = r_4 = 5$ ом, $r_2 = r_3 = 20$ ом. Задачу решить методом эквивалентного генератора и методом линейности исследуемого соотношения между током и напряжением.

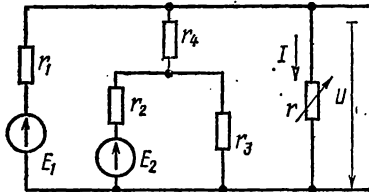


Рис. 1.75

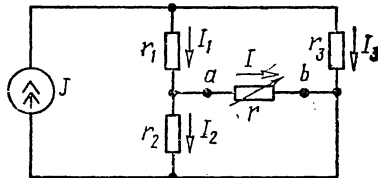


Рис. 1.76

1.78. Источник тока $J = 10$ ма включен в цепь, сопротивления элементов которой равны $r_1 = 1$ ком, $r_2 = 5$ ком, $r_3 = 4$ ком и сопротивление r изменяется от нуля до бесконечности (рис. 1.76).

Найти зависимости каждого из токов напряжения U_{ab} на переменном сопротивлении r .

ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ ЦЕПИ ОДНОФАЗНОГО
СИНУСОИДАЛЬНОГО ТОКА

ОСНОВНЫЕ ПОЛОЖЕНИЯ И СООТНОШЕНИЯ

1. Мгновенное значение величины, синусоидально изменяющейся с течением времени,

$$a = A_m \sin(\omega t + \psi) = A_m \sin\left[\omega\left(t + \frac{\psi}{\omega}\right)\right], \quad (2.1)$$

где A_m — максимальное значение, или амплитуда;
 $\omega t + \psi$ — фаза (фазовый угол);
 ψ — начальная фаза (начальный фазовый угол);
 $\frac{\psi}{\omega}$ — начальный фазовый сдвиг;
 ω — угловая частота.

Период T , угловая частота ω и частота f связаны соотношением

$$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}; \quad f = \frac{1}{T}. \quad (2.2)$$

По уравнению (2.1) на рис. 2.1 построены синусоида и соответствующая векторная диаграмма (вектор A_m вращается с постоянной угловой скоростью ω против часовой стрелки).

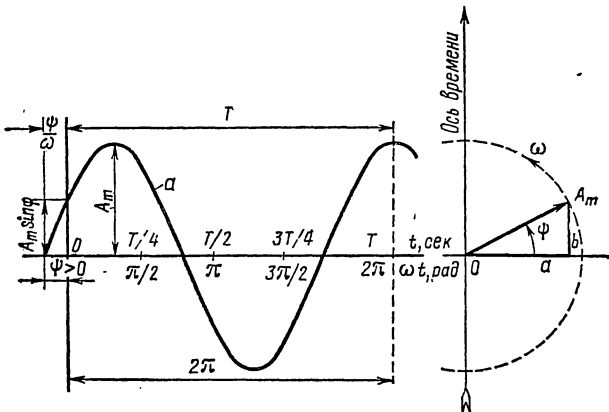


Рис. 2.1

2. Сложение двух синусоид $a_1 = A_{1m} \sin(\omega t + \psi_1)$ и $a_2 = A_{2m} \sin(\omega t + \psi_2)$ одинаковой частоты дает синусоиду a той же частоты (рис. 2.2):

$$\begin{aligned}
 a &= a_1 + a_2 = A_{1m} \sin(\omega t + \psi_1) + A_{2m} \sin(\omega t + \psi_2) = \\
 &= A_m \sin(\omega t + \psi).
 \end{aligned}
 \tag{2.3}$$

Амплитуда A_m и начальная фаза ψ синусоиды a равны:

$$\left. \begin{aligned}
 A_m &= \sqrt{A_{1m}^2 + A_{2m}^2 + 2A_{1m} A_{2m} \cos(\psi_1 - \psi_2)}; \\
 \operatorname{tg} \psi &= \frac{A_{1m} \sin \psi_1 + A_{2m} \sin \psi_2}{A_{1m} \cos \psi_1 + A_{2m} \cos \psi_2}.
 \end{aligned} \right\}
 \tag{2.4}$$

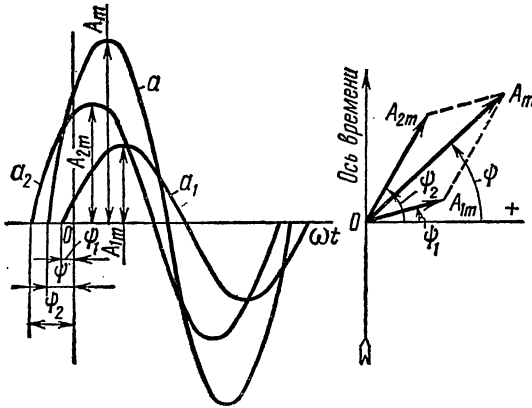


Рис. 2.2

В частном случае, когда $a_1 = A_{1m} \sin \omega t$ ($\psi_1 = 0$), $a_2 = A_{2m} \cos \omega t$ ($\psi_2 = \frac{\pi}{2}$), получим (рис. 2.3):

$$A_m = \sqrt{A_{1m}^2 + A_{2m}^2}, \quad \operatorname{tg} \psi = \frac{A_{2m}}{A_{1m}}.
 \tag{2.5}$$

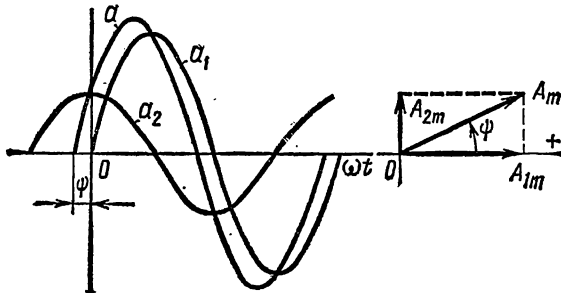


Рис. 2.3

3. Действующие значения синусоидально изменяющихся тока, э.д.с. и напряжения соответственно равны:

$$I = \frac{I_m}{\sqrt{2}} = 0,707 I_m, \quad E = \frac{E_m}{\sqrt{2}}, \quad U = \frac{U_m}{\sqrt{2}}. \quad (2.6)$$

4. Средние значения синусоидально изменяющихся тока, э.д.с. и напряжения за положительную полуволну:

$$I_{\text{ср}} = \frac{2}{\pi} I_m = 0,637 I_m, \quad E_{\text{ср}} = \frac{2}{\pi} E_m, \quad U_{\text{ср}} = \frac{2}{\pi} U_m. \quad (2.7)$$

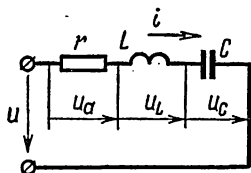


Рис. 2.4

Среднее значение синусоидально изменяющейся величины $a = A_m \sin(\omega t + \psi)$ за целый период равно нулю.

5. Второй закон Кирхгофа. Уравнение второго закона Кирхгофа для мгновенных значений напряжений и тока, проходящего в одноконтурной цепи, состоящей из последовательно соединенных активного сопротивления r , индуктивности L и емкости C

(рис. 2.4), имеет вид

$$u = u_a + u_L + u_C, \quad (2.8)$$

где $u_a = ir$ — падение напряжения на активном сопротивлении;

$u_L = L \frac{di}{dt}$ — падение напряжения на индуктивности, причем

$$u_L = -e_L, \quad \text{где э.д.с. самоиндукции } e_L = -L \frac{di}{dt},$$

$$i = \frac{1}{L} \int_0^t u_L dt + i(0),$$

u_C — падение напряжения на емкости, причем

$$i = C \frac{du_C}{dt}, \quad u_C = \frac{1}{C} \int_0^t i dt + u_C(0).$$

6. Цепь из последовательно соединенных элементов. Если цепь, состоящая из последовательно соединенных r , L и C , включена на синусоидально изменяющееся напряжение

$$u = U_m \sin(\omega t + \psi),$$

то по ней проходит ток

$$i = I_m \sin(\omega t + \psi - \varphi),$$

где

$$I_m = \frac{U_m}{z} = \frac{U_m}{\sqrt{r^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}; \quad (2.9a)$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{r}, \quad -90^\circ \leq \varphi \leq +90^\circ. \quad (2.9б)$$

Соотношение (2.9, а) является уравнением закона Ома для амплитудных значений напряжения и тока. Закон Ома для действующих значений напряжения и тока имеет вид

$$I = \frac{U}{z} = \frac{U}{\sqrt{r^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}, \quad (2.9в)$$

где $\omega L = x_L$ — индуктивное сопротивление;
 $\frac{1}{\omega C} = x_C$ — емкостное сопротивление;
 $\omega L - \frac{1}{\omega C} = x = x_L - x_C$ — реактивное сопротивление;

$$z = \sqrt{r^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2} = \sqrt{r^2 + x^2} \text{ — полное сопротивление.}$$

Обращаем внимание на то, что x_L и x_C — положительные величины, а реактивное сопротивление x может быть как положительным (при индуктивном характере ветви, когда $x_L > x_C$), так и отрицательным (при емкостном характере ветви, т. е. $x_L < x_C$). Например, для ветви (см. рис. 2.4) при $x_L = x_1 = 5 \text{ ом}$, $x_C = -x_2 = 7 \text{ ом}$ реактивное сопротивление $x = x_L - x_C = x_1 + x_2 = 5 - 7 = -2 \text{ ом}$.

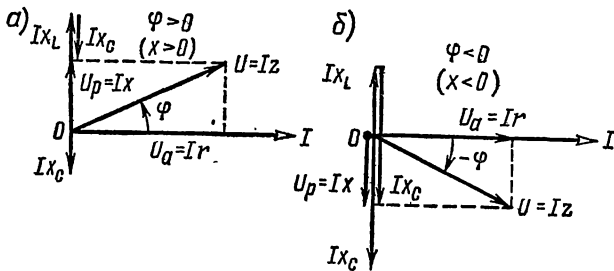


Рис. 2.5

7. Треугольник напряжений. Приложенное к цепи напряжение U может быть разложено на составляющие (рис. 2.5, а и б): $U_a = Ir$ — активную, совпадающую по фазе с током, и $U_p = Ix$ — реактивную; вектор U_p опережает вектор тока I на четверть периода, если в цепи преобладает индуктивное сопротивление $x = x_L - x_C > 0$ (рис. 2.5, а); U_p отстает от I на четверть периода, если в цепи преобладает емкостное сопротивление $x = x_L - x_C < 0$ (рис. 2.5, б);

$$U_a = Ir = U \cos \varphi; \quad (2.10)$$

$$U_p = Ix = U \sin \varphi; \quad (2.11)$$

$$U = \sqrt{U_a^2 + U_p^2} = Iz. \quad (2.12)$$

8. Соотношения, связывающие $\cos \varphi$, $\sin \varphi$ и $\operatorname{tg} \varphi$ через сопротивления цепи. Из треугольника сопротивлений (рис. 2.6, а и б) следуют соотношения:

$$\cos \varphi = \frac{r}{z}, \quad \sin \varphi = \frac{x}{z}, \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{x}{r}. \quad (2.13)$$

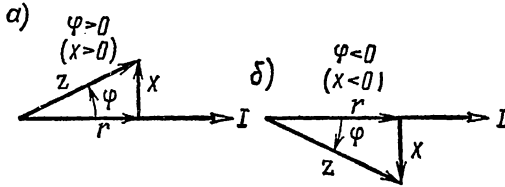


Рис. 2.6

9. Треугольник токов. Ток I , проходящий в цепи, может быть разложен на две составляющие (рис. 2.7): I_a — активную, совпадающую по фазе с приложенным напряжением, и I_p — реактивную; I_p

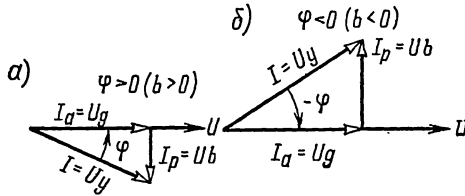


Рис. 2.7

отстает от напряжения \dot{U} на четверть периода, когда в цепи преобладает индуктивное сопротивление $x = x_L - x_C > 0$ (рис. 2.7, а) и опережает \dot{U} на четверть периода при преобладании емкостного сопротивления $x = x_L - x_C < 0$ (рис. 2.7, б):

$$I_a = I \cos \varphi = Ug; \quad (2.14)$$

$$I_p = I \sin \varphi = Ub; \quad (2.15)$$

$$I = \sqrt{I_a^2 + I_p^2} = Uy. \quad (2.16)$$

Цепь, состоящая из последовательно соединенных активного r и реактивного сопротивлений $x = x_L - x_C$ (см. рис. 2.4), может быть

заменена эквивалентной схемой, состоящей из параллельно соединенных активной проводимости g и реактивной проводимости b (рис. 2.8, а):

Реактивная проводимость может быть положительной величиной ($b > 0$), если цепь имеет индуктивный характер $b = b_L = \frac{1}{\omega L_n}$ (рис. 2.8, б), и может быть отрицательной величиной ($b < 0$), если цепь имеет емкостный характер $b = -b_C = -\omega C_n$ (рис. 2.8, в).

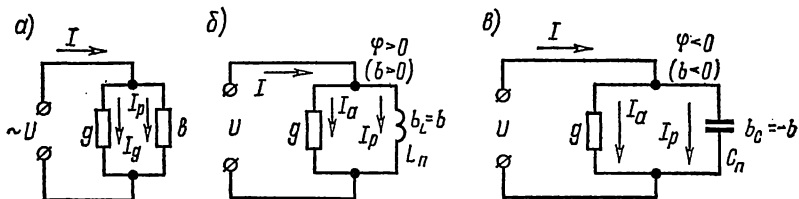


Рис. 2.8

10. Треугольник проводимостей (рис. 2.9, а и б) подобен треугольнику токов (см. рис. 2.7):

$$\cos \varphi = \frac{g}{y}, \quad \sin \varphi = \frac{b}{y}, \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{b}{g}. \quad (2.17)$$

11. Переход от последовательной схемы (см. рис. 2.4) к эквивалентной параллельной схеме (см. рис. 2.8) осуществляется по формулам:

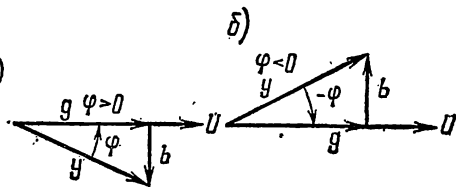


Рис. 2.9

$$\left. \begin{aligned} g &= \frac{r}{r^2 + x^2} = \frac{r}{z^2}, & b &= \frac{x}{r^2 + x^2} = \frac{x}{z^2}; \\ y &= \sqrt{g^2 + b^2} = \frac{1}{\sqrt{r^2 + x^2}} = \frac{1}{z}. \end{aligned} \right\} \quad (2.18)$$

При переходе от параллельной схемы (см. рис. 2.8) к эквивалентной последовательной (см. рис. 2.4) ее параметры определяются по формулам:

$$r = \frac{g}{g^2 + b^2} = \frac{g}{y^2}; \quad x = \frac{b}{g^2 + b^2} = \frac{b}{y^2}; \quad (2.19)$$

$$z = \sqrt{r^2 + x^2} = \frac{1}{\sqrt{g^2 + b^2}} = \frac{1}{y}.$$

12. **Мощности.** Активная, реактивная и полная мощности определяются по формулам:

$$P = I^2 r = UI \cos \varphi; \quad (2.20)$$

$$Q = I^2 x = UI \sin \varphi; \quad (2.21)$$

$$S = \sqrt{P^2 + Q^2} = UI = I^2 z = U^2 y. \quad (2.22)$$

Для всякой электрической цепи справедливы следующие балансы мощностей:

$$\left. \begin{aligned} \sum P_{\text{и}} &= \sum P_{\text{п}}; \\ \sum Q_{\text{и}} &= \sum Q_{\text{п}}, \end{aligned} \right\} \quad (2.23)$$

где $P_{\text{и}}$, $Q_{\text{и}}$ — мощности источников,
 $P_{\text{п}}$, $Q_{\text{п}}$ — мощности потребителей.

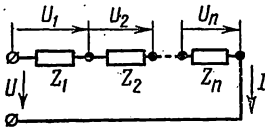


Рис. 2.10

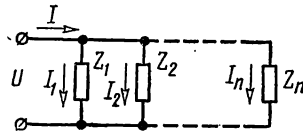


Рис. 2.11

13. **Последовательное соединение сопротивлений.** При последовательном соединении сопротивлений (рис. 2.10):

$$\left. \begin{aligned} U_a &= \sum_{k=1}^n U_{ka} = I \sum_{k=1}^n r_k; \\ U_p &= \sum_{k=1}^n U_{kp} = I \sum_{k=1}^n x_k; \end{aligned} \right\} \quad (2.24)$$

$$U = \sqrt{U_a^2 + U_p^2} = I \sqrt{\left(\sum_{k=1}^n r_k \right)^2 + \left(\sum_{k=1}^n x_k \right)^2}.$$

Сдвиг фаз между общим напряжением U и током I

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\sum_{k=1}^n x_k}{\sum_{k=1}^n r_k}. \quad (2.25)$$

14. **Параллельное соединение сопротивлений.** При параллельном соединении сопротивлений (рис. 2.11):

$$I_a = \sum_{k=1}^n I_{ka} = U \sum_{k=1}^n g_k; \quad (2.26)$$

$$I_p = \sum_{k=1}^n I_{kp} = U \sum_{k=1}^n b_k;$$

$$I = \sqrt{I_a^2 + I_p^2} = U \sqrt{\left(\sum_{k=1}^n g_k\right)^2 + \left(\sum_{k=1}^n b_k\right)^2}.$$

Сдвиг фаз между напряжением U и током I , проходящим в неразветвленной части цепи,

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\sum_{k=1}^n b_k}{\sum_{k=1}^n g_k}. \quad (2.27)$$

УПРАЖНЕНИЯ И ЗАДАЧИ

А. Мгновенные значения синусоидального тока, напряжения, мощности. Их графики

2.1. Построить кривые изменения напряжения и тока во времени и начертить векторы, изображающие заданные синусоидальные функции:

$$u = 100 \sin\left(157t + \frac{\pi}{10}\right) \text{ в}; \quad i = 5 \sin\left(157t - \frac{\pi}{8}\right) \text{ а}.$$

Чему равен сдвиг фаз между напряжением и током? Определить период, частоту, моменты начала положительных полувольт напряжения и тока. Какой вид примут уравнения для заданных напряжения и тока, если за начальную фазу, т. е. фазу, равную нулю, принять фазу для тока? Для этого случая построить синусоиды напряжения и тока, векторную диаграмму.

Решение. Синусоиды u и i и соответствующие им векторы U_m и I_m изображены на рис. 2.12, а.

Период

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2 \cdot 3,14}{157} = 0,04 \text{ сек}$$

и частота

$$f = \frac{1}{T} = \frac{1}{0,04} = 25 \text{ гц}.$$

Ток по фазе отстает от напряжения на угол

$$\varphi = \frac{\pi}{10} - \left(-\frac{\pi}{8}\right) = \frac{9\pi}{40} \text{ рад } (40^\circ 30').$$

Моменты начала положительной полуволны напряжения и тока:

$$t' = \frac{-\frac{\pi}{10}}{\omega} = -\frac{1}{20} \cdot \frac{2\pi}{\omega} = -\frac{T}{20} = -0,002 \text{ сек} = -2 \text{ мсек};$$

$$t'' = \frac{\frac{\pi}{8}}{\omega} = \frac{1}{16} \cdot \frac{2\pi}{\omega} = \frac{T}{16} = 0,0025 \text{ сек} = 2,5 \text{ мсек}.$$

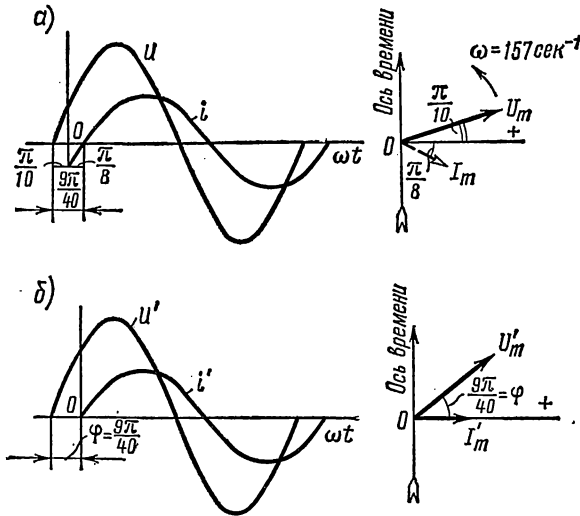


Рис. 2.12

При начальной фазе тока, равной нулю, уравнения для напряжения и тока примут вид:

$$u' = 100 \sin\left(157t + \frac{9\pi}{40}\right) \text{ в};$$

$$i' = 5 \sin(157t) \text{ а}.$$

Кривые u' , i' и соответствующие векторы U'_m и I'_m изображены на рис. 2.12, б.

2.2. Напряжения и токи изменяются во времени по следующим законам:

а) $u_1 = 300 \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{4}\right) \text{ в}, \quad i_1 = 10 \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{6}\right) \text{ а}, \quad \omega = 314 \text{ сек}^{-1};$

б) $i_2 = 5 \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{3}\right) \text{ ма}, \quad i_3 = 3 \sin\left(\omega t - \frac{\pi}{3}\right) \text{ ма}, \quad \omega = 6,28 \cdot 10^5 \text{ сек}^{-1};$

в) $u_2 = 300 \cos(\omega t - 2) \text{ в}, \quad u_3 = 200 \cos(\omega t - 0,43) \text{ в}, \quad \omega = 10^5 \text{ сек}^{-1}.$

Построить векторные диаграммы и графики изменения напряжений и токов. Для каждого из случаев найти сдвиг фаз между соответствующей парой синусоидальных функций.

Принимая фазу для u_1 (п. а), i_3 (п. б) и u_2 (п. в) за начальную, написать уравнения и построить графики напряжений и токов. Для каждого из указанных случаев построить векторы, изображающие соответствующие синусоиды. Найти период, частоту и моменты начала положительных полуволн напряжения и тока.

2.3. Найти аналитически и при помощи векторной диаграммы сумму и разность двух синусоидальных токов:

$$i_1 = 100 \sin(\omega t + 30^\circ) \text{ ма};$$

$$i_2 = 120 \sin(\omega t - 45^\circ) \text{ ма}.$$

Решение. Найдем сумму токов:

$$i' = i_1 + i_2 = 100 \sin(\omega t + 30^\circ) + 120 \sin(\omega t - 45^\circ) = I'_m \sin(\omega t + \psi').$$

Значения I'_m и ψ' определяем по формулам (2.4), в которых полагаем:

$$A_{1m} = I_{1m} = 100; \quad A_{2m} = I_{2m} = 120; \quad \psi_1 = 30^\circ; \quad \psi_2 = -45^\circ;$$

$$I'_m = \sqrt{100^2 + 120^2 + 2 \cdot 100 \cdot 120 \cos 75^\circ} = 175 \text{ ма};$$

$$\text{tg } \psi' = \frac{100 \sin 30^\circ + 120 \sin(-45^\circ)}{100 \cos 30^\circ + 120 \cos(-45^\circ)} = -0,179; \quad \psi' = -10^\circ 10'.$$

На рис. 2.13 начерчена векторная диаграмма, из которой (по масштабу) могут быть получены те же значения.

Разность токов

$$i'' = i_1 - i_2 = 100 \sin(\omega t + 30^\circ) - 120 \sin(\omega t - 45^\circ).$$

Воспользовавшись тригонометрической формулой

$$-\sin \alpha = \sin(\alpha + 180^\circ),$$

перепишем выражение для тока

$$i'' = 100 \sin(\omega t + 30^\circ) + 120 \sin(\omega t + 135^\circ) = I''_m \sin(\omega t + \psi''),$$

где

$$I''_m = \sqrt{100^2 + 120^2 + 2 \cdot 100 \cdot 120 \cos(-105^\circ)} = 135 \text{ ма};$$

$$\text{tg } \psi'' = \frac{100 \sin 30^\circ + 120 \sin 135^\circ}{100 \cos 30^\circ + 120 \cos 135^\circ} = 19,4; \quad \psi'' = 87^\circ.$$

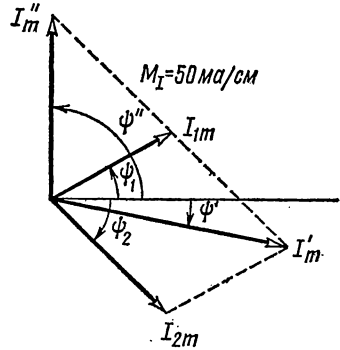


Рис. 2.13

2.4. Найти сумму двух синусоидальных напряжений путем непосредственных вычислений и при помощи векторной диаграммы для двух случаев:

$$1) u_1 = 100 \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{3}\right) \text{ в}; \quad u_2 = 150 \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{12}\right) \text{ в};$$

$$2) u_3 = 310 \cos 314t \text{ в}; \quad u_4 = 180 \sin\left(314t + \frac{\pi}{3}\right) \text{ в}.$$

2.5. Катушка с активным сопротивлением $r = 10 \text{ ом}$, индуктивностью $L = 0,05 \text{ гн}$ подключена к источнику синусоидального напряжения, действующее значение которого $U = 120 \text{ в}$, а частота $f = 50 \text{ гц}$.

Определить полное сопротивление катушки, ток и сдвиг фаз между напряжением и током. Чему равны активная, реактивная и полная мощности?

Вычислить активную и реактивную составляющие напряжения на зажимах катушки. Чему равна э.д.с. самоиндукции, наводимая в катушке? Построить векторную диаграмму напряжений и тока.

Считая, что ток изменяется синусоидально ($i = I_m \sin \omega t$), написать уравнения для мгновенных значений активной u_a и реактивной u_L составляющих и всего приложенного напряжения u , активной p_a , реактивной p_L и полной мощности p и энергии магнитного поля. Начертить кривые зависимостей этих величин в функции времени.

Решение. $x_L = \omega L = 2\pi \cdot 50 \cdot 0,05 = 15,7 \text{ ом};$

$$z = \sqrt{r^2 + (\omega L)^2} = \sqrt{10^2 + 15,7^2} = 18,6 \text{ ом};$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\omega L}{r} = 1,57, \quad \varphi = 57^\circ 30';$$

$$I = \frac{U}{z} = \frac{120}{18,6} = 6,45 \text{ а};$$

$$P = I^2 r = 6,45^2 \cdot 10 = 416 \text{ вт};$$

$$Q = I^2 x = 6,45^2 \cdot 15,7 = 653 \text{ вар};$$

$$S = I^2 z = 6,45^2 \cdot 18,6 = 773 \text{ ва};$$

$$U_a = Ir = 6,45 \cdot 10 = 64,5 \text{ в};$$

$$U_L = Ix_L = 6,45 \cdot 15,7 = 103 \text{ в}; \quad E_L = -U_L = -103 \text{ в}.$$

Векторная диаграмма приведена на рис. 2.14, а.

Запишем уравнения мгновенных значений величин:

$$i = I_m \sin \omega t = 6,45 \sqrt{2} \sin \omega t = 9,1 \sin \omega t \text{ а};$$

$$u_a = ir = I_m r \sin \omega t = 91 \sin \omega t \text{ в}; \quad u_L = I_m \omega L \cos \omega t = 146 \cos \omega t \text{ в};$$

$$u = 120 \sqrt{2} \sin(\omega t + \varphi) = 170 \sin(\omega t + 57^\circ 30') \text{ в};$$

$$\begin{aligned}
 p_a &= iu_a = I_m^2 r \sin^2 \omega t = I^2 r (1 - \cos 2\omega t) = 416 (1 - \cos 2\omega t) \text{ вт}; \\
 p_L &= iu_L = I_m \sin \omega t I_m \omega L \cos \omega t = I^2 \omega L \sin 2\omega t = 653 \sin 2\omega t \text{ вар}; \\
 p &= iu = I_m \sin \omega t U_m \sin(\omega t + \varphi) = UI [\cos \varphi - \cos(2\omega t + \varphi)] = \\
 &= 416 - 773 \cos(2\omega t + 57^\circ 30') \text{ вт};
 \end{aligned}$$

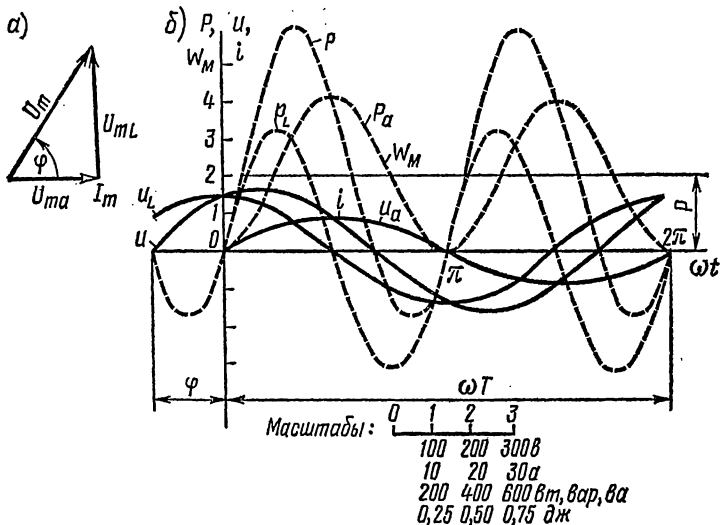


Рис. 2.14

$$w_m = \frac{Li^2}{2} = \frac{LI_m^2}{2} \sin^2 \omega t = \frac{LI^2}{2} (1 - \cos 2\omega t) = 1,04 (1 - \cos 2\omega t) \text{ дж}.$$

По этим уравнениям на рис. 2.14, б построены кривые.

2.6. Для данных предыдущей задачи за начальную фазу принять фазу приложенного напряжения, т. е. полагать, что $u = U_m \sin \omega t$. Написать уравнения для i , u_a , u_L , p_a , p_L , p и построить кривые зависимостей этих величин от времени.

2.7. Для определения активного сопротивления r и индуктивности L катушки в цепь переменного тока с частотой $f = 50$ гц были присоединены вольтметр, амперметр и ваттметр (рис. 2.15). Приборы дали следующие показания: $U = 65$ в, $I = 5$ а, $P = 128$ вт. Определить активное сопротивление и индуктивность катушки.

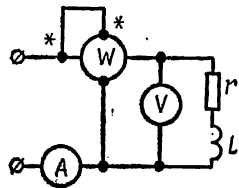


Рис. 2.15

Решение.

$$r = \frac{P}{I^2} = \frac{128}{5^2} = 5 \text{ ом}; \quad z = \frac{U}{I} = \frac{65}{5} = 13 \text{ ом};$$

$$x_L = \sqrt{z^2 - r^2} = \sqrt{13^2 - 5^2} = 12 \text{ ом};$$

$$L = \frac{x_L}{\omega} = \frac{12}{2\pi \cdot 50} = 0,0382 \text{ гн} = 38,2 \text{ мгн.}$$

2.8. При включении индуктивной катушки в цепь постоянного тока амперметр показал 2,5 а, а вольтметр — 30 в. Затем ту же катушку включили в цепь переменного тока частотой $f = 5 \text{ кгц}$. При этом вольтметр показал 120 в, а амперметр — 6 а. Чему равны активное сопротивление r и индуктивность L катушки?

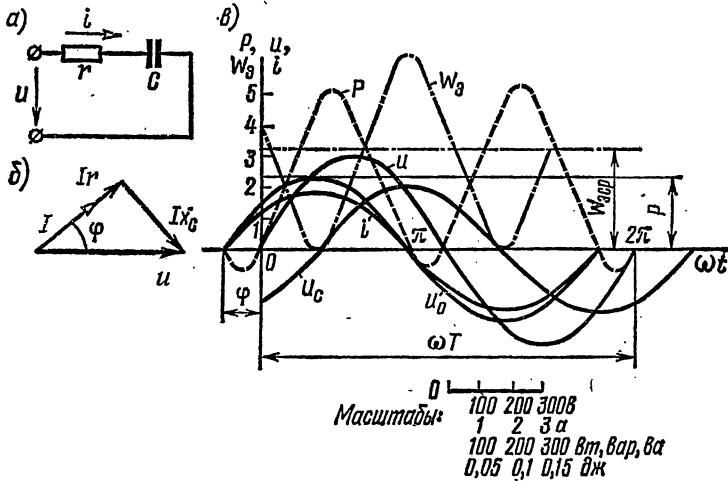


Рис. 2.16

2.9. К последовательно соединенным реостату с сопротивлением $r = 120 \text{ ом}$ и конденсатору емкостью $C = 30 \text{ мкф}$ подведено напряжение $u = 311 \sin 314t$ (рис. 2.16, а).

Вычислить полное сопротивление цепи, действующие значения напряжения и тока, мощность, расходуемую в цепи, реактивную мощность и разность фаз напряжения и тока. Построить векторную диаграмму напряжений и тока. Построить кривые мгновенных значений приложенного к цепи напряжения u , тока i , активной составляющей напряжения u_a , реактивной u_c , активной мощности p_a , реактивной p_c и полной мощности p , энергии электрического поля w_a .

Решение.

$$x_C = \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{314 \cdot 30 \cdot 10^{-6}} = 106 \text{ ом},$$

$$z = \sqrt{r^2 + x_C^2} = \sqrt{120^2 + 106^2} = 160 \text{ ом};$$

$$U = \frac{311}{\sqrt{2}} = 220 \text{ в}; \quad I = \frac{U}{z} = \frac{220}{160} = 1,37 \text{ а};$$

$$P = I^2 r = 1,37^2 \cdot 120 = 226 \text{ вт};$$

$$Q = -I^2 x_C = -1,37^2 \cdot 106 = -210 \text{ вар};$$

$$\operatorname{tg} \varphi = -\frac{x_C}{r} = -\frac{106}{120} = -0,885; \quad \varphi = -41^\circ 30'.$$

Векторная диаграмма приведена на рис. 2.16, б.

Составим уравнения мгновенных значений величин:

$$\begin{aligned} i &= I_m \sin(\omega t - \varphi) = 1,37 \sqrt{2} \sin(314t + 41^\circ 30') = \\ &= 1,94 \sin(314t + 41^\circ 31') \text{ а}; \end{aligned}$$

$$u_a = I_m r \sin(\omega t - \varphi) = 233 \sin(314t + 41^\circ 30') \text{ в};$$

$$u_C = I_m x_C \sin(\omega t - \varphi - 90^\circ) = 206 \sin(314t - 48^\circ 30') \text{ в};$$

$$p_a = i^2 r = I_m^2 r \sin^2(\omega t - \varphi) = 226 [1 - \cos(628t + 83^\circ)] \text{ вт};$$

$$p_C = u_C i = 210 \sin(628t + 83^\circ) \text{ вар};$$

$$\begin{aligned} p &= ui = 311 \sin 314t \cdot 1,94 \sin(314t + 41^\circ 30') = \\ &= 226 - 302 \cos(628t + 41^\circ 30') \text{ ват}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \omega_s &= \frac{Cu_C^2}{2} = \frac{30 \cdot 10^{-6} 206^2 \sin^2(314t - 48^\circ 30')}{2} = \\ &= 0,319 [1 - \cos(628t - 97^\circ)] \text{ дж}. \end{aligned}$$

Соответствующие кривые даны на рис. 2.16, в.

2.10. Если в предыдущей задаче принять равной нулю начальную фазу для тока $i = I_m \sin \omega t$, то как в этом случае изменятся уравнения мгновенных значений u , u_a , u_C , p , ω_s ? Начертить векторную диаграмму напряжений и тока.

2.11. При помощи осциллографа были сняты кривые напряжения u и тока i на входе пассивного двухполюсника (рис. 2.17). Чему равна частота переменного тока, если масштаб времени $M_t = 2,5 \text{ мсек/см}$? Определить, из каких эквивалентных элементов состоит двухполюсник и чему равны его эквивалентные параметры. Масштабы для напряжения и тока соответственно равны:

$$M_U = 100 \text{ в/см}; \quad M_I = 5 \text{ а/см}.$$

Решение. Период переменного тока

$$\begin{aligned} T &= M_t \cdot 4 \text{ см} = 2,5 \cdot 10^{-3} \cdot 4 = \\ &= 10^{-2} \text{ сек}, \end{aligned}$$

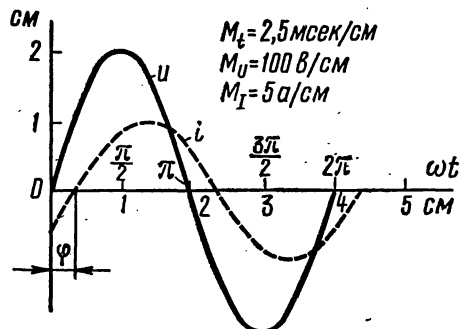


Рис. 2.17

а его частота

$$f = \frac{1}{T} = \frac{1}{10^{-2}} = 100 \text{ гц.}$$

Из рис. 2.17 находим амплитудные значения напряжения и тока:

$$U_m = M_U \cdot 2 \text{ см} = 100 \cdot 2 = 200 \text{ в;}$$

$$I_m = M_I \cdot 1 \text{ см} = 5 \cdot 1 = 5 \text{ а.}$$

Полное сопротивление схемы

$$z = \frac{U_m}{I_m} = \frac{200}{5} = 40 \text{ ом.}$$

Так как напряжение опережает ток, то параметрами эквивалентной схемы являются активное сопротивление и индуктивность. По рис. 2.17 находим угол сдвига фаз $\varphi = \pi/6$. Таким образом,

$$r_э = z \cos \varphi = 40 \cos \frac{\pi}{6} = 34,6 \text{ ом;}$$

$$x_э = z \sin \varphi = 40 \sin \frac{\pi}{6} = 20 \text{ ом;}$$

$$L_э = \frac{x_э}{\omega} = \frac{20}{2\pi \cdot 100} = 0,0318 \text{ гц} = 31,8 \text{ мкн.}$$

2.12. На рис. 2.18 изображены кривые напряжения и тока на входных зажимах пассивного двухполюсника. Масштабы времени, напряжения и тока соответственно равны:

$$M_t = 0,5 \text{ мсек/см; } M_U = 50 \text{ мв/см; } M_I = 10 \text{ ма/см.}$$

Определить частоту переменного тока и эквивалентные параметры двухполюсника.

Б. Последовательное и параллельное соединение сопротивлений

2.13. Последовательно с реостатом, имеющим только активное сопротивление $r_1 = 20 \text{ ом}$, включена катушка, параметры которой $r = 6,7 \text{ ом}$ и $L = 42,7 \text{ мкн}$ (рис. 2.19, а). Определить ток, проходящий в цепи, разность фаз между напряжением и током, напряжения на реостате и катушке, а также сдвиг фаз между напряжением источника и напряжением на катушке, если $U = 220 \text{ в}$. Частота переменного тока $f = 50 \text{ гц}$. Вычислить активную, реактивную и полную мощность катушки. Построить векторную диаграмму.

Решение.

$$\omega L = 2\pi \cdot 50 \cdot 42,7 \cdot 10^{-3} = 13,4 \text{ ом;}$$

$$z_k = \sqrt{r^2 + (\omega L)^2} = \sqrt{6,7^2 + 13,4^2} = 15 \text{ ом;}$$

$$z_э = \sqrt{(r_1 + r)^2 + (\omega L)^2} = \sqrt{26,7^2 + 13,4^2} = 29,9 \text{ ом.}$$

В цепи проходит ток

$$I = \frac{U}{z_0} = \frac{220}{29,9} = 7,35 \text{ а.}$$

Разность фаз между напряжением и током определяется из соотношения

$$\operatorname{tg} \varphi_0 = \frac{\omega L}{r + r_1} = \frac{13,4}{26,7} = 0,5, \quad \varphi_0 = 26^\circ 30'.$$

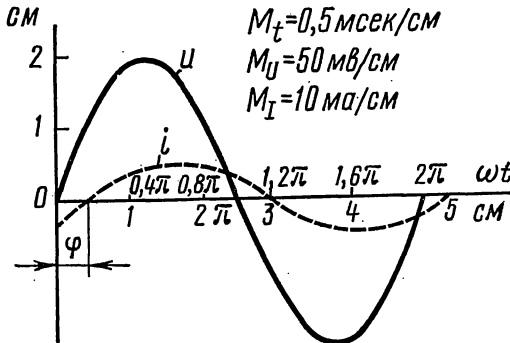


Рис. 2.18

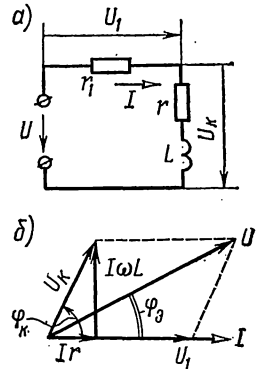


Рис. 2.19

Напряжения на реостате и катушке

$$U_1 = I r_1 = 7,35 \cdot 20 = 147 \text{ в,}$$

$$U_k = I z_k = 7,35 \cdot 15 = 110 \text{ в.}$$

Сдвиг фаз между напряжением источника и напряжением на катушке φ найдется как разность фазовых углов φ_k и φ_0 (см. векторную диаграмму рис. 2.19, б):

$$\operatorname{tg} \varphi_k = \frac{\omega L}{r} = \frac{13,4}{6,7} = 2; \quad \varphi_k = 63^\circ 30';$$

$$\varphi = \varphi_k - \varphi_0 = 63^\circ 30' - 26^\circ 30' = 37^\circ.$$

Активная, реактивная и полная мощности катушки:

$$P_k = I^2 r = 7,35^2 \cdot 6,7 = 362 \text{ вт;}$$

$$Q_k = I^2 \omega L = 7,35^2 \cdot 13,4 = 724 \text{ вар;}$$

$$S_k = U_k I = 110 \cdot 7,35 = 808 \text{ ва.}$$

2.14. По показаниям трех вольтметров, включенных в цепь (рис. 2.20), определить мощность, расходуемую в индуктивной катушке r, L , если $r_1 = 20 \text{ ом}$, а показания приборов равны $U = 120 \text{ в}$, $U_1 = 80 \text{ в}$, $U_2 = 60 \text{ в}$.

Указание. - Задачу проще всего решить, если вначале построить векторную диаграмму.

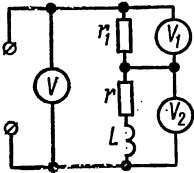


Рис. 2.20

2.15. К цепи, состоящей из последовательно соединенных активного сопротивления $r = 3 \text{ ом}$, индуктивности $L = 8 \text{ мГн}$ и емкости $C = 15 \text{ мкФ}$, подключено напряжение $U = 20 \text{ в}$ с частотой $f = 500 \text{ Гц}$. Найти ток, напряжение на каждом элементе цепи и мощность, расходуемую в ней. Построить векторную диаграмму.

Решение. Сопротивления элементов цепи:

$$x_L = \omega L = 2\pi \cdot 500 \cdot 8 \cdot 10^{-3} = 25,2 \text{ ом};$$

$$x_C = \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{2\pi \cdot 500 \cdot 15 \cdot 10^{-6}} = 21,2 \text{ ом};$$

$$z = \sqrt{r^2 + (x_L - x_C)^2} = \sqrt{3^2 + (25,2 - 21,2)^2} = 5 \text{ ом}.$$

В цепи проходит ток

$$I = \frac{U}{z} = \frac{20}{5} = 4 \text{ а},$$

который по фазе отстает от напряжения на угол φ , определяемый из соотношения

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{x_L - x_C}{r} = \frac{4}{3} = 1,333; \quad \varphi = 53^\circ 10'.$$

Вычислим напряжения на активном сопротивлении, индуктивности и емкости:

$$U_a = Ir = 4 \cdot 3 = 12 \text{ в};$$

$$U_L = Ix_L = 4 \cdot 25,2 \approx 101 \text{ в};$$

$$U_C = Ix_C = 2 \cdot 21,2 \approx 85 \text{ в}.$$

В цепи расходуется мощность

$$P = UI \cos \varphi = 20 \cdot 4 \cos 53^\circ 10' = 48 \text{ Вт}.$$

На рис. 2.21 приведена векторная диаграмма.

2.16. Через реостат $r_1 = 40 \text{ ом}$ и катушку индуктивности $r_L = 12 \text{ ом}$, $\omega L = 18 \text{ ом}$, соединенные последовательно, проходит ток $I = 2,2 \text{ а}$.

Чему равно приложенное к цепи напряжение? Подсчитать активные, реактивные и полные мощности всей цепи и ее отдельных эле-

ментов. Каков сдвиг фаз между приложенным напряжением и напряжением на катушке?

Указание. Решение начать с построения векторной диаграммы.

2.17. К двум последовательно соединенным реактивным катушкам (рис. 2.22), параметры которых $r_1 = 5,2 \text{ ом}$, $L_1 = 30 \text{ мкГн}$, $r_2 = 4,2 \text{ ом}$, $L_2 = 10 \text{ мкГн}$, подведено напряжение $U = 120 \text{ в}$. Частота $f = 50 \text{ кГц}$. Определить ток, напряжение на зажимах каждой из катушек U_1 и U_2 , активные и реактивные мощности в каждой ка-

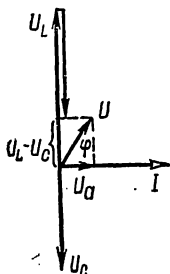


Рис. 2.21

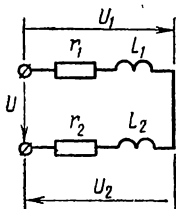


Рис. 2.22

тушке и во всей цепи. Построить векторную диаграмму напряжений и тока.

2.18. Последовательно с реактивной катушкой r, L включено активное сопротивление r_1 ; с помощью вольтметров измерены напряжения на зажимах цепи $U = 120 \text{ в}$, на активном сопротивлении r_1 напряжение $U_1 = 60 \text{ в}$ и на катушке $U_2 = 80 \text{ в}$. Амперметр показал ток $I = 2 \text{ а}$.

Найти активное сопротивление r и индуктивность L катушки.

Частота переменного тока $f = 800 \text{ гц}$.

2.19. Реактивная катушка, параметры которой $r_1 = 10,5 \text{ ом}$, $L = 382 \text{ мкГн}$, и конденсатор (с потерями), эквивалентные параметры которого $r_2 = 3,5 \text{ ом}$, $C = 0,533 \text{ мкФ}$, соединены последовательно (рис. 2.23). Какое напряжение U приложено к цепи, если амперметр показал ток $I = 2,4 \text{ а}$? Частота переменного тока $f = 5 \text{ кГц}$. Определить напряжение на катушке U_K и конденсаторе с потерями $U_{\text{конд}}$, а также мощность, расходуемую в каждом из этих элементов. Построить векторную диаграмму напряжений и тока.

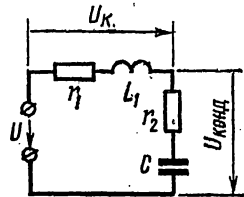


Рис. 2.23

Чему равны добротность катушки и добротность конденсатора? Определить угол потерь конденсатора.

Замечание. Напомним, что добротностью катушки называется отношение

$$\text{ние } Q_L = \frac{\omega L}{r_1}, \text{ а добротностью конденсатора — отношение } Q_C = \frac{1}{\omega C r_2}.$$

Углом потерь называют угол $\delta = \frac{\pi}{2} - |\varphi|$, где φ — разность фаз тока и напряжения на конденсаторе с потерями.

2.20. Для определения параметров эквивалентной схемы пассивного двухполюсника AB (рис. 2.24, а) были измерены напряжение $U_1 = 26$ в, ток $I_1 = 4$ а и мощность $P_1 = 40$ вт. Для определения характера эквивалентного реактивного сопротивления этого двухполюсника последовательно с ним включили конденсатор (рис. 2.24, б); в этом случае при том же приложенном напряжении приборы показали $I_2 = 5,53$ а и $P_2 = 76,5$ вт. Частота переменного тока $f = 50$ гц.

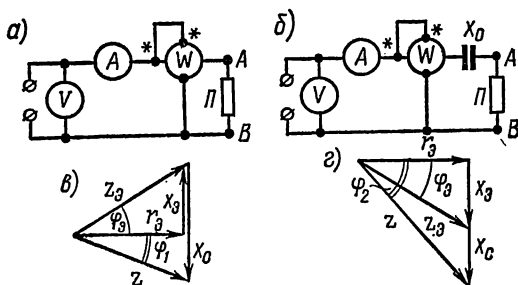


Рис. 2.24

Определить параметры эквивалентной схемы двухполюсника.

Решение. Параметры эквивалентной схемы двухполюсника:

$$r_{\text{э}} = \frac{P}{I_1^2} = \frac{40}{4^2} = 2,5 \text{ ом};$$

$$z_{\text{э}} = \frac{U_1}{I_1} = \frac{26}{4} = 6,5 \text{ ом};$$

$$|x_{\text{э}}| = \sqrt{z_{\text{э}}^2 - r_{\text{э}}^2} = \sqrt{6,5^2 - 2,5^2} = 6 \text{ ом}.$$

Из данных второго опыта найдем:

$$z = \frac{U_1}{I_2} = \frac{26}{5,53} = 4,7 \text{ ом};$$

$$|x| = \sqrt{z^2 - r_{\text{э}}^2} = \sqrt{4,7^2 - 2,5^2} = 4 \text{ ом}.$$

При неизменном напряжении, подключенном к цепи, и постоянном активном сопротивлении ток I_2 оказался больше тока I_1 . Введенное дополнительное емкостное сопротивление уменьшает общее реактивное сопротивление цепи. Это значит, что $x_{\text{э}}$ имеет индуктивный характер. Величина $L_{\text{э}} = \frac{x_{\text{э}}}{\omega} = \frac{6}{314} = 19,1$ мкн.

Неизвестную величину дополнительно введенного емкостного сопротивления x_C можно определить следующим путем. Раньше установили, что $x_s = \pm 6 \text{ ом}$, и так как характер полного реактивного сопротивления заранее не известен, то $x = +4 \text{ ом}$ либо $x = -4 \text{ ом}$. Из данных второго опыта следует, что $-x_C + x_s = x$, отсюда получаем, что $x_C = 2 \text{ ом}$ или $x_C = 10 \text{ ом}$.

Укажем, что для определения характера эквивалентного реактивного сопротивления двухполюсника x_s — неизвестная величина дополнительно вводимого емкостного сопротивления x_C — должна быть меньше $2x_s$. Это можно видеть из рис. 2.24, *в* и *г*, на которых начерчены векторные диаграммы сопротивлений, соответствующие второму опыту. Для $x_s > 0$ и при $|x_C| < |2x_s|$ $|\varphi_1| < |\varphi_s|$ (рис. 2.24, *в*), а при $x_s < 0$ $|\varphi_2| > |\varphi_s|$ (рис. 2.24, *г*). Если взять $|x_C| > |2x_s|$, то каждый из углов $|\varphi_1|$ и $|\varphi_2|$ будет больше φ_s .

Если величина дополнительно вводимого сопротивления x_C заранее известна, то она может быть взята и более $2x_s$.

2.21. Решить предыдущую задачу по данным опытов в двух случаях:

- 1) первый опыт: $U_1 = 120 \text{ в}$, $I_1 = 4,3 \text{ а}$, $P_1 = 370 \text{ вт}$;
второй опыт: $U_2 = 120 \text{ в}$, $I_2 = 1,31 \text{ а}$, $P_2 = 34,4 \text{ вт}$;
- 2) первый опыт: $U_1 = 120 \text{ в}$, $I_1 = 4,3 \text{ а}$, $P_1 = 370 \text{ вт}$;
второй опыт: $U_2 = 120 \text{ в}$, $I_2 = 2,21 \text{ а}$, $P_2 = 97,8 \text{ вт}$.

При проведении вторых опытов каждый раз вводилось емкостное сопротивление, равное 70 ом .

2.22. Приборы, подключенные к пассивному двухполюснику AB (на рис. 2.25 ключ K разомкнут), показали $U_1 = 100 \text{ в}$, $I_1 = 2 \text{ а}$, $P_1 = 160 \text{ вт}$. Для определения характера реактивного сопротивления двухполюсника параллельно ему был подключен конденсатор (ключ K замкнут), емкостное сопротивление которого $\frac{1}{\omega C} = 100 \text{ ом}$, при этом приборы показали: $U_2 = 100 \text{ в}$, $I_2 = 2,73 \text{ а}$, $P_2 = 160 \text{ вт}$. Определить эквивалентные параметры двухполюсника.

Решение. Параметры двухполюсника (см. рис. 2.25):

$$r = \frac{160}{2^2} = 40 \text{ ом}, \quad z = \frac{100}{2} = 50 \text{ ом}, \quad |x| = \sqrt{50^2 - 40^2} = 30 \text{ ом};$$

$$g = \frac{40}{40^2 + 30^2} = 0,016 \text{ сим}; \quad |b| = \frac{30}{40^2 + 30^2} = 0,012 \text{ сим}.$$

Проводимость конденсатора

$$b_C = \omega C = 0,010 \text{ сим}.$$

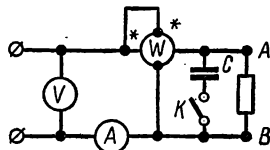


Рис. 2.25

Параметры эквивалентной схемы:

$$r_s = \frac{160}{2,73^2} = 21,6 \text{ ом}; \quad z_s = \frac{100}{2,73} = 36,7 \text{ ом};$$

$$|x_s| = \sqrt{36,7^2 - 21,6^2} = 29,7 \text{ ом}; \quad g_s = \frac{21,6}{21,6^2 + 29,7^2} = 0,016 \text{ сим};$$

$$|b_s| = \frac{29,7}{21,6^2 + 29,7^2} = 0,022 \text{ сим}.$$

Так как $|b_s| = |b| + b_C$, то, следовательно, реактивное сопротивление исследуемого двухполюсника имеет емкостный характер. Тот же результат вытекает и из следующих соображений. Так как при том же напряжении U ток после подключения конденсатора стал больше, чем до подключения, то общая проводимость цепи увеличилась. Это может быть в том случае, когда реактивная проводимость подключаемой ветви b_C имеет тот же харак-

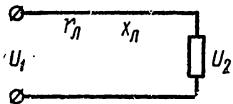


Рис. 2.26

тер, что и заданная реактивная проводимость b двухполюсника, при условии, что $|b_C| < |2b|$?

2.23. Линия передачи электрической энергии (рис. 2.26) обладает активным сопротивлением $r_l = 15 \text{ ом}$ и индуктивностью $L_l = 0,191 \text{ гн}$. В конце этой линии присоединен приемник энергии, потребляющий мощность $P_2 = 84 \text{ кВт}$ при напряжении $U_2 = 5,1 \text{ кв}$ и $\cos \varphi_2 = 0,8$ ($\varphi_2 > 0$). Частота тока $f = 50 \text{ гц}$. Определить напряжение источника U_1 , подключенного к началу линии, а также падения напряжения и потерю напряжения в линии. Чему равен к.п.д. линии передачи электрической энергии?

2.24. Генератор, питающий линию передачи электрической энергии, отдает мощность $P_1 = 27 \text{ кВт}$. Напряжение генератора $U_1 = 3 \text{ кв}$. Параметры линии передачи: $r_l = 20 \text{ ом}$, $x_l = 60 \text{ ом}$. Мощность, потребляемая приемником, подключенным в конце линии, $P_2 = 22,5 \text{ кВт}$. Определить параметры приемника.

2.25. Линия передачи имеет активное сопротивление $r_l = 2 \text{ ом}$, индуктивное $x_l = 4,8 \text{ ом}$. Напряжение в начале линии $U_1 = 1,1 \text{ кв}$.

Определить, при каком сопротивлении приемника, для которого отношение $x_{пр}/r_{пр} = 3$, в нем будет расходоваться максимальная мощность и вычислить ее величину.

К той же линии приключен приемник с постоянным активным сопротивлением $r_{пр} = 20 \text{ ом}$ и изменяющимся реактивным сопротивлением $x_{пр}$. При какой величине $x_{пр}$ приемник поглотит максимальную мощность и какова ее величина?

Определить наибольшую мощность, которую вообще можно получить при передаче по заданной линии, т. е. полагать, что могут изменяться и $r_{пр}$ и $x_{пр}$.

Указания. Если $\varphi_{\text{пр}} = \text{const}$, то мощность максимальна если $z_{\text{пр}} = z_{\text{л}}$, при этом

$$P'_{\text{пр max}} = \frac{U_1^2 \cos \varphi_{\text{пр}}}{2z_{\text{л}} [1 + \cos (\varphi_{\text{л}} - \varphi_{\text{пр}})]}$$

При изменении только реактивного сопротивления приемника в нем выделяется максимальная мощность при условии $x_{\text{пр}} = -x_{\text{л}}$, а ее величина

$$P''_{\text{пр max}} = \frac{U_1^2 r_{\text{пр}}}{(r_{\text{л}} + r_{\text{пр}})^2}$$

Наибольшая мощность, которую вообще можно получить в приемнике; будет, если сопротивление приемника сопряжено с сопротивлением линии (т. е. $r_{\text{пр}} = r_{\text{л}}$ и $x_{\text{пр}} = -x_{\text{л}}$). Величина этой мощности

$$P_{\text{пр max}} = \frac{U_1^2}{4r_{\text{л}}}$$

Укажем, что те же условия сохраняются при передаче мощности во внешнюю цепь генератора с постоянной э. д. с. и постоянным внутренним сопротивлением $z_{\text{вн}}$.

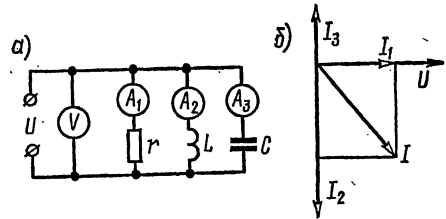


Рис. 2.27

2.26. По показаниям приборов, включенных в цепь (рис. 2.27, а), определить ток, проходящий в неразветвленном участке цепи, сопротивление каждой ветви и полное сопротивление цепи. Заменить данную цепь эквивалентной последовательной цепью r_3, x_3 . Построить векторную диаграмму.

Даны: $U = 120 \text{ в}$, $I_1 = 3 \text{ а}$, $I_2 = 6 \text{ а}$, $I_3 = 2 \text{ а}$.

Решение. Сопротивления и проводимости отдельных ветвей и всей цепи:

$$r = \frac{U}{I_1} = \frac{120}{3} = 40 \text{ ом}; \quad g = \frac{1}{r} = \frac{1}{40} \text{ сим};$$

$$x_L = \frac{U}{I_2} = \frac{120}{6} = 20 \text{ ом}; \quad b_L = \frac{1}{x_L} = \frac{1}{20} \text{ сим};$$

$$x_C = \frac{U}{I_3} = \frac{120}{2} = 60 \text{ ом}; \quad b_C = \frac{1}{x_C} = \frac{1}{60} \text{ сим};$$

$$g_3 = g = \frac{1}{40} \text{ сим};$$

$$b_3 = b_L - b_C = \frac{1}{20} - \frac{1}{60} = \frac{1}{30} \text{ сим (индуктивный)};$$

$$y_3 = \sqrt{g_3^2 + b_3^2} = \sqrt{\left(\frac{1}{40}\right)^2 + \left(\frac{1}{30}\right)^2} = \frac{1}{24} \text{ сим};$$

$$z_3 = \frac{1}{y_3} = 24 \text{ ом}.$$

Заданная схема цепи может быть заменена другой, ей эквивалентной и состоящей из последовательно соединенных элементов, параметры которой по (2.19) равны:

$$r_3 = \frac{g_3}{y_3^2} = \frac{40}{\left(\frac{1}{24}\right)^2} = 14,4 \text{ ом};$$

$$x_3 = \frac{b_3}{y_3^2} = \frac{30}{\left(\frac{1}{24}\right)^2} = 19,2 \text{ ом}.$$

Проверка.

$$z_3 = \sqrt{14,4^2 + 19,2^2} = 24 \text{ ом}.$$

Определяем ток в неразветвленной части цепи:

$$I = \frac{U}{z_3} = \frac{120}{24} = 5 \text{ а}.$$

Векторная диаграмма построена на рис. 2.27, б. Из нее находим тот же ток

$$I = \sqrt{I_1^2 + (I_2 - I_3)^2} = 5 \text{ а}.$$

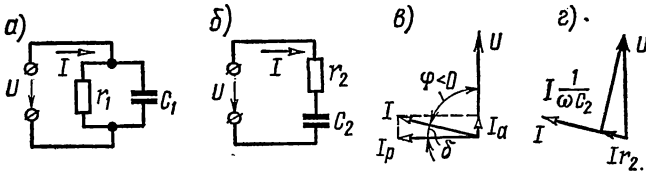


Рис. 2.28

2.27. Для определения параметров конденсатора с потерями его подключили к источнику синусоидального напряжения $U = 19,5 \text{ в}$ ($f = 50 \text{ кгц}$). При этом амперметр показал ток $I = 0,3 \text{ а}$, а ваттметр — мощность $P = 153 \text{ мвт}$. Определить r_1 , C_1 и r_2 , C_2 двух схем (рис. 2.28, а и б), эквивалентных конденсатору с потерями. Чему равны тангенс угла потерь указанного конденсатора и его добротность?

Решение. Определим сдвиг фаз между напряжением U и током I :

$$\cos \varphi = \frac{P}{UI} = \frac{153 \cdot 10^{-3}}{19,5 \cdot 0,3} = 0,0262; \quad \varphi = 88^\circ 30'.$$

Из схемы рис. 2.28, а видно, что $P = UI \cos \varphi = UI_a$, откуда найдем активную составляющую тока

$$I_a = \frac{P}{UI} = \frac{0,153}{19,5} = 7,85 \cdot 10^{-3} \text{ а} = 7,85 \text{ ма.}$$

Так как

$$I_a = Ug = U \frac{1}{r_1} = 7,85 \cdot 10^{-3} \text{ а,}$$

то

$$r_1 = \frac{19,5 \cdot 10^3}{7,85} = 2,48 \cdot 10^3 \text{ ом} = 2,48 \text{ ком.}$$

Если реактивный ток

$$I_p = I \sin \varphi = 0,3 \cdot 0,99966 \approx 0,3 \text{ а}$$

и так как

$$I_p = Ub_c = U\omega C_1 = 0,3 \text{ а,}$$

то

$$C_1 = \frac{0,3}{19,5 \cdot 6,28 \cdot 50 \cdot 10^3} = 49 \cdot 10^{-9} \text{ ф} = 49 \text{ нф.}$$

Для схемы рис. 2.28, б:

$$r_2 = \frac{P}{I^2} = \frac{15,3 \cdot 10^{-3}}{0,3^2} = 1,7 \text{ ом;}$$

$$z = \frac{U}{I} = \frac{19,5}{0,3} = 65 \text{ ом;}$$

$$|x_2| = \sqrt{z^2 - r_2^2} = \sqrt{65^2 - 1,7^2} \approx 65 \text{ ом.}$$

Отсюда

$$|x_2| = \frac{1}{\omega C_2} = 65 \text{ ом;} \quad C_2 = \frac{1}{65 \cdot 2\pi \cdot 50 \cdot 10^3} = 49 \cdot 10^{-9} = 49 \text{ нф.}$$

Угол потерь δ и его тангенс соответственно равны:

$$\delta = 90^\circ - |\varphi| = 90^\circ - 88^\circ 30' = 1^\circ 30',$$

$$\operatorname{tg} \delta = \frac{1}{\omega C_2 r_2} = \operatorname{tg} 1^\circ 30' = 0,0262.$$

Для схем рис. 2.28, а и б даны соответствующие векторные диаграммы на рис. 2.28, в и г.

Добротность конденсатора

$$Q_C = \frac{|x_2|}{r_2} = \frac{65}{1,7} = 38 \left(\text{или } Q_C = \frac{b_c}{g} \right).$$

2.28. По показаниям трех амперметров, включенных в цепь (рис. 2.29), определить мощность, расходуемую в ветви, состоящей из последовательно соединенных r_1 и L_1 . Показания приборов: $A - 6,5$ а, $A_1 - 3,5$ а, $A_2 = 4$ а. Активное сопротивление $r_2 = 30$ ом.

Указание. Задачу проще всего решить, если сначала построить векторную диаграмму.

2.29. Две параллельные ветви, сопротивления которых $r_1 = 8$ ом, $x_L = 6$ ом, $r_2 = 12$ ом, $x_C = 5$ ом, присоединены к источнику напряжения $U = 130$ в (рис. 2.30, а). Определить токи I_1 , I_2 , I и эк-

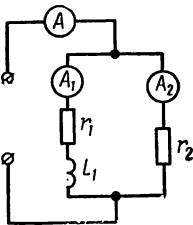


Рис. 2.29

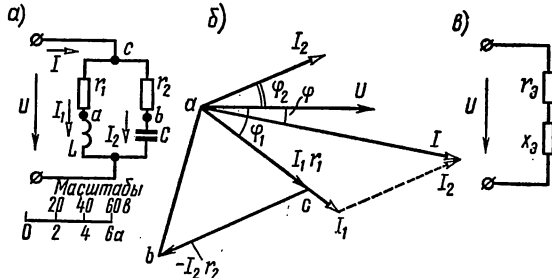


Рис. 2.30

вивалентные параметры схемы, состоящей из последовательно соединенных активного и реактивного сопротивлений. Построить топографическую векторную диаграмму. Вычислить активные и реактивные мощности каждой ветви и всей цепи. Найти напряжение между точками a и b .

Решение. Проводимости отдельных ветвей и всей цепи вычислим по формулам (2.18):

$$g_1 = \frac{8}{8^2 + 6^2} = 0,08 \text{ сим}; \quad b_1 = \frac{6}{8^2 + 6^2} = 0,06 \text{ сим};$$

$$g_2 = \frac{12}{12^2 + 5^2} = 0,071 \text{ сим}; \quad b_2 = \frac{-5}{12^2 + 5^2} = -0,0296 \text{ сим};$$

$$g_3 = g_1 + g_2 = 0,151 \text{ сим}; \quad b_3 = b_1 + b_2 = 0,0304 \text{ сим (индуктивный)};$$

$$y_3 = \sqrt{0,151^2 + 0,0304^2} = 0,154 \text{ сим}.$$

Токи в ветвях и в неразветвленной части цепи:

$$I_1 = \frac{130}{\sqrt{8^2 + 6^2}} = 13 \text{ а}; \quad \text{tg } \varphi_1 = \frac{6}{8} = 0,75; \quad \varphi_1 = 36^\circ 50';$$

$$I_2 = \frac{130}{\sqrt{12^2 + 5^2}} = 10 \text{ а}; \quad \text{tg } \varphi_2 = \frac{-5}{12} = -0,4167;$$

$$\varphi_2 = \text{arctg}(-0,4167) = -22^\circ 40';$$

$$I = Uy_0 = 130 \cdot 0,154 = 20 \text{ а}; \quad \operatorname{tg} \varphi_0 = \frac{0,0304}{0,151} = 0,201;$$

$$\varphi_0 = 11^\circ 20'$$

На рис. 2.30, б построена топографическая векторная диаграмма: отложен вектор \dot{U} , от него под углом φ_1 в сторону отставания отложен вектор тока \dot{I}_1 и в фазе с ним вектор $\dot{I}_1 r_1 = \dot{U}_{ca}$ (его конец — точка *c*), затем от вектора \dot{U} в сторону опережения на угол φ_2 отложен вектор тока \dot{I}_2 и в противофазе с ним от точки *c* вектор $-\dot{I}_2 r_2 = U_{bc}$ (его конец — точка *b*).

Параметры схемы, эквивалентной заданной и состоящей из последовательно соединенных сопротивлений (рис. 2.30, в), определяются по формуле (2.19):

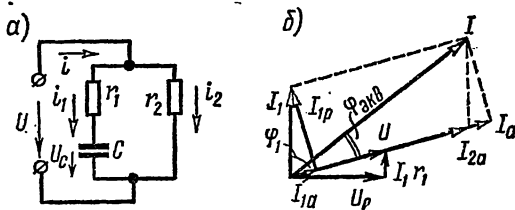


Рис. 2.31

$$r_0 = \frac{0,151}{0,154^2} = 6,33 \text{ ом}; \quad x_0 = \frac{0,0304}{0,154^2} = 1,28 \text{ ом (индуктивный)}.$$

Активные и реактивные мощности каждой ветви и во всей цепи:

$$P_1 = I_1^2 r_1 = 13^2 \cdot 8 = 1352 \text{ вт};$$

$$P_2 = I_2^2 r_2 = 1200 \text{ вт};$$

$$Q_1 = I_1^2 x_1 = 13^2 \cdot 6 = 1014 \text{ вар};$$

$$Q_2 = I_2^2 x_2 = -500 \text{ вар};$$

$$P = UI \cos \varphi_0 = 130 \cdot 20 \cdot \cos 11^\circ 20' = 2552 \text{ вт};$$

$$Q = UI \sin \varphi_0 = 130 \cdot 20 \cdot \sin 11^\circ 20' = 514 \text{ вар}.$$

Проверка показывает, что $P = P_1 + P_2$ и $Q = Q_1 + Q_2$.

Наконец, найдем напряжение между точками *a* и *b*. Оно (в принятом масштабе) определяется отрезком *ab* (см. рис. 2.30, б):

$$U_{ab} = \sqrt{(I_1 r_1)^2 + (I_2 r_2)^2 - 2(I_1 r_1)(I_2 r_2) \cos(\varphi_1 - \varphi_2)} = 112 \text{ в}.$$

Тот же результат может быть получен непосредственным изменением отрезка *ab* в масштабе, принятом для напряжения.

2.30. Какое напряжение приложено к цепи (рис. 2.31, а), если напряжение на конденсаторе $U_C = 192 \text{ в}$, а сопротивления элементов цепи равны $r_1 = 28 \text{ ом}$, $r_2 = 50 \text{ ом}$ и $x_C = 96 \text{ ом}$?

Вычислить все токи и параметры эквивалентной схемы, состоящей из последовательно соединенных элементов. Написать уравнения мгновенных значений i_1 , i_2 и u , если $u_C = 192 \sqrt{2} \sin \omega t \text{ в}$.

Решение. Ток, проходящий в левой ветви,

$$I_1 = U_C \omega C = \frac{192}{96} = 2 \text{ а.}$$

Напряжение, приложенное к цепи,

$$U = I_1 \sqrt{r_1^2 + x_C^2} = 2 \sqrt{28^2 + 96^2} = 200 \text{ в.}$$

Ток правой ветви

$$I_2 = \frac{U_2}{r_2} = \frac{200}{50} = 4 \text{ а.}$$

Ток в неразветвленной части цепи найдем из уравнений:

$$I_{1a} = U g_1 = 200 \frac{28}{28^2 + 96^2} = 0,56 \text{ а;}$$

$$I_{2a} = U g_2 = 200 \frac{1}{50} = 4 \text{ а;}$$

$$I_a = I_{1a} + I_{2a} = 4,56 \text{ а;}$$

$$I_p = I_{1p} = -200 \frac{96}{28^2 + 96^2} = -1,92 \text{ а;}$$

$$I = \sqrt{I_a^2 + I_p^2} = \sqrt{4,56^2 + 1,92^2} = 5 \text{ а.}$$

Параметры эквивалентной схемы:

$$g_3 = g_1 + g_2 = 0,0228 \text{ сим; } b_3 = b_1 = -0,0096 \text{ сим;}$$

$$y_3 = \sqrt{g_3^2 + b_3^2} = 0,0247 \text{ сим; } z_3 = \frac{1}{y_3} = 40,4 \text{ ом;}$$

$$r_3 = \frac{g_3}{y_3^2} = \frac{0,0228}{0,0247^2} = 37,3 \text{ ом;}$$

$$x_3 = \frac{b_3}{y_3^2} = \frac{-0,0096}{0,0247^2} = -15,7 \text{ ом.}$$

Наконец, запишем уравнения мгновенных значений всех токов и приложенного к цепи напряжения, полагая, что угол начальной фазы напряжения на конденсаторе равен нулю:

$$u_C = 192 \sqrt{2} \sin \omega t \text{ в.}$$

Ток i_1 опережает напряжение на конденсаторе u_C на 90° , поэтому

$$i_1 = I_{1m} \sin(\omega t + 90^\circ) = 2 \sqrt{2} \cos \omega t \text{ а.}$$

Приложенное к цепи напряжение u отстает от тока i_1 на угол φ_1 , определяемый из соотношения

$$\operatorname{tg} \varphi_1 = \frac{-1}{\omega C r_1} = \frac{-96}{28} = -3,43; \quad \varphi_1 = -73^\circ 45';$$

$$u = 200 \sqrt{2} \sin(\omega t + 90^\circ - 73^\circ 45') = 200 \sqrt{2} \sin(\omega t + 16^\circ 15') \text{ в.}$$

Ток i_2 совпадает по фазе с приложенным напряжением, поэтому

$$i_2 = 4 \sqrt{2} \sin(\omega t + 16^\circ 15') \text{ а.}$$

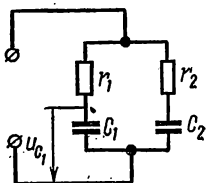


Рис. 2.32

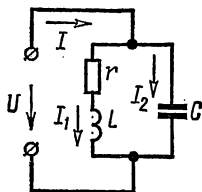


Рис. 2.33

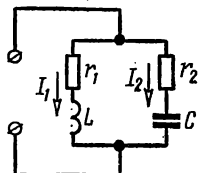


Рис. 2.34

Ток в неразветвленной части цепи

$$\begin{aligned} i &= i_1 + i_2 = 2 \sqrt{2} \sin(\omega t + 90^\circ) + 4 \sqrt{2} \sin(\omega t + 16^\circ 15') = \\ &= 5 \sqrt{2} \sin(\omega t + 39^\circ 5') \text{ а.} \end{aligned}$$

На рис. 2.31, б начерчена векторная диаграмма, в которой по горизонтальной оси отложен вектор напряжения на конденсаторе U_C , имеющий заданную начальную фазу, равную нулю.

2.31. Мгновенное значение напряжения на конденсаторе изменяется по закону $u_{C1} = 35 \sqrt{2} \sin \omega t$ в. Написать уравнения мгновенных значений токов i_1 , i_2 и i , приложенного к цепи напряжения u (рис. 2.32), и построить векторную диаграмму. Параметры схемы: $r_1 = 48$ ом, $x_1 = -14$ ом, $r_2 = 15$ ом, $x_2 = -20$ ом.

2.32. Цепь, изображенная на рис. 2.33, подключена к источнику синусоидального напряжения $U = 96$ в. Сопротивления цепи $r = 4$ ом, $x_L = 5$ ом, $x_C = 6$ ом. Определить все токи, активную реактивную и полную мощности. Подсчитать эквивалентные сопротивления схемы замещения, состоящей из последовательно соединенных активного и реактивного сопротивлений, и начертить ее. Построить векторную диаграмму.

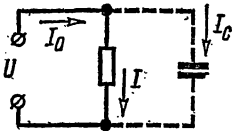
2.33. По реактивной катушке, сопротивления которой равны $r_1 = 12$ ом и $x_L = 16$ ом, проходит ток $I_1 = 6$ а (рис. 2.34). Параллельно к ней присоединена ветвь, состоящая из последовательно соединенных активного сопротивления $r_2 = 24$ ом и емкостного $x_C = 7$ ом. Найти ток в неразветвленной части цепи и приложенное к ней напряжение. Подсчитать параметры эквивалентной схемы, состоящей из последовательно соединенных активного и реактивного сопротивлений, и начертить ее.

2.34. Приемник энергии потребляет мощность $P = 2 \text{ кВт}$ при напряжении $U = 220 \text{ в}$ и $\cos \varphi = 0,65$ (индуктивный). Частота переменного тока $f = 50 \text{ гц}$. Найти емкость и реактивную мощность батареи конденсаторов, которые устанавливаются для того, чтобы повысить коэффициент мощности (индуктивный) до 0,9 (рис. 2.35, а).

Решение. В приемнике энергии проходит ток

$$I = \frac{P}{U \cos \varphi} = \frac{2 \cdot 1000}{220 \cdot 0,65} = 14 \text{ а.}$$

а)



После улучшения коэффициента мощности ($\cos \varphi_0 = 0,90$) в неразветвленном участке цепи проходит ток I_0 , который может быть найден из соотношения (см. векторную диаграмму рис. 2.35, б)

$$I_0 \cos \varphi_0 = I \cos \varphi,$$

б)

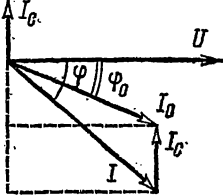


Рис. 2.35

откуда

$$I_0 = I \frac{\cos \varphi}{\cos \varphi_0} = 14 \frac{0,65}{0,90} = 10,1 \text{ а.}$$

По известным $\cos \varphi = 0,65$ и $\cos \varphi_0 = 0,9$ определим:

$$\varphi = 49^\circ 30'; \quad \varphi_0 = 25^\circ 50'; \quad \sin \varphi = 0,760, \\ \sin \varphi_0 = 0,436.$$

Через конденсатор проходит ток I_C , величина которого может быть найдена как разность проекций векторов токов I и I_0 на вертикальную ось (рис. 2.35, б):

$$I_C = I \sin \varphi - I_0 \sin \varphi_0 = 14 \cdot 0,760 - 10,1 \cdot 0,436 = 6,2 \text{ а.}$$

Искомые емкость и реактивная мощность батареи конденсаторов:

$$C = \frac{I_C}{\omega U} = \frac{6,2}{314 \cdot 220} \approx 90 \text{ мкф};$$

$$Q_C = I_C U = 6,2 \cdot 220 \approx 1360 \text{ вар.}$$

2.35. Для приемника энергии предыдущей задачи найти емкость и реактивную мощность батареи конденсаторов, необходимую для повышения коэффициента мощности до единицы.

Глава третья

СИМВОЛИЧЕСКИЙ МЕТОД РАСЧЕТА ЦЕПЕЙ СИНУСОИДАЛЬНОГО ТОКА

ОСНОВНЫЕ ПОЛОЖЕНИЯ И СООТНОШЕНИЯ

1. **Комплексные числа.** Комплексное число, соответствующее точке, в которой лежит конец вектора A (рис. 3.1), может быть написано в следующих формах:

$$\text{алгебраической } A = a_1 + ja_2; \quad (3.1a)$$

$$\text{тригонометрической } A = a(\cos \alpha + j \sin \alpha); \quad (3.1б)$$

$$\text{показательной } A = ae^{j\alpha} = a \exp(j\alpha); \quad (3.1в)$$

$$\text{полярной (угловой) } A = a \angle \alpha. \quad (3.1г)$$

$$\text{Здесь } a_1 = a \cos \alpha = \operatorname{Re}[A]^* \quad (3.2a)$$

— вещественная часть комплексного числа A ;

$$a_2 = a \sin \alpha = \operatorname{Im}[A]^* \quad (3.2б)$$

— мнимая часть комплексного числа;

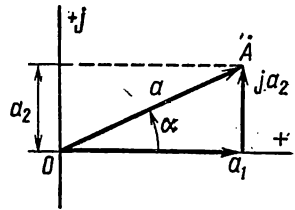


Рис. 3.1

$$j = \sqrt{-1} = e^{j \frac{\pi}{2}} \quad (3.2в)$$

— мнимая единица или оператор поворота на угол $\frac{\pi}{2} = 90^\circ$ (умножение на j сводится к повороту вектора против часовой стрелки на угол $\frac{\pi}{2}$, а умножение на $-j = e^{-j \frac{\pi}{2}}$ — к повороту вектора на прямой угол по часовой стрелке);

$$a = |A| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2} = \frac{a_2}{\sin \alpha} = \frac{a_1}{\cos \alpha} \quad (3.2г)$$

— модуль комплексного числа A (всегда положителен);

$$\alpha = \operatorname{arctg} \frac{a_2}{a_1} \quad (3.2д)$$

— угол (или аргумент) комплексного числа.

* Re и Im — сокращенные записи английских терминов real (реальный, действительный) и imaginary (мнимый) или соответствующих французских терминов l (reelle) и imaginaire, а также немецких — real и imaginär.

Формула Эйлера

$$\cos \alpha \pm j \sin \alpha = e^{\pm j\alpha}. \quad (3.3)$$

Комплексное число $\overset{*}{A} = a_1 - ja_2 = ae^{-j\alpha}$ называется комплексно-сопряженным числу $A = a_1 + ja_2 = ae^{j\alpha}$. Произведение комплексно-сопряженных чисел — число вещественное, равное квадрату их модуля:

$$A\overset{*}{A} = ae^{j\alpha} ae^{-j\alpha} = a^2.$$

$e^{j\varphi}$ — оператор поворота на угол φ .

Умножение комплексного числа A на число $e^{j\varphi}$ сводится к повороту вектора A в комплексной плоскости на угол φ : $Ae^{j\varphi} = ae^{j\alpha} e^{j\varphi} = ae^{j(\alpha + \varphi)}$.

2. Действия над комплексными числами. Сложение и вычитание комплексных чисел:

$$A + B = (a_1 + ja_2) \pm (b_1 + jb_2) = (a_1 \pm b_1) + j(a_2 \pm b_2). \quad (3.4)$$

Умножение:

$$\begin{aligned} AB &= (a_1 + ja_2)(b_1 + jb_2) = (a_1b_1 - a_2b_2) + j(a_2b_1 + a_1b_2) = \\ &= ae^{j\alpha} be^{j\beta} = abe^{j(\alpha + \beta)}. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Деление:

$$\begin{aligned} \frac{A}{B} &= \frac{\overset{*}{A}\overset{*}{B}}{\overset{*}{B}\overset{*}{B}} = \frac{a_1 + ja_2}{b_1 + jb_2} = \frac{a_1b_1 + a_2b_2}{b_1^2 + b_2^2} + j \frac{a_2b_1 - a_1b_2}{b_1^2 + b_2^2} = \frac{ae^{j\alpha}}{be^{j\beta}} = \\ &= \frac{a}{b} e^{j(\alpha - \beta)}. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Возведение в степень:

$$A^n = (ae^{j\alpha})^n = a^n e^{j\alpha n} = a^n (\cos n\alpha + j \sin n\alpha). \quad (3.7)$$

Извлечение корня:

$$\sqrt[n]{A} = \sqrt[n]{ae^{j\alpha}} = \sqrt[n]{a} e^{j \frac{\alpha + 2k\pi}{n}}, \quad (3.8)$$

где k — целое число.

При n целом и положительном корень имеет n различных значений, соответствующих числам $k = 0, 1, 2, \dots, (n - 1)$ (многозначность извлечения корня).

3. Вращающийся вектор. Проекция вращающегося против часовой стрелки с постоянной угловой скоростью ω вектора \dot{V}_m на мнимую ось числовой плоскости дает мгновенное значение синусоидальной

величины v (рис. 3.2). Этот вращающийся вектор записывается в виде $V_m e^{j(\omega t + \alpha)}$. Угол α показывает положение вектора \dot{V}_m в начальный момент $t = 0$ ($\dot{V}_m = V_m e^{j\alpha}$). Числовая величина мнимой части выражения $V_m e^{j(\omega t + \alpha)}$ дает мгновенное значение синусоидально изменяющейся величины

$$v = V_m \sin(\omega t + \alpha) = \text{Im} [V_m e^{j(\omega t + \alpha)}] = \text{Im} (\dot{V}_m e^{j\omega t}).$$

Символ мнимой части Im иногда опускают и последнее выражение записывают в форме $v \doteq \dot{V}_m e^{j\omega t}$, где \doteq — знак соответствия. Комплексное число $\dot{V}_m = V_m e^{j\alpha}$ называется комплексной амплитудой.

Комплексное действующее значение, т. е. комплексное число, $\dot{V} = V e^{j\alpha}$, сопоставляемое переменной синусоидальной величине v . Модуль комплексного действующего значения V совпадает с действующим значением соответствующей синусоидальной величины, а аргумент совпадает с начальной фазой этой величины. Комплексные амплитуда и действующее значение связаны равенством

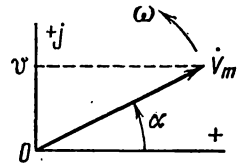


Рис. 3.2

$$\dot{V} = \frac{\dot{V}_m}{\sqrt{2}}. \quad (3.9)$$

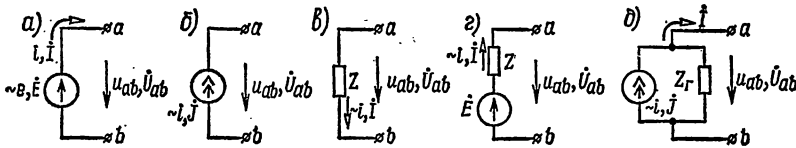


Рис. 3.3

4. **Источник напряжения** (рис. 3.3, а) с э. д. с. $e = E_m \sin(\omega t + \epsilon)$ (амплитуда э. д. с. E_m и начальная фаза ϵ) можно полностью охарактеризовать, задав комплексную амплитуду э. д. с. $\dot{E}_m = E_m e^{j\epsilon}$ или комплексное действующее значение э. д. с. $\dot{E} = E e^{j\epsilon}$ ($E = \frac{E_m}{\sqrt{2}}$).

Источник тока (рис. 3.3, б) $i = J_m \sin(\omega t + \psi)$ полностью определяется комплексной амплитудой тока $\dot{J}_m = J_m e^{j\psi}$ или его комплексным действующим значением $\dot{J} = J e^{j\psi}$, где $J = \frac{J_m}{\sqrt{2}}$.

5. **Пассивный элемент электрической цепи** (рис. 3.3, в) определяется своим комплексным сопротивлением $Z = z e^{j\varphi}$ — комплексным

числом, равным отношению комплексного напряжения на зажимах данного элемента к комплексному току этого элемента:

$$Z = \frac{\dot{U}}{i} = r + jx = ze^{j\varphi}, \quad (3.10)$$

где \dot{U} и i — комплексные действующие значения напряжения и тока;

r — вещественная часть комплексного сопротивления Z , равная активному сопротивлению цепи;

x — мнимая часть Z , равная реактивному сопротивлению цепи;

z — модуль комплексного сопротивления цепи, равный полному сопротивлению цепи;

φ — аргумент Z , равный углу сдвига фаз между током и напряжением.

Отношение комплексного тока в данной цепи к комплексному напряжению на ее зажимах называется комплексной проводимостью электрической цепи

$$Y = \frac{i}{\dot{U}} = g - jb = ye^{-j\varphi}, \quad (3.11)$$

где g — вещественная часть Y , равная активной проводимости цепи;

b — мнимая часть Y , равная реактивной проводимости цепи;

y — модуль комплексной проводимости цепи, равный полной проводимости цепи; φ — аргумент Y , равный углу сдвига фаз между напряжением и током, взятому с обратным знаком.

Комплексная проводимость обратна комплексному сопротивлению цепи:

$$Y = \frac{1}{Z}. \quad (3.12)$$

6. Закон Ома для не содержащего э. д. с. участка цепи, сопротивление которого Z (см. рис. 3.3, в), принимая положительное направление напряжения, совпадающее с положительным направлением тока, имеет вид

$$\dot{U} = \dot{U}_{ab} = -\dot{U}_{ba} = \dot{\varphi}_a - \dot{\varphi}_b = iZ. \quad (3.13a)$$

Для ветви, содержащей э. д. с. и сопротивление (например, для ветви рис. 3.3, з),

$$i = \frac{\dot{\varphi}_b - \dot{\varphi}_a + \dot{E}}{Z_{ba}} = \frac{\dot{U}_{ba} + \dot{E}}{Z} = \frac{\dot{E} - \dot{U}_{ab}}{Z}. \quad (3.13б)$$

7. Законы Кирхгофа. Для записи уравнений на основании законов Кирхгофа надо выбрать положительные направления для всех токов и обозначить их на схеме.

Первый закон Кирхгофа в применении к узлу электрической цепи имеет вид

$$\sum_{k=1}^n \dot{I}_k = 0. \quad (3.14)$$

При записи этого уравнения токи, направленные к узлу, следует записать со знаком плюс, а направленные от узла — со знаком минус (или наоборот).

Второй закон Кирхгофа применяется к замкнутому контуру цепи и имеет вид

$$\sum_{k=1}^n \dot{E}_k = \sum_{k=1}^n \dot{I}_k Z_k, \quad (3.15)$$

где $\sum_{k=1}^n \dot{E}_k$ — алгебраическая сумма комплексных э. д. с. источников

напряжения. Со знаком плюс записываются те из них, положительные направления которых совпадают с выбранным направлением обхода контура; э. д. с., имеющие направления, противоположные обходу контура, записываются со знаком минус;

$\sum_{k=1}^n \dot{I}_k Z_k$ — падения напряжений на комплексных сопротивлениях

Z_k отдельных участков. Со знаком плюс берутся те, для которых направление тока совпадает с направлением обхода, а со знаком минус — те, для которых направление тока противоположно направлению обхода контура.

При составлении уравнений по второму закону Кирхгофа следует выбирать независимые контуры, не содержащие источников тока.

8. Последовательное и параллельное соединение сопротивлений.

При последовательном соединении участков цепи комплексное эквивалентное сопротивление равно сумме комплексных сопротивлений отдельных участков:

$$Z = \sum_{k=1}^n Z_k. \quad (3.16)$$

При параллельном соединении ветвей цепи комплексная эквивалентная проводимость равна сумме комплексных проводимостей ветвей:

$$Y = \sum_{k=1}^n Y_k. \quad (3.17)$$

В частном случае двух параллельно соединенных сопротивлений Z_1 и Z_2 эквивалентное комплексное сопротивление

$$Z = \frac{Z_1 Z_2}{Z_1 + Z_2}. \quad (3.18)$$

Комплексные токи, проходящие в каждой из двух параллельных ветвей, могут быть рассчитаны через комплексный ток \dot{I} , проходящий в неразветвленной части цепи, и комплексные сопротивления ветвей по формулам:

$$\dot{I}_1 = \dot{I} \frac{Z_2}{Z_1 + Z_2}, \quad \dot{I}_2 = \dot{I} \frac{Z_1}{Z_1 + Z_2}. \quad (3.19)$$

9. Комплексная мощность

$$\tilde{S} = \dot{U} \dot{I}^* = UI \cos \varphi + jUI \sin \varphi = P + jQ = Se^{j\varphi}, \quad (3.20a)$$

где $S = UI$ — полная мощность;

$P = \operatorname{Re}[\tilde{S}] = \operatorname{Re}[\dot{U} \dot{I}^*] = UI \cos \varphi$ — активная мощность;

$Q = \operatorname{Im}[\tilde{S}] = UI \sin \varphi$ — реактивная мощность;

\dot{I}^* — сопряженный комплекс тока.

Баланс мощностей

$$\sum_{k=1}^n (\dot{E}_k \dot{I}_k^* + \dot{U}_k \dot{J}_k^*) = \sum_{k=1}^n [I_k^2 r_k + jI_k^2 (x_{Lk} - x_{Ck})], \quad (3.20, б)$$

здесь \dot{U}_k — напряжение на источнике тока (оно определяется расчетом цепи внешней по отношению к зажимам источника тока);

\dot{J}_k^* — комплекс тока, сопряженный току \dot{J}_k источника тока;

$\sum_{k=1}^n \dot{E}_k \dot{I}_k^*$ — алгебраическая сумма; здесь положительны те из

слагаемых, для которых направления действия э. д. с.

\dot{E}_k и соответствующего тока \dot{I}_k совпадают, в противном случае слагаемое отрицательно;

$\sum_{k=1}^n \dot{U}_k \dot{J}_k^*$ — алгебраическая сумма; здесь положительны те из

слагаемых, для которых напряжение на источнике

тока \dot{U}_k и его ток \dot{J}_k совпадают по направлению (как, например, на рис. 3.3, а—д), в противном случае слагаемое отрицательно;

$\sum I_k^2 r_k$ — арифметическая сумма; здесь должны быть учтены как внешние сопротивления, так и сопротивления самих источников энергии.

Примеры приведены в задачах 3.5, 3.16, 3.20, 3.43 и 3.45.

10. **Изображения источников электрической энергии.** Как и для цепей постоянного тока, источник электрической энергии переменного тока (с потерями) может быть изображен либо в виде генератора напряжения (см. рис. 3.3, *з*), параметры которого \dot{E}_r и Z_r , либо в виде генератора тока (см. рис. 3.3, *д*) с параметрами \dot{j} и Z_r (см. основные положения и соотношения гл. 1 п. 1).

Переход от генератора напряжения к эквивалентному генератору тока и обратно осуществляется по формулам:

$$\dot{j} = \frac{\dot{E}_r}{Z_r}; \quad \dot{E}_r = \dot{j} Z_r. \quad (3.21)$$

11. При расчете цепей переменного тока посредством комплексных чисел остаются справедливыми все методы расчета, применяемые для расчета цепей постоянного тока (см. основные положения и соотношения, гл. 1 п. 4). При этом во всех уравнениях, приведенных в гл. 1, все э. д. с., напряжения, потенциалы, токи, сопротивления и проводимости должны быть записаны в комплексной форме.

Примеры приведены в задачах 3.16, 3.43 и 3.45.

УПРАЖНЕНИЯ И ЗАДАЧИ

А. Различные формы записи комплексных величин.

Активная и реактивная составляющие напряжения и тока.

Последовательное, параллельное и смешанное соединения сопротивлений.

Активная, реактивная и полная мощности.

Векторные и топографические диаграммы

3.1. Записать в показательной, тригонометрической, алгебраической и полярной формах выражения комплексных действующих значений тока и напряжения, мгновенные значения которых:

$$u = 100 \sqrt{2} \sin(\omega t + 15^\circ) \text{ в};$$

$$i = 5 \sqrt{2} \sin(\omega t - 20^\circ) \text{ а}.$$

3.2. Пользуясь счетной линейкой, представить в показательной форме следующие комплексные числа:

- 1) $3,2 \pm j 1,25$; 2) $1,25 \pm j 3,2$; 3) $-3,2 \pm j 1,25$; 4) $-1,25 \pm j 3,2$; 5) $3,2 + j 12,5$; 6) $3,2 - j 0,125$; 7) $0,125 + j 3,2$; 8) $-0,125 + j 3,2$; 9) $0,32 - j 1,25$; 10) $23 + j 0,06$; 11) $-2,8 - j 64$.

3.3. Пользуясь счетной линейкой, записать в алгебраической форме следующие комплексные числа:

- 1) $32e^{\pm j19^\circ}$; 2) $32e^{\pm j71^\circ}$; 3) $32e^{\pm j161^\circ}$; 4) $-32e^{\pm j2^\circ 35'}$;
 5) $32e^{\pm j87^\circ 25'}$; 6) $32e^{j0^\circ 43'}$; 7) $32e^{-j0^\circ 12'}$; 8) $32e^{j92^\circ 35'}$; 9) $32e^{-j177^\circ 25'}$;
 10) $7,3e^{-j86^\circ 40'}$; 11) $150e^{j191^\circ}$; 12) $28e^{-j97^\circ 30'}$; 13) e^j ; 14) $10e^{-j0,5}$.

У к а з а н и е. См. приложение П2.

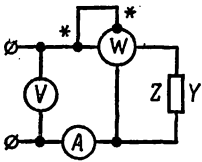


Рис. 3.4

3.4. Приборы, подключенные к цепи (рис. 3.4), дали следующие показания: $U = 65$ в; $I = 5$ а; $P = 300$ вт.

Вычислить комплексные сопротивления Z и комплексные проводимости Y цепи для случаев: а) $\varphi > 0$; б) $\varphi < 0$.

Решение. Модуль сопротивления и его аргумент определяются по формулам

$$z = \frac{U}{I} = \frac{65}{5} = 13 \text{ ом};$$

$$\cos \varphi = \frac{P}{UI} = \frac{300}{65 \cdot 5} = 0,923; \quad \varphi = \pm 22^\circ 40'.$$

Искомые комплексные сопротивления и проводимости цепи:

а) $\varphi > 0$:

$$\begin{aligned} Z &= ze^{j\varphi} = 13e^{j22^\circ 40'} = 13 \cos 22^\circ 40' + j 13 \sin 22^\circ 40' = \\ &= 13 \cdot 0,923 + j 13 \cdot 0,385 = (12 + j5) \text{ ом}; \end{aligned}$$

$$Y = \frac{1}{Z} = \frac{1}{13e^{j22^\circ 40'}} = 0,077e^{-j22^\circ 40'} = (7,1 - j2,96) 10^{-2} \text{ сим};$$

б) $\varphi < 0$:

$$Z = 13e^{-j22^\circ 40'} = (12 - j5) \text{ ом};$$

$$Y = (7,1 + j2,96) \cdot 10^{-2} \text{ сим}.$$

3.5. Комплексное напряжение и ток пассивного двухполюсника имеют

$$\dot{U} = (80 + j60) \text{ в} \quad \text{и} \quad \dot{I} = (24 - j7) \text{ а};$$

Вычислить комплексные сопротивление Z , проводимость Y и указать, каковы эквивалентные параметры двухполюсника. Чему равен сдвиг фаз между напряжением и током? Определить активную и реактивную составляющие напряжения и тока, активную, реактивную и полную мощности. Построить векторную диаграмму напряжений и токов.

Решение. Запишем комплексные напряжение и ток в показательной форме и изобразим их на векторной диаграмме (рис. 3.5):

$$\dot{U} = \sqrt{80^2 + 60^2} e^{j \arctg \frac{60}{80}} = 100 e^{j 36^\circ 50'} \text{ в } (\varphi_U = 36^\circ 50');$$

$$\dot{i} = \sqrt{24^2 + 7^2} e^{-j \arctg \frac{7}{24}} = 25 e^{-j 16^\circ 15'} \text{ а } (\varphi_I = -16^\circ 15').$$

Комплексное сопротивление определяем по формуле (3.10):

$$Z = \frac{\dot{U}}{\dot{I}} = \frac{100 e^{j 36^\circ 50'}}{25 e^{-j 16^\circ 15'}} = 4 e^{j 53^\circ 5'} = (2,4 + j 3,2) \text{ ом.}$$

Следовательно, эквивалентными параметрами цепи являются активное сопротивление $r = 2,4 \text{ ом}$ и индуктивное сопротивление $x = 3,2 \text{ ом}$, соединенные последовательно.

Комплексная проводимость цепи определяется по формуле (3.12);

$$Y = \frac{1}{Z} = \frac{1}{2,4 + j 3,2} = (0,15 - j 0,2) \text{ сим.}$$

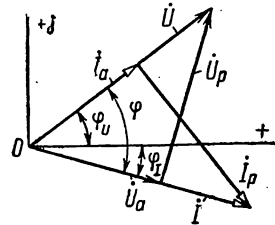


Рис. 3.5

Эквивалентные параметры цепи: активная $g = 0,15 \text{ сим}$ и реактивная (индуктивная) $b = 0,2 \text{ сим}$ проводимости, соединенные параллельно.

Угол сдвига фаз между напряжением и током (он же аргумент Z)

$$\varphi = \varphi_U - \varphi_I = 36^\circ 50' - (-16^\circ 15') = 53^\circ 05'.$$

Активные и реактивные составляющие напряжения и тока:

$$U_a = U \cos \varphi = 100 \cos 53^\circ 5' \approx 60 \text{ в;}$$

$$U_p = U \sin \varphi = 100 \sin 53^\circ 5' \approx 80 \text{ в;}$$

$$I_a = I \cos \varphi = 25 \cos 53^\circ 5' \approx 15 \text{ а;}$$

$$I_p = I \sin \varphi = 25 \sin 53^\circ 5' \approx 20 \text{ а.}$$

Необходимо обратить внимание на то, что вещественные и мнимые составляющие комплексных напряжения и тока в общем случае отличаются от их активных и реактивных составляющих.

Активная, реактивная и полная мощности:

$$P = I^2 r = 25^2 \cdot 2,4 = 1500 \text{ вт} = 1,5 \text{ кВт;}$$

$$Q = I^2 x = 25^2 \cdot 3,2 = 2000 \text{ вар} = 2 \text{ квар;}$$

$$S = UI = 100 \cdot 25 = 2500 \text{ ва} = 2,5 \text{ ква.}$$

Те же мощности можно определить по формуле (3.20а):

$$\tilde{S} = P + jQ = UI^* = (80 + j60)(24 + j7) = 1500 + j2000.$$

3.6. Дать ответы на вопросы предыдущей задачи при:

а) $\dot{U} = (-40 + j40) \text{ в}, \quad \dot{I} = (2 + j4) \text{ а};$

б) $\dot{U} = -100e^{-j\frac{\pi}{6}} \text{ в}, \quad \dot{I} = (7 + j24) \text{ а};$

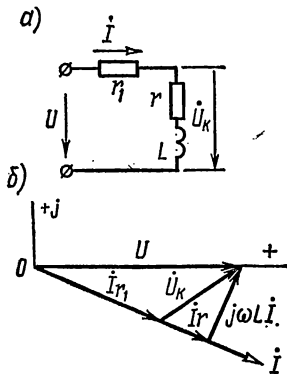


Рис. 3.6

в) $\dot{U} = 120e^{j\frac{\pi}{3}} \text{ в}, \quad \dot{I} = 6e^{-j\frac{\pi}{6}} \text{ а}.$

3.7. Последовательно с катушкой, параметры которой $r = 3 \text{ ом}, \quad L = 25 \text{ мГн}$, включен реостат сопротивлением $r = 10 \text{ ом}$ (рис. 3.6, а). Определить напряжение на катушке U_K , его сдвиг фазы по отношению к приложенному напряжению, а также мощность, расходуемую в катушке. К цепи подведено напряжение $U = 120 \text{ в}, f = 50 \text{ гц}$. Построить векторную диаграмму напряжений и тока.

Решение. Комплексное сопротивление всей цепи

$$Z = r + r_1 + j\omega L = 13 + j7,85 = 15,2e^{j31^{\circ}5'} \text{ ом}.$$

Направим вектор \dot{U} по оси вещественных чисел, т. е. $\dot{U} = U = 120 \text{ в}$.

Комплексный ток по формуле (3.13а)

$$\dot{I} = \frac{\dot{U}}{Z} = \frac{120}{15,2e^{j31^{\circ}5'}} = 7,9e^{-j31^{\circ}5'} \text{ а}.$$

Напряжение на катушке

$$\begin{aligned} \dot{U}_K &= iZ_K = 7,9e^{-j31^{\circ}5'} (3 + j7,85) = 7,9e^{-j31^{\circ}5'} \cdot 8,4e^{j69^{\circ}5'} = \\ &= 66,4e^{j38^{\circ}} \text{ в}. \end{aligned}$$

Оно сдвинуто по фазе по отношению к приложенному напряжению на угол $\varphi = 38^{\circ}$. Векторная диаграмма приведена на рис. 3.6, б. Мощность, расходуемая в катушке,

$$\begin{aligned} P_K &= \text{Re} [\dot{U}_K \dot{I}^*] = \text{Re} [66,4e^{j38^{\circ}} \cdot 7,9e^{j31^{\circ}5'}] = \text{Re} [525e^{j69^{\circ}5'}] = \\ &= 525 \cos 69^{\circ}5' = 187 \text{ вт}. \end{aligned}$$

Та же мощность может быть подсчитана и другим путем:

$$P_{\text{к}} = I^2 r = 7,9^2 \cdot 3 = 187 \text{ вт.}$$

3.8. Катушка, параметры которой $r_1 = 4 \text{ ом}$ и $L_1 = 10 \text{ мГн}$, соединена последовательно с другой катушкой, имеющей активное сопротивление $r_2 = 5 \text{ ом}$ и индуктивность $L_2 = 1,4 \text{ мГн}$. Катушки включены на синусоидальное напряжение $U = 120 \text{ в}$ частотой $f = 1000 \text{ Гц}$. Вычислить напряжения на каждой катушке, сдвиг фаз между ними, а также относительно приложенного напряжения мощности, расходуемые в каждой из них.

3.9. Последовательно с реостатом, сопротивление которого $r_1 = 40 \text{ ом}$, соединена реактивная катушка с активным сопротивлением $r_2 = 20 \text{ ом}$. Через катушку проходит ток $I = 2 \text{ а}$, а общее напряжение, приложенное к цепи, $U = 122 \text{ в}$. Частота тока $f = 50 \text{ кГц}$. Определить индуктивность катушки.

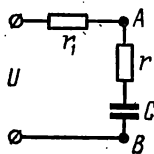


Рис. 3.7

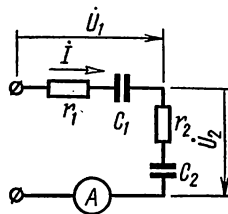


Рис. 3.8

3.10. Электрическая цепь (рис. 3.7) состоит из активного сопротивления $r_1 = 7 \text{ ом}$ и пассивного двухполюсника AB , содержащего последовательно соединенные активное сопротивление $r = 8 \text{ ом}$ и конденсатор емкостью $C = 125 \text{ мкФ}$. Напряжение, приложенное к цепи, $U = 120 \text{ в}$. Угловая частота $\omega = 1000 \text{ сек}^{-1}$. Чему равен ток, проходящий в цепи, и какова мощность, расходуемая в двухполюснике?

3.11. Какое напряжение приложено к цепи (рис. 3.8), если амперметр показывает ток $I = 0,8 \text{ а}$, а сопротивления ее элементов

$$r_1 = 12 \text{ ом}; \quad \frac{1}{\omega C_1} = 5 \text{ ом}; \quad r_2 = 132 \text{ ом}; \quad \frac{1}{\omega C_2} = 12 \text{ ом}?$$

3.12. В цепи рис. 3.8. напряжение U_1 на участке r_1, C_1 равно 24 в . Сопротивления и емкости равны $r_1 = 30 \text{ ом}$, $r_2 = 40 \text{ ом}$, $C_1 = 5 \text{ мкФ}$, $C_2 = 1 \text{ мкФ}$. Угловая частота $\omega = 5000 \text{ сек}^{-1}$. Чему равно напряжение, приложенное к цепи?

Решение. Реактивные сопротивления и комплексные сопротивления первого участка и всей цепи:

$$x_{C_1} = \frac{1}{\omega C_1} = \frac{1}{5000 \cdot 5 \cdot 10^{-6}} = 40 \text{ ом};$$

$$x_{C2} = \frac{1}{\omega C_2} = 200 \text{ ом};$$

$$Z_1 = r_1 - jx_{C1} = 30 - j40 = 50e^{-j53^{\circ}10'} \text{ ом};$$

$$Z = r_1 + r_2 - j(x_{C1} + x_{C2}) = 70 - j240 = 250e^{-j73^{\circ}45'} \text{ ом}.$$

Примем аргумент комплексного напряжения на первом участке равным нулю: $\dot{U}_1 = U_1 e^{j0^{\circ}} = 24 \text{ в}$. Тогда комплексный ток в цепи

$$\dot{i} = \frac{\dot{U}_1}{Z_1} = \frac{24}{50e^{-j53^{\circ}10'}} = 0,48e^{j53^{\circ}10'} \text{ а}.$$

Приложенное напряжение

$$\dot{U} = \dot{i}Z = 0,48e^{j53^{\circ}10'} \cdot 250e^{-j73^{\circ}45'} = 120e^{-j20^{\circ}35'} \text{ в}.$$

3.13. Напряжение U_2 на участке r_2, C_2 равно 40 в (см. рис. 3.8). Чему равны приложенное к цепи напряжение и расходуемая в ней мощность? Даны: $r_1 = 10 \text{ ом}$, $r_2 = 7 \text{ ом}$, $\frac{1}{\omega C_1} = 120 \text{ ом}$ и $\frac{1}{\omega C_2} = 24 \text{ ом}$.

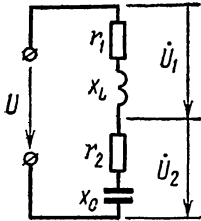


Рис. 3.9

3.14. К напряжению $U = 127 \text{ в}$ подключены последовательно соединенные катушка индуктивности ($r_1 = 10 \text{ ом}$, $x_L = 50 \text{ ом}$) и конденсатор с потерями ($r_2 = 1 \text{ ом}$, $x_C = 30 \text{ ом}$). Определить комплексные напряжения на катушке \dot{U}_1 и конденсаторе \dot{U}_2 и сдвиг фаз между ними (рис. 3.9).

3.15. Цепь (рис. 3.10, а) питается источником переменного тока $J = 5 \text{ а}$. Построить топографическую векторную диаграмму и определить по ней напряжение между точками а и d, b и e, c и f, а также напряжение источника тока. Даны: $r_1 = 10 \text{ ом}$, $\omega L_1 = 6 \text{ ом}$,

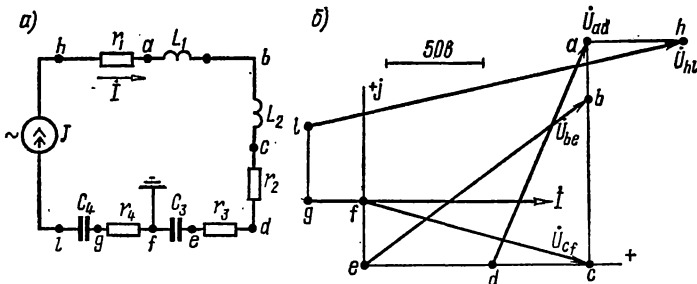


Рис. 3.10

$$\omega L_2 = 18 \text{ ом}, \quad r_2 = 10 \text{ ом}, \quad r_3 = 14 \text{ ом}, \quad \frac{1}{\omega C_3} = 7 \text{ ом}, \quad r_4 = 6 \text{ ом},$$

$$\frac{1}{\omega C_4} = 8 \text{ ом}.$$

Те же напряжения вычислить аналитически.

Решение. Топографическая диаграмма — геометрическое место потенциалов $\dot{\varphi}$ всех точек цепи, отложенных от общего начала координат — точки нулевого потенциала (в рассматриваемом примере от точки f , так как на схеме точка f заземлена; естественно принять ее потенциал $\dot{\varphi}_f = 0$).

Построение диаграммы показано на рис. 3.10, б. Примем начальную фазу тока равной нулю и в некотором масштабе отложим по горизонтальной оси вектор тока, полагая $\dot{J} = I$.

Начало координат отметим точкой f ($\dot{\varphi}_f = 0$). Комплексный потенциал точки e определяется законом Ома

$$\dot{\varphi}_e = \dot{\varphi}_f + \dot{U}_{ef} = \dot{\varphi}_f + \dot{I} \left(-j \frac{1}{\omega C_3} \right).$$

Численное значение второго слагаемого \dot{U}_{ef} правой части написанного равенства $U_{ef} = I \frac{1}{\omega C} = 5 \cdot 7 = 35 \text{ в}$ откладываем в выбранном масштабе напряжений (см. рис. 3.10, б) от точки f в направлении $-j\dot{I}$, т. е. в направлении, определяемом поворотом вектора тока \dot{I} на прямой угол по часовой стрелке. Конец построенного вектора \dot{U}_{ef} определяет точку e топографической диаграммы. Точно так же определяется потенциал точки d :

$$\dot{\varphi}_d = \dot{\varphi}_e + \dot{U}_{de} = \dot{\varphi}_e + \dot{I} r_3.$$

Численное значение второго слагаемого (\dot{U}_{de}) равно $U_{de} = I r_3 = 70 \text{ в}$ и откладывается в направлении \dot{I} от точки e к искомой точке d . Аналогично строятся потенциалы точек c , b , a , h .

Для построения точки g определяем ее потенциал:

$$\dot{\varphi}_g = \dot{\varphi}_f + \dot{U}_{gf} = \dot{\varphi}_f - \dot{U}_{fg} = \dot{\varphi}_f - \dot{I} r_4.$$

Вычислив значение $I r_4 = 30 \text{ в}$, откладываем его в направлении, противоположном направлению тока I , до точки g (см. рис. 3.10, б). Потенциал точки l

$$\dot{\varphi}_l = \dot{\varphi}_g + \dot{U}_{lg} = \dot{\varphi}_g - \dot{U}_{gl} = \dot{\varphi}_g - \dot{I} \left(-j \frac{1}{\omega C_4} \right) = \dot{\varphi}_g + j \dot{I} \frac{1}{\omega C_4}.$$

Значение $I \frac{1}{\omega C_4} = 40 \text{ в}$ откладываем в направлении $j\dot{I}$, т. е. в направлении, повернутом против часовой стрелки на угол $\pi/2$, что и

определяет искомую точку l диаграммы. Для нахождения напряжения между какой-либо парой точек в цепи следует соединить между собой соответствующие точки на диаграмме; длина полученного отрезка в выбранном масштабе даст искомое напряжение. Так, $U_{ad} = 130$ в; $U_{be} = 150$ в; $U_{cf} = 125$ в, напряжение источника тока $U_{hl} = 205$ в.

Те же результаты могут быть получены аналитическим путем:

$$U_{ad} = I |r_2 + j\omega L_2 + j\omega L_1| = I \sqrt{r_2^2 + (\omega L_2 + \omega L_1)^2} = 130 \text{ в};$$

$$U_{be} = I |r_2 + r_3 + j\omega L_2| = 150 \text{ в};$$

$$U_{cf} = I \left| r_2 + r_3 - j \frac{1}{\omega C_3} \right| = 125 \text{ в};$$

$$U_{hl} = I \left| r_1 + j\omega L_1 + r_2 + j\omega L_2 + r_3 - j \frac{1}{\omega C_3} + r_4 - j \frac{1}{\omega C_4} \right| = 205 \text{ в}.$$

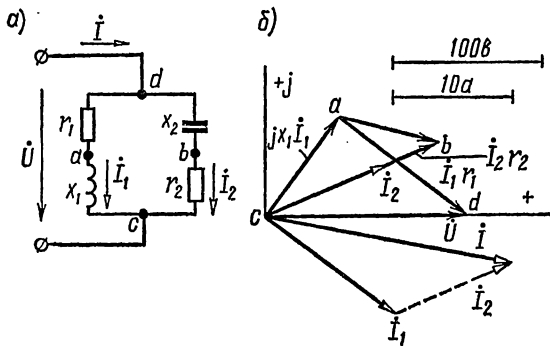


Рис. 3.11

3.16. Параметры цепи, изображенной на рис. 3.11, *a*, имеют следующие значения: $r_1 = 8$ ом, $x_1 = 6$ ом, $r_2 = 12$ ом, $x_{C2} = 5$ ом.

Вычислить комплексные токи \dot{I} , \dot{I}_1 , \dot{I}_2 и мощность, потребляемую цепью, если $U = 130$ в. Найти напряжение между точками a и b . Построить топографическую векторную диаграмму.

Решение. Примем $\dot{U} = \dot{U} = 130$ в, тогда

$$\dot{I}_1 = \frac{\dot{U}}{Z_1} = \frac{130}{8 + j6} = 10,4 - j7,8 = 13 e^{-j36^\circ 50'} \text{ а};$$

$$\dot{I}_2 = \frac{\dot{U}}{Z_2} = \frac{130}{12 - j5} = 9,23 + j3,84 = 10 e^{j22^\circ 40'} \text{ а};$$

$$\dot{I} = \dot{I}_1 + \dot{I}_2 = 19,6 - j3,96 = 20 e^{-j11^\circ 20'} \text{ а}.$$

Мощность, потребляемая цепью,

$$P = \operatorname{Re} [\dot{U} \dot{I}^*] = \operatorname{Re} [130 \cdot 20 e^{j11^\circ 20'}] = 130 \cdot 20 \cos 11^\circ 20' = 2550 \text{ вт.}$$

Проверка.

$$P = I_1^2 r_1 + I_2^2 r_2 = 13^2 \cdot 8 + 10^2 \cdot 12 = 1352 + 1200 \approx 2550 \text{ вт.}$$

Найдем напряжение между точками a и b :

$$\dot{\varphi}_d - \dot{\varphi}_a = \dot{U}_{da} = \dot{I}_1 r_1;$$

$$\dot{\varphi}_d - \dot{\varphi}_b = \dot{I}_2 (-j \check{x}_{C2}).$$

Вычитая первое выражение из второго, найдем

$$\begin{aligned} \dot{U}_{ab} &= (\dot{\varphi}_d - \dot{\varphi}_b) - (\dot{\varphi}_d - \dot{\varphi}_a) = \dot{I}_2 (-j \check{x}_{C2}) - \dot{I}_1 r_1 = \\ &= -j5(9,23 + j3,84) - 8(10,4 - j7,8) = -64 + j16,2 = 66 e^{j165^\circ 50'} \text{ в.} \end{aligned}$$

Для построения топографической векторной диаграммы поступаем так: на основании проведенного расчета откладываем векторы токов \dot{I}_1 , \dot{I}_2 и \dot{I} ; векторы составляющих напряжения на отдельных участках цепи отложены на диаграмме в том же порядке, в каком следуют на схеме соответствующие элементы цепи (рис. 3.11, б).

3.17. Определить токи во всех ветвях цепи, показанной на рис. 3.12 при $U = 100 \text{ в}$, $r_1 = 12 \text{ ом}$, $x_1 = -16 \text{ ом}$, $r_2 = 7 \text{ ом}$, $x_2 = -24 \text{ ом}$. Построить топографическую векторную диаграмму.

а) Определить показание вольтметра при условии, что током, проходящим через вольтметр, можно пренебречь по сравнению с токами ветвей. Чему будет равно показание амперметра, включенного вместо вольтметра между точками a и b ?

б) Что покажет вольтметр, если сопротивления r_2 и x_2 поменять местами?

3.18. При каком напряжении U , приложенном к цепи (рис. 3.13), вольтметр V покажет напряжение, равное 50 в ? Частота $f = 50 \text{ гц}$. Параметры цепи: $r_1 = 5 \text{ ом}$, $r = 4 \text{ ом}$, $r_2 = 10 \text{ ом}$, $L = 20 \text{ мГн}$, $C = 150 \text{ мкФ}$. Током вольтметра пренебречь в сравнении с токами цепи.

3.19. Найти токи в ветвях и неразветвленной части цепи (рис. 3.14), если приложенное напряжение $U = 220 \text{ в}$, а сопротивления: $r_1 = 55 \text{ ом}$, $r_2 = 7 \text{ ом}$, $x_2 = 24 \text{ ом}$, $x_3 = -44 \text{ ом}$. Построить векторную диаграмму.

3.20. В цепи (рис. 3.15, а) даны: $U = 120 \text{ в}$, $Z = r_1 + jx_1 = (10 + j6) \text{ ом}$, $Z_2 = r_2 + jx_2 = (24 - j7) \text{ ом}$, $Z_3 = r_3 + jx_3 = (15 + j20) \text{ ом}$.

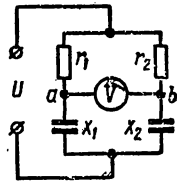


Рис. 3.12

Определить токи $\dot{I}_1, \dot{I}_2, \dot{I}_3$, активные и реактивные мощности всей цепи и отдельных ветвей. Построить векторную диаграмму.

Решение. Полное сопротивление цепи

$$Z = Z_1 + \frac{Z_2 Z_3}{Z_2 + Z_3} = 10 + j6 + \frac{(24 - j7) \cdot (15 + j20)}{39 + j13} = 24,4 + j10,8 = 26,7 e^{j23^\circ 55'} \text{ ом.}$$

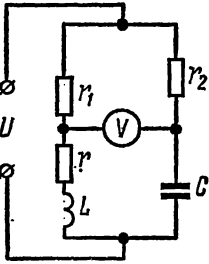


Рис. 3.13

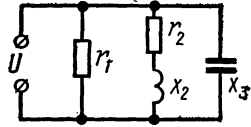


Рис. 3.14

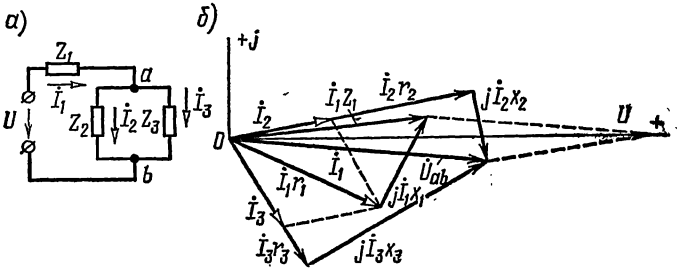


Рис. 3.15

В неразветвленной части цепи проходит ток

$$\dot{I}_1 = \frac{U}{Z} = \frac{120}{26,7 e^{j23^\circ 55'}} = 4,5 e^{-j23^\circ 55'} \text{ а.}$$

Токи в параллельных ветвях могут быть выражены через ток в неразветвленной части цепи (см. формулы 3.19):

$$\dot{I}_2 = \dot{I}_1 \frac{Z_3}{Z_2 + Z_3} = 4,5 e^{-j23^\circ 55'} \cdot \frac{15 + j20}{39 + j13} = 2,74 e^{j10^\circ 45'} \text{ а;}$$

$$\dot{I}_3 = \dot{I}_1 \frac{Z_2}{Z_2 + Z_3} = 4,5 e^{-j23^\circ 55'} \cdot \frac{24 - j7}{39 + j13} = 2,74 e^{-j58^\circ 35'} \text{ а.}$$

Токи \dot{I}_2 и \dot{I}_3 можно было бы найти и другим путем:

$$\dot{U}_{ab} = \dot{I}_1 Z_{ab} = I_1 \frac{Z_2 Z_3}{Z_2 + Z_3} = 4,5 e^{-j23^\circ 55'} \cdot \frac{(24 - j7)(15 + j20)}{39 + j13} =$$

$$= 68,4 e^{-j5^\circ 30'} \text{ в};$$

$$\dot{I}_2 = \frac{U_{ab}}{Z_2} = \frac{68,4 e^{-j5^\circ 30'}}{24 - j7} = 2,74 e^{j10^\circ 45'} \text{ а};$$

$$\dot{I}_3 = \frac{\dot{U}_{ab}}{Z_3} = \frac{68,4 e^{-j5^\circ 30'}}{15 + j20} = 2,74 e^{-j58^\circ 35'} \text{ а}.$$

Найдем активные мощности всей цепи и отдельных ее ветвей:

$$P = \operatorname{Re} [\dot{U} \dot{I}_1^*] = \operatorname{Re} [120 \cdot 4,5 e^{j23^\circ 55'}] = 120 \cdot 4,5 \cos 23^\circ 55' = 494 \text{ вт};$$

$$P_1 = I_1^2 r_1 = 4,5^2 \cdot 10 = 202 \text{ вт}; P_2 = I_2^2 r_2 = 180 \text{ вт}; P_3 = I_3^2 r_3 = 112 \text{ вт}.$$

Проверка показывает, что $P = P_1 + P_2 + P_3$.

Наконец, определим реактивные мощности всей цепи и отдельных ее ветвей:

$$Q = \operatorname{Im} [\dot{U} \dot{I}_1^*] = \operatorname{Im} [120 \cdot 4,5 e^{j23^\circ 55'}] = 120 \cdot 4,5 \sin 23^\circ 55' = 218 \text{ вар};$$

$$Q_1 = I_1^2 x_1 = 4,5^2 \cdot 6 = 122 \text{ вар}, Q_2 = I_2^2 x_2 = -52,5 \text{ вар},$$

$$Q_3 = I_3^2 x_3 = 150 \text{ вар}.$$

Учитывая, что Q_1 и Q_3 положительны (реактивная мощность катушек), а Q_2 отрицательно (реактивная мощность конденсатора), получим

$$Q = 122 - 52,5 + 150 \approx 218 \text{ вар}.$$

На рис. 3.15, б приведена векторная диаграмма. Порядок ее построения таков: по результатам расчетов отложены векторы токов \dot{I}_1 , \dot{I}_2 и \dot{I}_3 ; затем по направлению \dot{I}_1 отложен вектор $\dot{I}_1 r_1$, и перпендикулярно к нему в сторону опережения — вектор $j x_1 \dot{I}_1$. Их сумма дает вектор $\dot{I}_1 Z_1$. Далее в фазе с \dot{I}_2 построен вектор $\dot{I}_2 r_2$ и перпендикулярно к нему в сторону отставания (так как x_2 отрицательно) — вектор $j x_2 \dot{I}_2$, а их сумма дает вектор напряжения на параллельном участке \dot{U}_{ab} . Тот же вектор может быть получен, если в фазе с \dot{I}_3 отложить $\dot{I}_3 r_3$ и к нему прибавить вектор $j x_3 \dot{I}_3$, опережающий \dot{I}_3 на $\pi/2$. Сумма векторов $\dot{I}_1 Z_1$ и \dot{U}_{ab} дает вектор приложенного напряжения.

3.21. Определить токи во всех частях цепи, показанной на рис. 3.15, а, при $U = 100 \text{ в}$, $Z_1 = (110 + j160) \text{ ом}$, $Z_2 = (50 - j150) \text{ ом}$, $Z_3 = (200 + j150) \text{ ом}$.

3.22. Чему равно напряжение \dot{U} , подключенное к цепи (рис. 3.16), если известно, что через сопротивление Z_3 проходит ток $\dot{I}_3 = 2a$? Чему равен сдвиг фаз между приложенным напряжением и напряжением между точками a и b . Сопротивления: $r_1 = 27 \text{ ом}$, $x_1 = -25 \text{ ом}$, $r_2 = 30 \text{ ом}$, $x_2 = -18 \text{ ом}$, $r_3 = 20 \text{ ом}$, $x_3 = 30 \text{ ом}$. Вычислить активную и реактивную мощности. Построить векторную диаграмму.

Указание. Решение удобно начинать с вычисления напряжения между точками a и b ($\dot{U}_{ab} = \dot{I}_3 Z_3 = I_3 Z_3$), а затем токов \dot{I}_2 и \dot{I}_1 и напряжения \dot{U} .

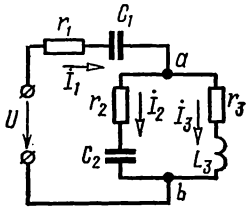


Рис. 3.16

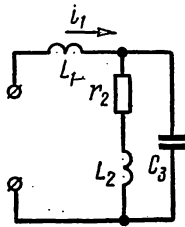


Рис. 3.17

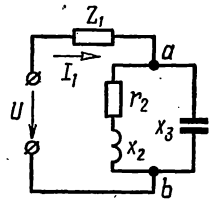


Рис. 3.18

3.23. В неразветвленной части цепи (рис. 3.17) проходит ток, изменяющийся по закону $i_1 = 12\sqrt{2} \sin \omega t a$. Сопротивления элементов цепи: $\omega L_1 = 22,5 \text{ ом}$, $r_2 = 40 \text{ ом}$, $\omega L_2 = 100 \text{ ом}$, $\frac{1}{\omega C_3} = 20 \text{ ом}$.

Вычислить действующие значения всех токов и приложенного к цепи напряжения; написать для них уравнения мгновенных значений. Построить векторную диаграмму напряжений и токов.

3.24. Параметры цепи (рис. 3.18): $r_2 = 40 \text{ ом}$, $x_2 = 100 \text{ ом}$, $x_3 = -20 \text{ ом}$. Определить величину и характер реактивного сопротивления Z_1 , если известно, что оно чисто реактивно и через него проходит ток $I_1 = 12 a$, а напряжение, приложенное к цепи, $U = 30 \text{ в}$.

Решение. Сопротивление разветвленной части цепи

$$Z_{ab} = \frac{(40 + j 100)(-j 20)}{40 + j 80} = (2 - j 24) \text{ ом.}$$

Общее сопротивление цепи

$$z = \frac{U}{I_1} = \frac{30}{12} = 2,5 \text{ ом.}$$

Оно может быть выражено и так:

$$z = \sqrt{2^2 + (x_1 - 24)^2} = 2,5 \text{ ом,}$$

Отсюда $(x_1 - 24)^2 = 2,25$, или $x_1 - 24 = \pm 1,5$.

Возможны два решения задачи: искомое сопротивление имеет индуктивный характер и равно либо $x'_1 = 25,5 \text{ ом}$, либо $x'_1 = 22,5 \text{ ом}$.

3.25. Амперметр, включенный в неразветвленную часть цепи (рис. 3.19), показал ток $I = 2,4 \text{ а}$, а вольтметр — напряжение $U = 120 \text{ в}$. Известно, что сопротивление Z_1 представляет собой реактивную катушку с активным сопротивлением $r_1 = 7 \text{ ом}$. Определить величину индуктивного сопротивления этой катушки, если известны:

$$r_2 = 20 \text{ ом}, \quad \omega L_2 = 30 \text{ ом}, \quad r_3 = 10 \text{ ом}, \quad \frac{1}{\omega C_3} = 20 \text{ ом}.$$

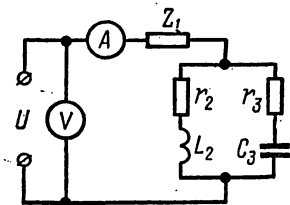


Рис. 3.19

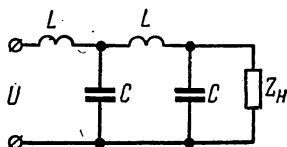


Рис. 3.20

3.26. Цепь рис. 3.19 имеет параметры: $Z_1 = (6 + j8) \text{ ом}$, $Z_2 = (20 - j8) \text{ ом}$, $Z_3 = (10 + j8) \text{ ом}$. Через сопротивление Z_1 проходит ток $I_1 = 6 \text{ а}$. Вычислить остальные токи и напряжения, приложенное к цепи.

Указание. Вычислить полное сопротивление всей цепи Z , затем приложенное к ней напряжение $\dot{U} = I_1 Z$ и, наконец, по формулам (3.19) определить токи \dot{I}_2 и \dot{I}_3 .

3.27. Вычислить все токи в цепи (рис. 3.20) и построить векторную диаграмму, если известно, что напряжение $U = 120 \text{ в}$,

$$\omega L = 12 \text{ ом}, \quad \frac{1}{\omega C} = 20 \text{ ом}, \quad Z_H = r_H = 40 \text{ ом}.$$

3.28. Через сопротивление нагрузки $Z_H = (25 + j60) \text{ ом}$ проходит ток $I_H = 0,4 \text{ а}$ (см. рис. 3.20). Определить все токи и приложенное к цепи напряжение U . Сопротивления элементов цепи равны: $\frac{1}{\omega C} = 40 \text{ ом}$, $\omega L = 10 \text{ ом}$. Построить векторную диаграмму токов и напряжений.

3.29. Каким активным сопротивлением r_2 следует шунтировать сопротивление $Z_1 = r_1 + jx_1$, чтобы ток, проходящий через Z_1 , отставал от приложенного напряжения U на 90° (рис

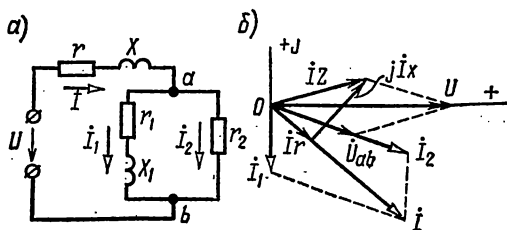


Рис. 3.21

3.21) Сопротивления: $r = 5 \text{ ом}$, $x = 11 \text{ ом}$, $r_1 = 10 \text{ ом}$, $x_1 = 25 \text{ ом}$.
 Построить векторную диаграмму.
 Решение. Обозначим:

$$Z = r + jx; \quad Z_1 = r_1 + jx_1; \quad Z_2 = r_2.$$

Ток в неразветвленной части цепи

$$\dot{i} = \frac{U}{Z_{\text{вх}}} = \frac{U(Z_1 + Z_2)}{ZZ_1 + Z_1Z_2 + ZZ_2}.$$

Через сопротивление Z_1 проходит ток

$$\dot{i}_1 = \dot{i} \frac{Z_2}{Z_1 + Z_2} = \frac{U}{Z + Z_1 + \frac{ZZ_1}{Z_2}}.$$

Для того чтобы ток \dot{i}_1 отставал по фазе от напряжения U на 90° , знаменатель последнего выражения должен быть чисто мнимой (по знаку положительной) величиной.

Выпишем этот знаменатель и выделим в нем вещественную и мнимую составляющие:

$$\begin{aligned} Z + Z_1 + \frac{ZZ_1}{Z_2} &= r + r_1 + j(x + x_1) + \frac{(r + jx)(r_1 + jx_1)}{r_2} = \\ &= \left(r + r_1 + \frac{rr_1 - xx_1}{r_2} \right) + j \left(x + x_1 + \frac{rx_1 + r_1x}{r_2} \right). \end{aligned}$$

Вещественную часть полученного выражения приравняем нулю:

$$r + r_1 + \frac{rr_1 - xx_1}{r_2} = 0,$$

отсюда

$$r_2 = \frac{xx_1 - rr_1}{r + r_1} = \frac{25 \cdot 11 - 5 \cdot 10}{5 + 10} = 15 \text{ ом}.$$

Векторная диаграмма представлена на рис. 3.21, б.

3.30. К напряжению $U = 40 \text{ в}$ подключены два последовательно соединенных комплексных сопротивления $Z_1 = (3 + j13) \text{ ом}$ и $Z_2 = (10 + j40) \text{ ом}$. Определить, каким чисто емкостным сопротивлением следует шунтировать сопротивление Z_2 , для того чтобы ток в неразветвленной части цепи (т. е. в сопротивлении Z_1) совпал по фазе с приложенным напряжением. Вычислить при этом все токи и построить векторную диаграмму.

Указание. Комплекс полного сопротивления цепи должен быть вещественной величиной, иными словами, мнимую составляющую комплекса полного сопротивления необходимо приравнять нулю.

3.31. В цепи (см. рис. 3.21, а) известны: $r = 3 \text{ ом}$, $x = 9 \text{ ом}$, $r_1 = 20 \text{ ом}$, $x_1 = 10 \text{ ом}$. Найти, при каком сопротивлении r_2 ток в неразветвленной части цепи будет сдвинут по отношению к приложенному напряжению на угол, равный 45° .

Указание. Следует вычислить комплекс полного сопротивления схемы $Z_0 = r_0 + jx_0$, в котором надо принять отношение

$$\frac{x_0}{r_0} = 1 \quad (\text{т. е. } \operatorname{tg} \varphi_0 = \operatorname{tg} 45^\circ = \frac{x_0}{r_0}).$$

3.32. Показать, что при угловой частоте $\omega = \frac{1}{\sqrt{2LC}}$ ток I в неразветвленной части цепи рис. 3.22 при любых значениях активного сопротивления r является величиной постоянной и равняется $\frac{U}{\omega L}$, а фаза тока (при изменении r от 0 до ∞) изменяется в пределах от $+\pi/2$ до $-\pi/2$.

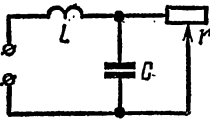


Рис. 3.22

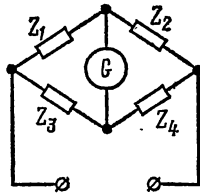


Рис. 3.23

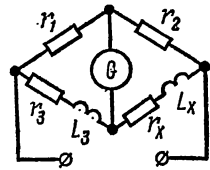


Рис. 3.24

Какую емкость C следует включить в цепь для регулирования фазы при $f = 50$ гц, если индуктивность цепи равна 5 мГ? Начертить кривую изменения фазы в зависимости от r при его изменении от 0 до 1000 ом.

3.33. Из теории известно, что мост (рис. 3.23) будет уравновешен, если $Z_1 Z_4 = Z_2 Z_3$. Пользуясь этим условием, определить величину емкости C_4 , при которой ток в гальванометре отсутствует. Известно, что $Z_1 = 200$ ом, $Z_2 = 100$ ом и $Z_3 = -j120$ ом. Частота переменного тока $f = 50$ гц.

3.34. Для определения индуктивности катушки L_x применяется мост, схема которого изображена на рис. 3.24. Величины r_1, r_2, r_3 и L_3 известны.

Показать, что при равновесии моста одновременно должно быть удовлетворено равенство трех отношений:

$$\frac{r_1}{r_2} = \frac{r_3}{r_x} = \frac{L_3}{L_x}.$$

Замечания: 1. Катушка индуктивности L_x всегда обладает активным сопротивлением, величина которого при небольших частотах может быть определена путем измерения на постоянном токе. При высоких частотах, когда резко выражен поверхностный эффект, активное сопротивление r проводника круглого сечения при переменном токе может быть определено по формуле

$$r = r_0 \frac{a}{2} \sqrt{\frac{\omega \mu_0 \sigma}{2}},$$

где r_0 — сопротивление проводника при постоянном токе; a — радиус проводника; ω — угловая частота тока; μ_a — абсолютная магнитная проницаемость; σ — удельная электрическая проводимость проводника.

2. Сначала уравнивают мост на постоянном токе, добиваясь равенства $\frac{r_1}{r_2} = \frac{r_3}{r_x}$, а затем его уравнивают при переменном токе (при этом сопротивления r_1 и r_3 не меняют, а r_2 и r_x изменяют одновременно так, чтобы сохранилась пропорция $\frac{r_1}{r_2} = \frac{r_3}{r_x}$).

Обычно на практике для возможности регулировки моста последовательно с катушкой (L_x, r_x) включают дополнительно регулируемое активное сопротивление. и потому под r_x надо понимать сумму сопротивлений катушки и этого дополнительного сопротивления.

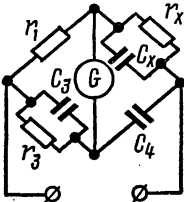


Рис. 3.25

3.35. Для определения емкости и потерь мощности в диэлектрике конденсатора (C_x, r_x) при высоком напряжении используется схема моста, изображенного на рис. 3.25. Величины r_1, r_3, C_3 и C_4 известны.

Показать, что

$$r_x = \frac{r_1 (1 + \omega^2 C_3^2 r_3^2)}{\omega^2 C_3 C_4 r_3^2}, \quad C_x = \frac{C_4 r_3}{r_1 (1 + \omega^2 C_3^2 r_3^2)}$$

Замечания: 1. На практике величина $\omega^2 C_3^2 r_3^2 \ll 1$,

поэтому

$$r_x \approx \frac{r_1}{\omega^2 C_3 C_4 r_3^2} \quad \text{и} \quad C_x \approx \frac{C_4 r_3}{r_1}$$

2. Обычно падение напряжения на сопротивлении r_1 и в параллельных ветвях r_3, C_3 мало по сравнению с падением напряжения в плече C_x, r_x и на C_4 , поэтому напряжение на обкладках испытуемого конденсатора C_x можно принять равным U ; в этом случае потери в диэлектрике конденсатора C_x равны:

$$\frac{U^2}{r_x} = \frac{U^2 \omega^2 C_3 C_4 r_3^2}{r_1}$$

3.36. Для определения параметров эквивалентной схемы конденсатора с потерями (C_2 и r_2) собран мост по схеме рис. 3.26, который уравновешен ($Z_1 Z_4 = Z_2 Z_3$). Чему равны C_2 и r_2 , если известно, что $r_1 = 2500 \text{ ом}$, $r_3 = 10 \text{ ом}$, $L_3 = 1 \text{ гн}$, $r_4 = 800 \text{ ом}$?

3.37. На рис. 3.27 изображена схема моста, используемого для измерения частоты. Показать, что при равновесии моста

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{r_2 r_4 C_2 C_4}}$$

3.38. Параметры цепи (рис. 3.28, а) равны:

$$Z_1 = r_1 + jx_1 = (10 + j80) \text{ ом}, \quad Z = r + jx = (50 + j60) \text{ ом},$$

$$Z_2 = r_2 = 40 \text{ ом}.$$

При каком активном сопротивлении r_3 , включенном в диагональ моста, ток I_1 , проходящий через каждое из сопротивлений Z_1 , будет сдвинут по отношению к вектору приложенного напряжения $U = 154$ в на угол $\varphi = 90^\circ$? Для этого случая найти все токи и построить векторную диаграмму напряжений.

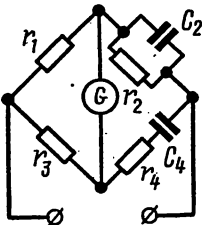


Рис. 3.26

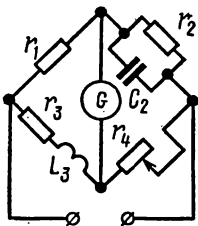


Рис. 3.27

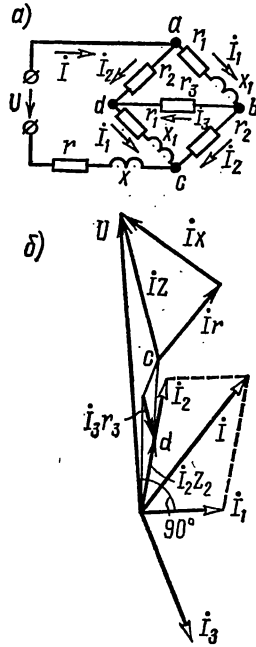


Рис. 3.28

Указание. Надо составить систему уравнений Кирхгофа, решив которую, найти комплексный ток I_1 . При решении учесть, что токи в противоположных ветвях (ad и bc , а также ab и dc) равны друг другу. Чтобы I_1 было сдвинуто по фазе по отношению к U на 90° , надо приравнять нулю вещественную составляющую в выражении для тока I_1 .

В результате решения должно быть получено

$$r_3 = \frac{xx_1 - rr_2 - r_1 - 2r_1r_2}{2r + r_1 + r_2} = 10 \text{ ом.}$$

По вычисленным значениям на рис. 3. 8, б построена векторная диаграмма.

3.39. Для цепи (рис. 3.29) вычислить комплексный коэффициент передачи — отношение напряжения \dot{U}_2 на ее выходе к напряжению \dot{U}_1 на входе цепи. Даны: $r_1 = 50$ ом, $r_2 = 150$ ом, $x_{c1} = 80$ ом, $x_{c2} = 100$ ом. Зажимы 2-2' разомкнуты.

Каким будет коэффициент передачи, если к зажимам 2-2 подключить активное сопротивление: а) 125 ом; б) 1250 ом?

3.40. Вычислить величину активного сопротивления r_2 , которое надо подключить к зажимам 2—2' цепи (рис. 3.30), чтобы отношение напряжения U_2 на нем к напряжению U_1 на входе цепи равнялось k . Числовой расчет проделать при $r_1 = 100$ ом, $x_C = 50$ ом, $k = U_2 : U_1 = 0,2$.

Решение. Входное сопротивление всей цепи

$$Z = Z_1 + \frac{Z_2 Z_3}{Z_2 + Z_3} + \frac{Z_1 Z_2 + Z_2 Z_3 + Z_3 Z_1}{Z_2 + Z_3},$$

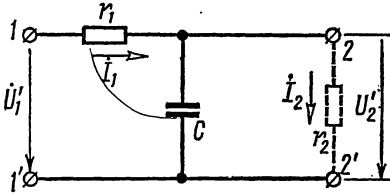


Рис. 3.29

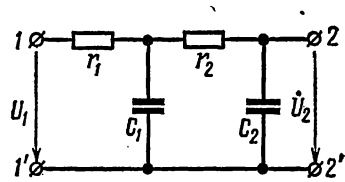


Рис. 3.30

где

$$Z_1 = r_1, \quad Z_2 = r_2, \quad Z_3 = -jx_C.$$

Вычислим напряжение \dot{U}_2 , для чего сначала найдем токи:

$$\dot{i}_1 = \frac{\dot{U}_1}{Z} = \frac{\dot{U}_1 (Z_2 + Z_3)}{Z_1 Z_2 + Z_2 Z_3 + Z_3 Z_1};$$

$$\dot{i}_2 = \dot{i}_1 \frac{Z_3}{Z_2 + Z_3} = \frac{\dot{U}_1 Z_3}{Z_1 Z_2 + Z_2 Z_3 + Z_3 Z_1};$$

$$\dot{U}_2 = \dot{i}_2 Z_2 = \frac{\dot{U}_1 Z_2 Z_3}{Z_1 Z_2 + Z_2 Z_3 + Z_3 Z_1} = \frac{U_1 Z_2}{Z_1 + Z_2 + \frac{Z_1 Z_2}{Z_3}}.$$

Отсюда находим отношение комплексных напряжений:

$$\frac{\dot{U}_2}{\dot{U}_1} = \frac{Z_2}{Z_1 + Z_2 + \frac{Z_1 Z_2}{Z_3}} = \frac{r_2}{r_1 + r_2 + j \frac{r_1 r_2}{x_C}},$$

а отношение модулей напряжений:

$$\frac{U_2}{U_1} = \frac{r_2}{\sqrt{(r_1 + r_2)^2 + \left(\frac{r_1 r_2}{x_C}\right)^2}} = k.$$

Подставляя числовые значения, после простых преобразований получим квадратное уравнение относительно r_2 :

$$r_2^2 - 10r_2 - 500 = 0.$$

Решение этого уравнения дает величину искомого сопротивления $r_2 \approx 28 \text{ ом}$.

3.41. В схеме рис. 3.31 даны: $r_1 = 25 \text{ ом}$, $r_3 = 5 \text{ ом}$ и $x_C = 15 \text{ ом}$. При какой величине активного сопротивления r_2 отношение модулей напряжений $U_2 : U_1 = 0,4$?

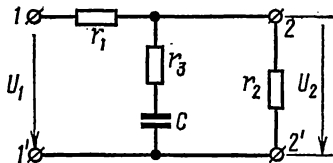


Рис. 3.31

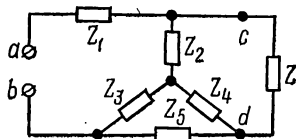


Рис. 3.32

3.42. Сопротивление цепи (рис. 3.32):

$$Z_1 = 18 \text{ ом}, \quad Z_2 = 12 \text{ ом}, \quad Z_3 = (35 + j 15) \text{ ом},$$

$$Z_4 = (10 + j 15) \text{ ом} \quad \text{и} \quad Z_5 = (20 - j 30) \text{ ом}.$$

Чему равно отношение напряжения U_{cd} на нагрузочном сопротивлении $Z = 25 \text{ ом}$ к напряжению U_{ab} , подведенному к цепи?

Б. Применение различных методов к расчету цепей синусоидального тока

3.43. В цепи рис. 3.33, а даны: $Z_1 = Z_2 = (50 + j 30) \text{ ом}$, $Z_3 = 100 \text{ ом}$, $\dot{E}_1 = 100 \text{ в}$, $\dot{E}_2 = 100 e^{-j 30^\circ} \text{ в}$. Положительные направления э.д.с. показаны на схеме стрелками. Определить все токи: а) методом контурных токов; б) методом узловых потенциалов; в) методом эквивалентного генератора напряжения определить ток, проходящий по ветви Z_2 . Проверить баланс активных мощностей.

Решение. а) Выберем направления контурных токов согласно рис. 3.33, а. Система уравнений по методу контурных токов

$$\dot{J}_1 (Z_1 + Z_3) + \dot{J}_2 Z_3 = \dot{E}_1;$$

$$\dot{J}_1 Z_3 + \dot{J}_2 (Z_2 + Z_3) = \dot{E}_2.$$

Решая эти уравнения, получим:

$$\begin{aligned} \dot{J}_1 &= \frac{\dot{E}_1 (Z_2 + Z_3) - \dot{E}_2 Z_3}{Z_1 Z_2 + Z_2 Z_3 + Z_1 Z_3} = \frac{100 (150 + j 30) - 100 e^{-j 30^\circ} \cdot 100}{(50 + j 30)^2 + 2 (50 + j 30) 100} = \\ &= 0,693 e^{j 13^\circ 50'} \text{ а}; \end{aligned}$$

$$\dot{j}_2 = \frac{\dot{E}_2(Z_1 + Z_3) - \dot{E}_1 Z_3}{Z_1 Z_2 + Z_2 Z_3 + Z_1 Z_3} = 0,452e^{-j85^\circ 20'} a.$$

Токи в ветвях:

$$\dot{i}_1 = \dot{j}_1 = 0,693e^{j13^\circ 50'} a, \quad \dot{i}_2 = \dot{j}_2 = 0,452e^{-j85^\circ 20'} a;$$

$$\dot{i}_3 = \dot{j}_1 + \dot{j}_2 = 0,693e^{j13^\circ 50'} + 0,452e^{-j85^\circ 20'} = 0,77e^{-j21^\circ 50'} a.$$

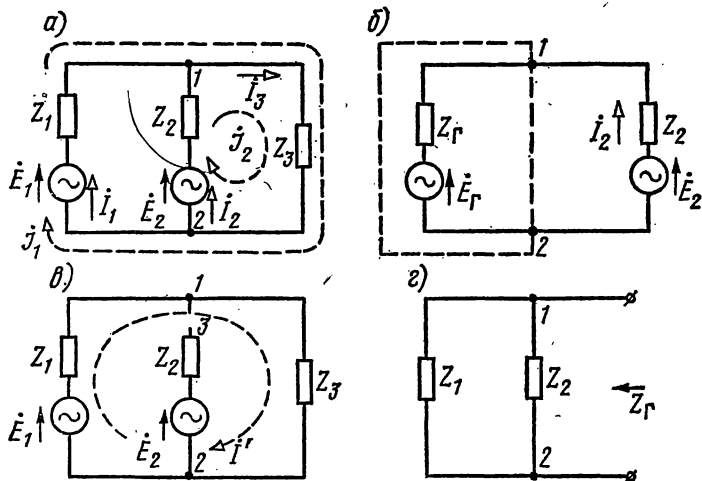


Рис. 3.33

Уравнение баланса мощностей

$$\operatorname{Re}[\dot{E}_1 \dot{I}_1^*] + \operatorname{Re}[\dot{E}_2 \dot{I}_2^*] = I_1^2 r_1 + I_2^2 r_2 + I_3^2 r_3$$

или

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}[100 \cdot 0,693e^{-j13^\circ 50'}] + \operatorname{Re}[100e^{-j30^\circ} \cdot 0,452e^{j85^\circ 20'}] &= \\ = 69,3 \cos 13^\circ 50' + 45,2 \cos 55^\circ 20' &= 0,693^2 \cdot 50 + \\ + 0,452^2 \cdot 50 + 0,77^2 \cdot 100, & \end{aligned}$$

или $66,4 + 25,8 = 24 + 10,2 + 59$, т. е. получено тождество $93,2 = 93,2$.

б) При решении задачи по методу узловых потенциалов вначале определяем напряжение между точками 1 и 2:

$$\begin{aligned} \dot{U}_{12} &= \frac{\dot{E}_1 Y_1 + \dot{E}_2 Y_2}{Y_1 + Y_2 + Y_3} = \frac{100 \frac{1}{50 + j30} + 100e^{-j30^\circ} \cdot \frac{1}{50 + j30}}{\frac{1}{50 + j30} + \frac{1}{50 + j30} + \frac{1}{100}} = \\ &= (71,5 - j28,6) \text{ в.} \end{aligned}$$

Токи в ветвях находим по закону Ома:

$$\begin{aligned} i_1 &= (\dot{E}_1 - \dot{U}_{12}) Y_1 = (100 - 71,5 + j28,6)(0,0147 - j0,00884) = \\ &= 0,693e^{j13^\circ 50'} \text{ а}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} i_2 &= (\dot{E}_2 - \dot{U}_{12}) Y_2 = (86,6 - j50 - 71,5 + j28,6)(0,0147 - j0,00884) = \\ &= 0,45e^{-j85^\circ 20'} \text{ а}; \end{aligned}$$

$$i_3 = \dot{U}_{12} Y_3 = 77e^{-j21^\circ 50'} \cdot 0,01 = 0,77e^{-j21^\circ 50'} \text{ а};$$

в) Для определения тока \dot{I}_2 , проходящего по Z_2 , по методу эквивалентного генератора напряжения надо найти э.д.с. \dot{E}_r эквивалентного генератора и его сопротивление Z_r (рис. 3.33, б).

Для определения \dot{E}_r отключим ветвь Z_2 (рис. 3.33, в) и вычислим напряжение холостого хода (между точками 3 и 1):

$$\dot{I}' = \frac{\dot{E}_1}{Z_1 + Z_3}, \quad \dot{U}_{12} = \dot{I}' Z_3 = E_r = \frac{\dot{E}_1 Z_3}{Z_1 + Z_3} = (64,2 - j12,8) \text{ в}.$$

Эквивалентное сопротивление генератора (рис. 3.33, в)

$$Z_r = \frac{Z_1 Z_3}{Z_1 + Z_3} = \frac{(50 + j30)100}{150 + j30} = (35,9 + j12,8) \text{ ом}.$$

Искомый ток (см. рис. 3.33, б)

$$\dot{i}_2 = \frac{\dot{E}_2 - \dot{E}_r}{Z_2 + Z_r} = \frac{43,5e^{-j59^\circ}}{85,9 + j42,8} = \frac{43,5e^{-j59^\circ}}{96e^{j26^\circ 30'}} = 0,453e^{-j85^\circ 30'} \text{ а}.$$

3.44. В схеме рис. 3.33, а известны $E_1 = E_2 = 400 \text{ в}$, т. е. генераторы синхронизированы, а внутренние сопротивления генераторов равны: $Z_1 = (0,04 + j0,2) \text{ ом}$, $Z_2 = (0,06 + j0,3) \text{ ом}$. Сопротивление нагрузки $Z_3 = (2,4 + j3,2) \text{ ом}$. Определить все токи методами, указанными в предыдущей задаче.

3.45. В цепи рис. 3.34, а найти токи и проверить баланс мощностей.

Задачу решить методами: а) контурных токов, б) узловых потенциалов, в) преобразованием генератора тока в эквивалентный генератор напряжения, г) методом эквивалентного генератора напряжения найти ток в ветви r_1 , д) то же в ветви r_2 .

Даны: $\dot{E}_1 = 20 \text{ в}$, $r_1 = 500 \text{ ом}$, $r_2 = 300 \text{ ом}$, $r_3 = 400 \text{ ом}$, $x_L = 600 \text{ ом}$, $x_C = 250 \text{ ом}$, $\dot{J} = 40 \text{ ма}$.

Решение. а) В схеме имеется $N_b = 5$ ветвей, $N_y = 3$ узла, $N_r = 1$ источник тока. Согласно формуле (1.10) число независимых уравнений составляемых по методу контурных токов $K = N_b - N_y + 1 - N_r = 2$. Выберем направления контурных токов \dot{J}_1 и \dot{J}_2 и то-

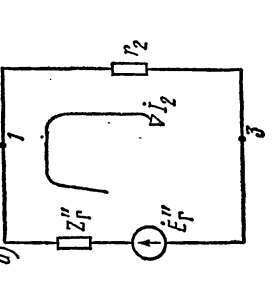
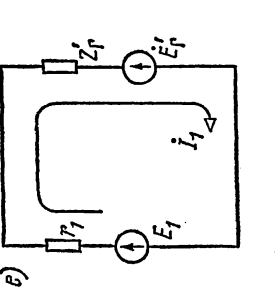
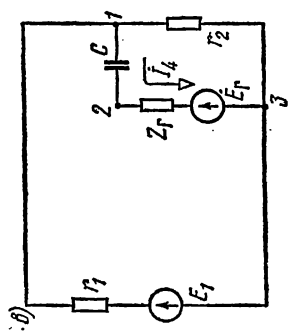
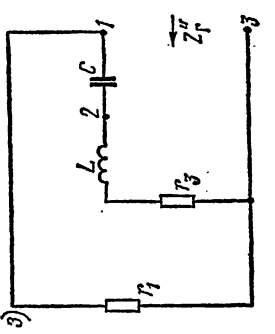
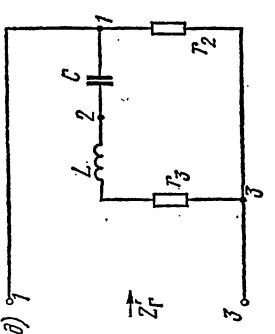
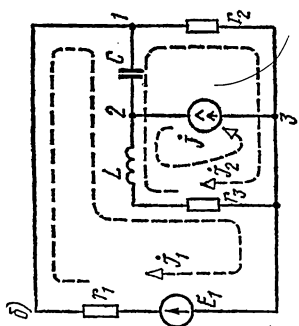
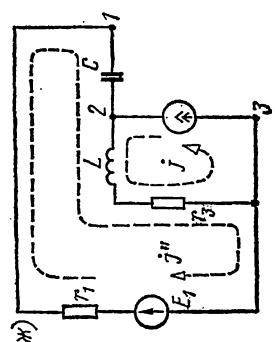
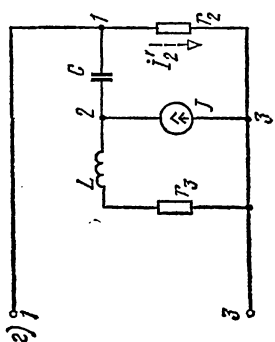
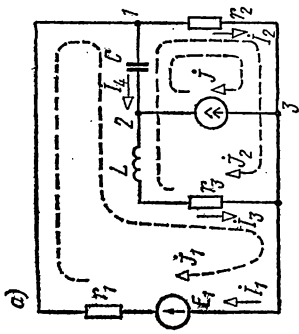


Рис. 3.34

ка источника тока \dot{J} , как это показано на рис. 3.34, а. Составим уравнения для первого и второго контуров:

$$\dot{J}_1 (r_1 + r_3 + ix_L - ix_C) - \dot{J}_2 (r_3 + ix_L - ix_C) - \dot{J} (-ix_C) = \dot{E}_1; \quad (1)$$

$$\dot{J}_2 (r_2 + r_3 + ix_L - ix_C) - \dot{J}_1 (r_3 + ix_L - ix_C) + \dot{J} (r_2 - ix_C) = 0. \quad (2)$$

Подставляя в эти уравнения исходные числовые значения и перенося известные величины в правые части уравнений, получим

$$\begin{aligned} (900 + j350) \dot{J}_1 - (400 + j350) \dot{J}_2 &= 20 - j10; \\ -(400 + j350) \dot{J}_1 + (700 + j350) \dot{J}_2 &= -0,04(300 - j250). \end{aligned}$$

Решая эти уравнения, найдем контурные токи:

$$\dot{J}_1 = 16,9 e^{-j32^\circ} \text{ ма}; \quad \dot{J}_2 = 15,2 e^{j79^\circ} \text{ ма}.$$

Токи в ветвях равны:

$$\begin{aligned} \dot{I}_1 = \dot{J}_1 &= 16,9 e^{-j32^\circ} \text{ ма}; \quad \dot{I}_2 = \dot{J}_2 + \dot{J} = 45,4 e^{j19^\circ} \text{ ма}; \\ \dot{I}_3 = \dot{J}_1 - \dot{J}_2 &= 26,3 e^{-j64^\circ 25'} \text{ ма}; \quad \dot{I}_4 = \dot{J}_1 - \dot{J}_2 - \dot{J} = 37,2 e^{-j140^\circ 20'} \text{ ма}. \end{aligned}$$

Если выбрать положительные направления контурных токов \dot{J}_1 и \dot{J}_2 такими же, как и прежде, а ток источника тока \dot{J} направить по ветви r_3, L (рис. 3.34, б), то уравнения для контуров будут:

$$\dot{J}_1 (r_1 + r_3 + ix_L - ix_C) - \dot{J}_2 (r_3 + ix_L - ix_C) + \dot{J} (r_3 + ix_L) = \dot{E};$$

$$\dot{J}_2 (r_2 + r_3 + ix_L - ix_C) - \dot{J}_1 (r_3 + ix_L - ix_C) - \dot{J} (r_3 + ix_L) = 0.$$

Подставляя сюда числовые значения и решая уравнения, найдем контурные токи:

$$\dot{J}_1 = 16,9 e^{-j32^\circ} \text{ ма}; \quad \dot{J}_2 = 45,4 e^{j19^\circ} \text{ ма}$$

и токи в ветвях:

$$\dot{I}_1 = \dot{J}_1 = 16,9 e^{-j32^\circ} \text{ ма}; \quad \dot{I}_2 = \dot{J}_2 = 45,4 e^{j19^\circ} \text{ ма};$$

$$\dot{I}_3 = \dot{J}_1 - \dot{J}_2 + \dot{J} = 26,3 e^{-j64^\circ 25'} \text{ ма};$$

$$\dot{I}_4 = \dot{J}_1 - \dot{J}_2 = 37,2 e^{-j140^\circ 20'} \text{ ма}.$$

Получены те же значения токов в ветвях, что и прежде, хотя не все контурные токи имеют такие же значения, как и ранее.

Проверка баланса мощностей. Мощности источников

$$\tilde{S} = \dot{E}_1 \dot{I}_1^* + \dot{U}_2 \dot{J}^* = 20 + 16,9 \cdot 10^{-3} e^{j32^\circ} + (400 + j600) 26,3 \cdot 10^{-3} \times \\ \times e^{j64^\circ 25'} \cdot 40 \cdot 10^{-3} = 1,038 + j0,071.$$

Мощности приемников энергии:

$$P = I_1^2 r_1 + I_2^2 r_2 + I_3^2 r_3 = (16,9 \cdot 10^{-3})^2 \cdot 500 + (45,4 \cdot 10^{-3})^2 300 + \\ + (26,3 \cdot 10^{-3})^2 40 = 1,038 \text{ вт};$$

$$Q = I_3^2 x_L - I_4^2 x_C = (26,3 \cdot 10^{-3})^2 600 - (37,2 \cdot 10^{-3})^2 250 = 0,071 \text{ вар}.$$

Из полученных результатов видно, что баланс мощностей соблюдается.

б) Приняв потенциал узла 3 равным нулю ($\dot{\varphi}_3 = 0$), составим уравнения по методу узловых потенциалов [см. формулу (1.13)]:

для узла 1

$$\dot{\varphi}_1 Y_{11} - \dot{\varphi}_2 Y_{12} = \dot{E}_1 Y_{11}; \quad (3)$$

для узла 2

$$-\dot{\varphi}_1 Y_{21} + \dot{\varphi}_2 Y_{22} = \dot{J}; \quad (4)$$

здесь $Y_{11} = \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + j \frac{1}{x_C}$ — сумма проводимостей ветвей, присоединенных к узлу 1:

$Y_{22} = j \frac{1}{x_C} + \frac{1}{r_3 + jx_L}$ — сумма проводимостей ветвей, присоединенных к узлу 2;

$Y_{12} = Y_{21} = j \frac{1}{x_C}$ — сумма проводимостей ветвей, соединяющих узлы 1 и 2.

Подставляя в уравнения (3) и (4) числовые значения, получим:

$$\dot{\varphi}_1 (5,33 + j4) 10^{-3} - \dot{\varphi}_2 j4 \cdot 10^{-3} = 0,04;$$

$$-\dot{\varphi}_1 j4 \cdot 10^{-3} + \dot{\varphi}_2 (0,77 + j2,85) 10^{-3} = 40 \cdot 10^{-3}.$$

Решая эти уравнения, вычислим потенциалы узловых точек 1 и 2:

$$\dot{\varphi}_1 = 13,6 e^{j19^\circ} \text{ в}, \quad \dot{\varphi}_2 = 19 e^{-j8^\circ} \text{ в}.$$

Токи в ветвях найдем по закону Ома:

$$\dot{I}_1 = \frac{\dot{\varphi}_3 - \dot{\varphi}_1 + E_1}{r_1} = \frac{-13,6 e^{j19^\circ} + 20}{500} = 16,9 e^{-j32^\circ} \text{ ма};$$

$$\dot{I}_2 = \frac{\dot{\varphi}_1 - \dot{\varphi}_3}{r_2} = \frac{13,6 e^{j19^\circ}}{300} = 45,4 e^{j19^\circ} \text{ ма};$$

$$\dot{I}_3 = \frac{\dot{\varphi}_2 - \dot{\varphi}_3}{r_3 + jx_L} = \frac{19 e^{-j8^\circ}}{400 + j600} = 26,3 e^{-j64^\circ 25'} \text{ ма};$$

$$\dot{I}_4 = \frac{\dot{\varphi}_1 - \dot{\varphi}_2}{-jx_C} = \frac{13,6 e^{j19^\circ} - 19 e^{-j8^\circ}}{-j250} = 37,2 e^{-j140^\circ 20'} \text{ ма}.$$

Проверка показывает, что в узловой точке 2 ток $\dot{J} = \dot{I}_3 - \dot{I}_4$.

в) Преобразуем генератор тока в эквивалентный генератор напряжения. Для этого ветвь $r_3 L_3$, подключенную параллельно к генератору тока, будем рассматривать как его внутреннее сопротивление. Параметры эквивалентного генератора напряжения найдем по формуле (3.21):

$$\dot{E}_r = \dot{J}(r_3 + jx_L) = 40 \cdot 10^{-3}(400 + j600) = 28,9 e^{j56^\circ 20'} \text{ в};$$

$$Z_r = r_3 + jx_L = (400 + j600) \text{ ом}.$$

Исходная схема после замены генератора тока эквивалентным генератором напряжения примет вид (рис. 3.34, в). Для этой схемы токи проще всего рассчитать по методу двух узлов. Приняв $\varphi_3 = 0$, по формуле (1.14) найдем потенциал узловой точки 1:

$$\begin{aligned} \dot{\varphi}_1 &= \frac{\dot{E} \frac{1}{r_1} + \dot{E}_r \frac{1}{Z_r - jx_C}}{\frac{1}{r_1} + \frac{1}{Z_r - jx_C} + \frac{1}{r_2}} = \frac{\frac{20}{500} + \frac{28,9 e^{j56^\circ 20'}}{400 + j600 - j250}}{\frac{1}{500} + \frac{1}{400 + j600 - j250} + \frac{1}{300}} = \\ &= 13,6 e^{j19^\circ} \text{ в}. \end{aligned}$$

Токи в ветвях вычисляем по закону Ома:

$$\dot{I}_1 = \frac{\dot{\varphi}_3 - \dot{\varphi}_1 + \dot{E}_1}{r_1} = 16,9 e^{-j32^\circ} \text{ ма};$$

$$\dot{I}_2 = \frac{\dot{\varphi}_1 - \dot{\varphi}_3}{r_2} = 45,4 e^{j19^\circ} \text{ ма};$$

$$\dot{I}_4 = \frac{\dot{\varphi}_1 - \dot{\varphi}_3 - \dot{E}_r}{Z_r - jx_C} = 37,2 e^{-j140^\circ 20'} \text{ ма}.$$

Ток в ветви r_3, L_3 найдем по первому закону Кирхгофа:

$$\dot{I}_3 = \dot{J} + \dot{I}_4 = 26,3 e^{-j64^\circ 25'} \text{ ма}.$$

г) Расчет тока \dot{I}_1 в ветви r_1 методом эквивалентного генератора напряжения.

Для определения параметров \dot{E}_r и Z_r эквивалентного генератора напряжения отключим ветвь E_1, r_1 (рис. 3.34, з). Э. д. с. эквивалентного генератора очевидно равна напряжению между точками 1

и 3. Для ее вычисления предварительно найдем ток, проходящий по r_2 (ток \dot{J} распределяется обратно пропорционально сопротивлениям параллельных ветвей r_3 , L и r_2 , C):

$$\dot{I}'_2 = \dot{J} \frac{r_3 + jx_L}{r_2 + r_3 + jx_L - jx_C} = 40 \frac{400 + j600}{700 + j350} = 36,9e^{j29^\circ 45'} \text{ ма.}$$

Искомое напряжение эквивалентного генератора напряжения

$$\dot{E}'_r = \dot{U}_{x \cdot x \cdot} = \dot{I}'_2 r_2 = 11,1e^{j29^\circ 45'} \text{ в.}$$

Внутреннее сопротивление генератора напряжения Z'_r находим из схемы рис. 3.34, б, которая получена из рис. 3.34, а, где исключен источник тока, внутреннее сопротивление которого бесконечно велико:

$$Z'_r = \frac{r_2 [r_3 + j(x_L - x_C)]}{r_2 + r_3 + j(x_L - x_C)} = \frac{300(400 + j350)}{700 + j350} = 204e^{j14^\circ 35'} \text{ ом.}$$

Искомый ток в ветви r_1 (рис. 3.34, в)

$$\dot{I}'_1 = \frac{\dot{E}'_1 - \dot{E}'_r}{r_1 + Z'_r} = \frac{20 - 11,1e^{j29^\circ 45'}}{500 + 204e^{j14^\circ 35'}} = 16,9e^{-j32^\circ} \text{ ма.}$$

д) Отключаем ветвь r_2 (рис. 3.34, ж) и находим напряжение между точками 1 и 3. Для этого предварительно находим контурный ток \dot{J}'' :

$$\dot{J}''(r_1 + r_3 + jx_L - jx_C) + \dot{J}(r_3 + jx_L) = \dot{E}'_1.$$

Подставляя сюда числовые значения, получим

$$\dot{J}'' = 25,2e^{-j101^\circ 15'} \text{ ма.}$$

Искомое напряжение \dot{U}'_{13} между точками 1 и 3 равно э. д. с. эквивалентного генератора:

$$\dot{E}'_r = \dot{U}'_{13} = \dot{E}'_1 - \dot{J}'' r_1 = 20 - 25,2 \cdot 10^{-3} e^{j101^\circ 15'} \cdot 500 = 25,8e^{j28^\circ 30'} \text{ в.}$$

Находим сопротивление эквивалентного генератора между точками 1 и 3 (рис. 3.34, з):

$$Z''_r = \frac{r_1(r_3 + jx_L - jx_C)}{r_1 + r_3 + j(x_L - x_C)} = \frac{500(400 + j350)}{900 + j350} = 276e^{j20^\circ} \text{ ом.}$$

Искомый ток (рис. 3.34, и)

$$\dot{I}_2 = \frac{\dot{E}'_r}{r_2 + Z''_r} = \frac{25,8e^{j28^\circ 30'}}{300 + 276e^{j20^\circ}} = 45,4e^{j19^\circ} \text{ ма.}$$

3.46. Для каждой из цепей (рис. 3.35, а—г) рассчитать токи и найти потенциалы узловых точек, если потенциал точки 1 принять равным нулю. Задачу решить методом контурных токов или узловых потенциалов. Кроме того, определить ток в ветви с емкостью по методу эквивалентного генератора напряжения или тока. На схеме э. д. с. даны в вольтах, токи источников тока — в амперах, сопротивление — в омах.

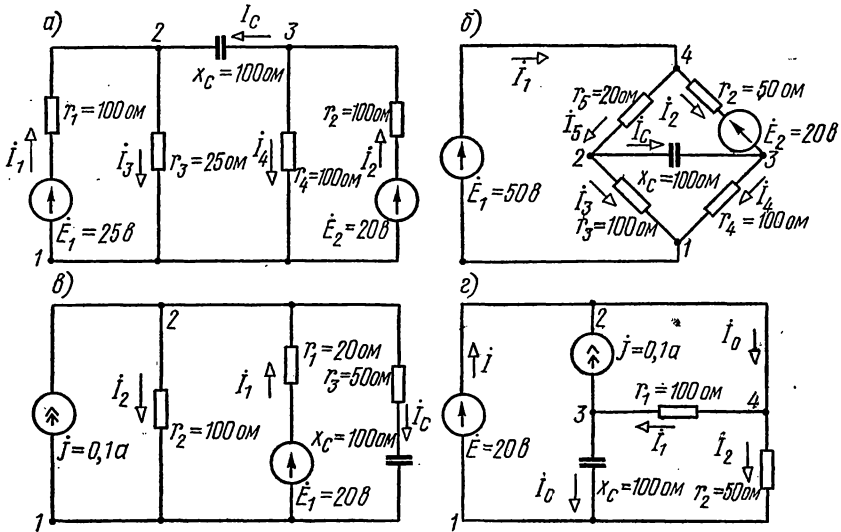


Рис. 3.35

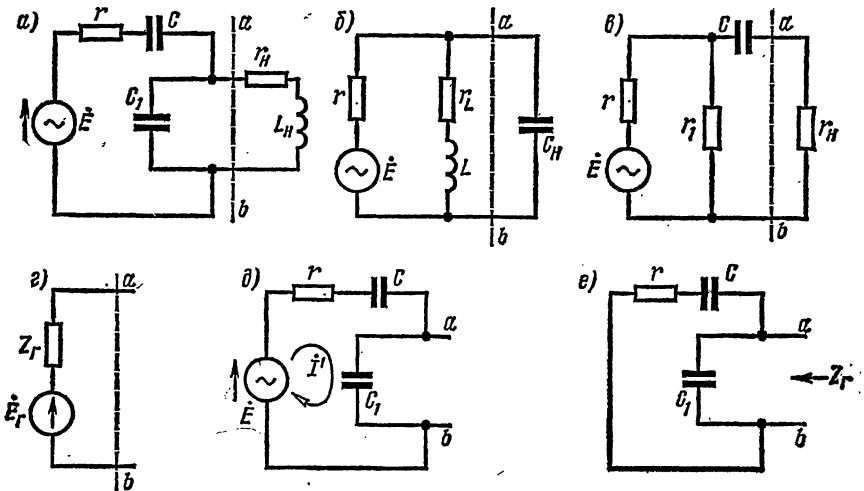


Рис. 3.36

3.47. Для каждой из частей схем рис. 3.36, а, б, в, расположенных левее штриховой линии ab , найти э. д. с. \dot{E}_r эквивалентного генератора напряжения и его внутреннее сопротивление Z_r (рис. 3.37, г). Определить ток \dot{I}_H в ветви нагрузки, расположенной правее линии ab . Частота переменного тока f .

Решение. Приведем расчет для схемы рис. 3.36, а. Отключим ветвь правее линии ab (рис. 3.36, б) и найдем напряжение холостого хода между точками a и b , равное \dot{E}_r :

$$\dot{U}_{ab \text{ х.х}} = \dot{E}_r = -j \frac{1}{\omega C_1} \dot{I}' = -j \frac{\frac{1}{\omega C_1} \dot{E}}{r - j \left(\frac{1}{\omega C} + \frac{1}{\omega C_1} \right)}.$$

Сопротивление эквивалентного генератора найдем по схеме (рис. 3.36, в):

$$Z_r = \frac{-j \frac{1}{\omega C_1} \left(r - j \frac{1}{\omega C} \right)}{r - j \left(\frac{1}{\omega C} + \frac{1}{\omega C_1} \right)}.$$

Ток в искомой ветви

$$\dot{I}_H = \frac{\dot{E}_r}{r_H + j\omega L_H + Z_r}.$$

3.48. К идеальному источнику напряжения E подключена цепь (рис. 3.37), сопротивления которой: $Z_1 = Z_2 = 100 \text{ ом}$, $Z_3 = j50 \text{ ом}$, $Z_4 = -j50 \text{ ом}$, $Z_5 = 200 \text{ ом}$, $Z_6 = (100 + j100) \text{ ом}$. При разомкнутом контакте вольтметр показывает напряжение, равное 100 в. Найти, чему равна э. д. с. E . Методом эквивалентного генератора определить показание амперметра A при замыкании контакта K .

3.49. Воспользовавшись преобразованием треугольника в звезду, найти все токи в неуравновешенном мостике (рис. 3.38). Приложенное к цепи напряжение $U = 130 \text{ в}$. Сопротивления элементов цепи: $Z_1 = 10 \text{ ом}$, $Z_2 = j5 \text{ ом}$, $Z_3 = j10 \text{ ом}$, $Z_4 = 5 \text{ ом}$ и $Z_5 = -j10 \text{ ом}$. Вычислить мощность, расходуемую в цепи.

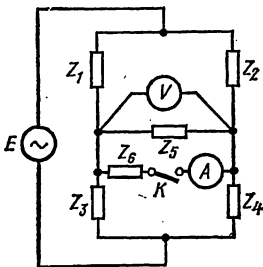


Рис. 3.37

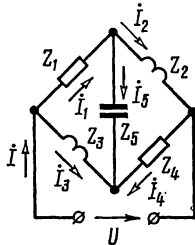


Рис. 3.38

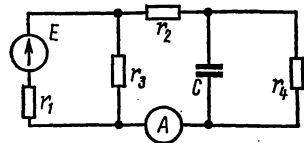


Рис. 3.39

3.50. Решить задачу 3.49 методами контурных токов и узловых потенциалов, методом эквивалентного генератора напряжения найти ток, проходящий через конденсатор, и ток в сопротивлении Z_4 ; в тех же ветвях найти ток методом эквивалентного генератора тока.

Указание. Разобрать решение задачи 1.59.

3.51. Методом эквивалентного генератора напряжения определить показание амперметра, включенного в цепь рис. 3.39. Даны: $E = 40$ в, $r_1 = 200$ ом, $r_2 = 160$ ом, $r_3 = 120$ ом, $r_4 = 80$ ом и $x_C = 60$ ом.

3.52. В цепи рис. 3.40 комплексные сопротивления: $Z_1 = (19 - j2)$ ом, $Z_2 = 40$ ом, $Z_3 = (6 + j8)$ ом, $Z_4 = (5 - j15)$ ом, $Z_5 = (5 - j20)$ ом и $Z_6 = (5 + j15)$ ом. Напряжение $U = 100$ в. Вычислить все токи путем преобразования треугольника в звезду, методами контурных токов и узловых потенциалов, методами эквивалентного генератора напряжения и тока определить ток, проходящий через сопротивление Z_6 .

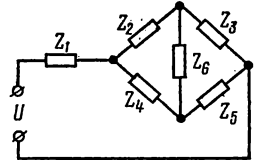


Рис. 3.40

3.53. В схеме рис. 3.41 включен источник синусоидального тока, действующее значение которого $J = 10$ ма. Даны: $Z_1 = 2$ ком, $Z_2 = 3$ ком, $Z_3 = -j10$ ком, $Z_4 = (2 + j10)$ ком и $Z_5 = 5$ ком.

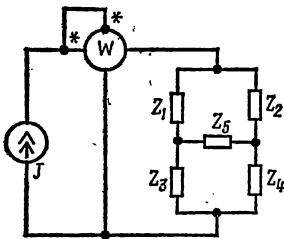


Рис. 3.41

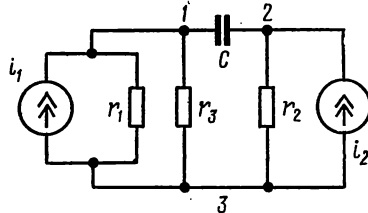


Рис. 3.42

Найти все токи методами контурных токов и узловых потенциалов. Определить показание ваттметра и убедиться в том, что оно равно сумме мощностей, расходуемых во всех активных сопротивлениях цепи.

Методами эквивалентного генератора напряжения и эквивалентного генератора тока определить ток в ветви Z_4 ; то же в ветви Z_5 .

Указание. Разобрать решения задач 1.40, 1.59 и 1.65.

3.54. В цепь рис. 3.42 включены два генератора синусоидального тока: $i_1 = 50\sqrt{2} \sin \omega t$ ма, $i_2 = 20\sqrt{2} \sin \omega t$ ма.

Даны: $r_1 = 10$ ком, $r_2 = 25$ ком, $r_3 = 20$ ком и $x_C = 34$ ком. Определить все токи. Задачу решить методами узловых потенциалов, контурных токов, наложения, преобразованием генераторов тока в эквивалентные генераторы напряжения.

В. Условия выделения максимальной мощности в нагрузке

3.55. Сопротивления схемы (рис. 3.43, а): $r = 10 \text{ ом}$, $x_C = 30 \text{ ом}$, э. д. с. $E = 100 \text{ в}$.

При каком нагрузочном сопротивлении Z_H в нем выделится максимальная мощность и чему она равна? Вычислить к. п. д., т. е. отношение мощности, выделяемой в Z_H , к мощности, доставляемой источником E , и коэффициент передачи K — отношение напряжения на зажимах 2-2' к E .

Решение. Часть схемы левее зажимов 2-2' (обведенную штриховой линией) заменим эквивалентным генератором напряжения.

Найдем его э. д. с. \dot{E}_r и сопротивление Z_r (рис. 3.43, б). Отключив Z_H , определим напряжение холостого хода между точками 2-2', которое равняется э. д. с. \dot{E}_r :

$$\dot{E}_r = \frac{E}{r - jx_C} (-jx_C) = -j30 \frac{100}{10 - j30} = 90 - j30 = 95e^{-j18^\circ 25'} \text{ в.}$$

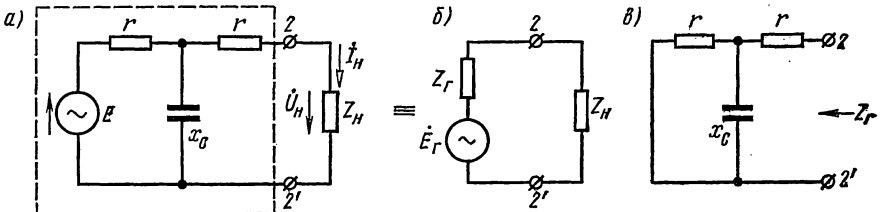


Рис. 3.43

Сопротивление эквивалентного генератора (рис. 3.43, в)

$$Z_r = r + \frac{-jx_C r}{r - jx_C} = 10 + \frac{-j30 \cdot 10}{10 - j30} = (19 - j3) \text{ ом.}$$

Максимум мощности выделяется в нагрузке Z_H при условии, что это сопротивление комплексно сопряжено с сопротивлением эквивалентного генератора, т. е. при $Z_H = Z_r^* = (19 + j3) \text{ ом}$. Эта мощность

$$P_{H \max} = \frac{E_r^2}{4r_H} = \frac{95^2}{4 \cdot 19} = 118 \text{ вт.}$$

Рассчитываем мощность, доставляемую генератором (рис. 3.43, а). Для этого вначале вычислим ток, проходящий через источник э. д. с. E :

$$\dot{i} = \frac{E}{r_1 + \frac{-jx_C (r_1 + Z_H)}{r_1 + Z_H - jx_C}} = \frac{100}{10 - \frac{j30 (29 + j3)}{29 - j27}} = 3,3e^{j28^\circ 37'} \text{ а;}$$

$$P_r = \operatorname{Re} [\dot{E} \dot{I}^*] = \operatorname{Re} [100 \cdot 3,3 e^{-j28^\circ 37'}] = 100 \cdot 3,3 \cos 28^\circ 37' = 290 \text{ вт.}$$

К. п. д.

$$\eta = \frac{P_{H \max}}{P_r} 100\% = \frac{118}{290} \cdot 100\% = 40,7\%.$$

Для расчета коэффициента передачи K сначала найдем ток, протекающий через Z_H :

$$\dot{i}_H = \dot{i} \frac{-jx_C}{r_1 + Z_H - jx_C} = 3,3 e^{j28^\circ 37'} \cdot \frac{-j30}{29 - j27} = 2,5 e^{-j18^\circ 23'} \text{ а;}$$

$$K = \frac{\dot{U}_H}{E} = \frac{\dot{i}_H Z_H}{E} = \frac{2,5 e^{-j18^\circ 23'} (19 + j3)}{100} = 0,48 e^{-j9^\circ 25'}$$

3.56. Для цепи рис. 3.44 найти сопротивление Z_H , при котором в нем выделится максимальная мощность и вычислить ее. Чему равно отношение мощностей, выделяемой в Z_H , к мощности, доставляемой источником, и коэффициент передачи $K = \frac{U_2}{E}$.

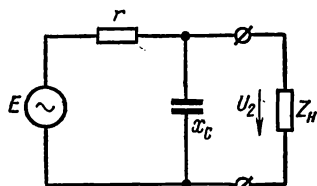


Рис. 3.44

Даны: $E = 100 \text{ в; } r = 10 \text{ ом; } x_C = 20 \text{ ом.}$

Г. Круговые диаграммы

3.57. Цепь, состоящая из последовательно соединенных активного сопротивления r и реактивного x , подключена к источнику синусоидального напряжения, действующее значение которого $U = 120 \text{ в.}$

Построить круговую диаграмму токов для двух случаев: 1) $r = 30 \text{ ом, } x$ изменяется от $-\infty$ до $+\infty$; 2) $x = 50 \text{ ом, } r$ изменяется от нуля до бесконечности. Пользуясь диаграммой, найти ток: 1) $x = 26 \text{ ом, } 2) r = 20 \text{ ом.}$

3.58. Электрическая цепь состоит из двух параллельных ветвей: первая содержит последовательно соединенные активное сопротивление $r_1 = 10 \text{ ом}$ и изменяющееся от нуля до бесконечности индуктивное сопротивление x_1 , вторая — последовательно соединенные активное сопротивление $r_2 = 7,7 \text{ ом}$ и емкостное сопротивление $x_2 = -18,6 \text{ ом.}$ Напряжения на зажимах цепи переменного тока $U = 75 \text{ в.}$

Построить круговую диаграмму неразветвленного тока I . Пользуясь ею, определить, при каком значении переменной величины x_1 наступит резонанс токов и чему при этом равны токи I и I_1 .

3.59. Цепь состоит из двух параллельных ветвей: в первой последовательно соединены $r_1 = 10 \text{ ом}$ и $x_1 = 16 \text{ ом;}$ во второй — $x_2 =$

$= -6,25 \text{ ом}$ и изменяющееся от нуля до бесконечности активное сопротивление r_2 .

Построить круговую диаграмму и, пользуясь ею, найти сопротивление r_2 , при котором в цепи будет резонанс токов. Чему в этом случае равен ток I ? При каких значениях r_2 ток I в неразветвленной части цепи имеет максимум и минимум? Определить их. Напряжение $U = 120 \text{ в}$.

Глава четвертая

РЕЗОНАНС В ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЯХ

ОСНОВНЫЕ ПОЛОЖЕНИЯ И СООТНОШЕНИЯ

Резонанс. Если в электрической цепи или участке цепи, содержащем реактивные элементы, напряжение и ток совпадают по фазе, то имеет место явление резонанса. Эквивалентное реактивное сопротивление или реактивная проводимость цепи или участка цепи, где имеется резонанс, равны нулю.

2. Резонанс при последовательном соединении r , L и C . Резонанс напряжений возможен в цепи или участке цепи, содержащем последовательно соединенные индуктивность и емкость. Цепь схемы (рис. 4.1) называют последовательным колебательным контуром.

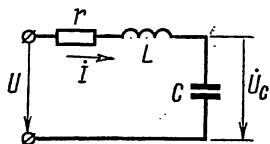


Рис. 4.1

Входное комплексное сопротивление последовательного контура

$$Z(j\omega) = r + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) = r + jx = ze^{j\varphi}, \quad (4.1)$$

где $x = \omega L - \frac{1}{\omega C}$ — реактивное сопротивление контура;

$z = \sqrt{r^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}$ — полное сопротивление контура;

$\varphi = \arctg \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{r}$ — сдвиг фаз между напряжением и током.

Условие резонанса напряжений

$$x = 0 \quad \text{или} \quad \omega L = \frac{1}{\omega C}. \quad (4.2)$$

Угловая резонансная частота

$$\omega_0 = 2\pi f = \frac{1}{\sqrt{LC}}. \quad (4.3)$$

При резонансе напряжений применяются следующие соотношения и формулы:

* Выводы формул данной главы можно найти в [1], [2], [4], [16], [30].

характеристическое сопротивление контура — сопротивление каждого из реактивных элементов при резонансе

$$\rho = \omega_0 L = \frac{1}{\omega_0 C} = \sqrt{\frac{L}{C}}, \quad (4.4)$$

добротность контура

$$Q = \frac{\rho}{r}, \quad (4.5)$$

затухание контура

$$d = 1/Q. \quad (4.6)$$

При резонансе напряжений ток в контуре

$$I_0 = \frac{U}{r}, \quad (4.7)$$

а напряжение на индуктивности равно напряжению на емкости:

$$U_{L0} = U_{C0} = I_0 \rho = UQ = \frac{U}{d}. \quad (4.8)$$

Абсолютная расстройка

$$\Delta\omega = \omega - \omega_0 \quad \text{или} \quad \Delta f = f - f_0. \quad (4.9)$$

Относительная расстройка

$$\frac{\Delta\omega}{\omega_0} = \frac{\Delta f}{f_0}. \quad (4.10)$$

Обобщенная расстройка

$$\xi = \frac{x}{r} = \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{r} = Q \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right) = \operatorname{tg} \varphi. \quad (4.11a)$$

Зависимость комплексного тока в контуре от обобщенной расстройки:

$$\dot{i} = \frac{\dot{U}}{Z(j\omega)} = \frac{\dot{U}}{r(1 + j\xi)} = \frac{\dot{U} e^{-j\varphi}}{r\sqrt{1 + \xi^2}} = \frac{\dot{U} e^{-j\varphi}}{z}, \quad (4.12a)$$

где $Z(j\omega) = r + jx = r + j\xi r$ — комплексное полное сопротивление;
 $z = r\sqrt{1 + \xi^2}$ — модуль полного сопротивления;
 $\varphi = \operatorname{arctg} \xi$ — сдвиг фаз между напряжением и током. (4.13)

Уравнение *резонансной кривой тока* есть отношение модуля тока при любой частоте к току при резонансной частоте (при неизменных значениях напряжения и параметров цепи):

$$k_I = \frac{I}{I_0} = \left| \frac{1}{1 + j\xi} \right| = \frac{1}{\sqrt{1 + \xi^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left[Q \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right) \right]^2}} \quad (4.14a)$$

Уравнение фазовой характеристики

$$\varphi = \operatorname{arctg} \xi = \operatorname{arctg} \frac{x}{r} = \operatorname{arctg} Q \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right). \quad (4.116)$$

Комплексные коэффициенты передачи по напряжению:

$$\left. \begin{aligned} K_C(j\omega) &= \frac{\dot{U}_C}{\dot{U}} = -j \frac{\omega_0}{\omega} \frac{Q}{1 + j\xi}; \\ K_L(j\omega) &= \frac{\dot{U}_L}{\dot{U}} = j \frac{\omega}{\omega_0} \frac{Q}{1 + j\xi}. \end{aligned} \right\} \quad (4.15a)$$

При небольших расстройках формулы (4.11) — (4.15) имеют вид:

$$\xi = \frac{x}{r} \approx 2Q \frac{\Delta\omega}{\omega_0}; \quad x = 2\rho \frac{\Delta\omega}{\omega_0}, \quad (4.11b)$$

$$i \approx \frac{\dot{U}}{r \left(1 + j2Q \frac{\Delta\omega}{\omega_0} \right)} = \frac{\dot{U} e^{-j\varphi}}{r \sqrt{1 + \left(2Q \frac{\Delta\omega}{\omega_0} \right)^2}}; \quad (4.126)$$

$$z \approx r \sqrt{1 + \left(2Q \frac{\Delta\omega}{\omega_0} \right)^2}, \quad \varphi \approx \operatorname{arctg} 2Q \frac{\Delta\omega}{\omega_0}; \quad (4.136)$$

$$k_I = \frac{I}{I_0} \approx \frac{1}{\sqrt{1 + \left(2Q \frac{\Delta\omega}{\omega_0} \right)^2}}; \quad (4.146)$$

$$K_C(j\omega) = \frac{\dot{U}_C}{\dot{U}} \approx -j \frac{Q}{1 + j2Q \frac{\Delta\omega}{\omega_0}}; \quad K_L(j\omega) = \frac{\dot{U}_L}{\dot{U}} \approx j \frac{Q}{1 + j2Q \frac{\Delta\omega}{\omega_0}}. \quad (4.156)$$

При использовании приближенного равенства (4.11b) расчеты по формулам (4.126) — (4.156) дают относительную ошибку, которая может быть определена по формуле

$$\delta = -\frac{\Delta\omega}{2\omega_0}. \quad (4.16)$$

Полоса пропускания определяется из условия, что ток на частотах f_1 и f_2 , соответствующих границе полосы пропускания, уменьшается в $\sqrt{2}$.

Абсолютное и относительное значение полосы пропускания определяются по формулам:

$$S_a = f_2 - f_1 = \frac{f_0}{Q}; \quad (4.17)$$

$$S_0 = \frac{S_a}{f_0} = \frac{1}{Q}.$$

3. Резонанс токов может быть в цепи, содержащей параллельно соединенные индуктивности и емкости.

Резонанс токов для цепи с потерями энергии в обеих ветвях. Цепь рис. 4.2 называют простым параллельным колебательным контуром.

Условие резонанса

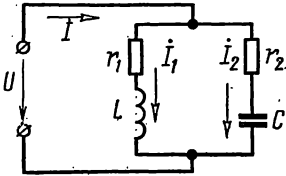


Рис. 4.2

$$b_1 = -b_2 \text{ или } \frac{\omega L}{r_1^2 + (\omega L)^2} = \frac{1}{r_2^2 + \left(\frac{1}{\omega C}\right)^2}. \quad (4.18a)$$

Угловая резонансная частота

$$\omega_p = \frac{1}{\sqrt{LC}} \sqrt{\frac{\rho^2 - r_1^2}{\rho^2 - r_2^2}}, \quad (4.19a)$$

где характеристическое сопротивление

$$\rho = \sqrt{\frac{L}{C}}. \quad (4.20)$$

Сопротивление параллельного контура при резонансе

$$Z_p = r_p = \frac{r_1 r_2 + \rho^2}{r_1 + r_2}. \quad (4.21a)$$

Добротность контура

$$Q = \frac{\rho}{r_1 + r_2}. \quad (4.22)$$

Ток в неразветвленной части цепи при резонансе

$$I_p = \frac{U}{r_p} \quad (4.23)$$

Частные случаи резонанса токов для цепи рис. 4.2.

Цепь не имеет потерь ($r_1 = r_2 = 0$).

Условие резонанса

$$\frac{1}{\omega_p L} = \omega_p C. \quad (4.18b)$$

Угловая резонансная частота

$$\omega_p = \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}. \quad (4.19b)$$

Сопротивление контура при резонансе

$$Z_p = \infty. \quad (4.21b)$$

Для добротного контура $Q \gg 1$ (рис. 4.2 и 4.3); т. е. при малых потерях можно считать, что

$$\omega_p \approx \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}. \quad (4.19B)$$

Сопротивление этого контура при резонансе

$$r_p = \frac{p^2}{r_1 + r_2} = \frac{p^2}{r} = Q^2 r = \frac{L}{rC}, \quad (4.21B)$$

где

$$r = r_1 + r_2.$$

Токи в каждой из ветвей при резонансе примерно одинаковы $I_{1p} \approx I_{2p}$, и каждый из них больше тока в неразветвленной части цепи I_p в Q раз:

$$\frac{I_{1p}}{I_p} \approx \frac{I_{2p}}{I_p} \approx Q. \quad (4.24)$$

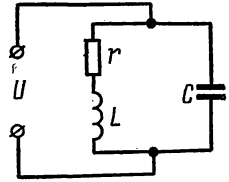


Рис. 4.3

Мощность, выделяемая в параллельном контуре при резонансе,

$$P_p = I_p^2 r_p = I_{1p}^2 r_1 + I_{2p}^2 r_2. \quad (4.25)$$

При небольшой расстройке контура ($\Delta\omega = \omega - \omega_p$), т. е. когда

$$|\Delta\omega| < \delta = \frac{r_1 + r_2}{2L} = \frac{r}{2L}, \quad (4.26)$$

комплексное сопротивление можно определять по приближенной формуле

$$Z(j\omega) = \frac{r_p}{1 + j\xi} = \frac{r_p}{1 + \xi^2} - j \frac{r_p}{1 + \xi^2} \xi \quad \xi = r_0 + jx_0 = z_0 e^{j\varphi_0},$$

где

$$r_0 = \frac{r_p}{1 + \xi^2}, \quad x_0 = -\frac{r_p}{1 + \xi^2} \xi, \quad z_0 = \frac{r_p}{\sqrt{1 + \xi^2}}, \quad (4.27)$$

$$\varphi_0 = -\arctg \xi, \quad \xi = \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{r_1 + r_2} = \pm \frac{\Delta\omega}{\delta}.$$

Подключение простого параллельного контура к генератору напряжения с э.д.с. \dot{E} и внутренним сопротивлением R_i показано на рис. 4.4.

Ток в неразветвленной части цепи и напряжение на параллельном контуре \dot{U} при любой частоте определяются по

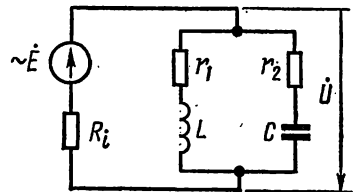


Рис. 4.4

формулам:

$$\dot{I} = \frac{\dot{E}}{R_i + Z}; \quad \dot{U} = \frac{\dot{E}Z}{R_i + Z}, \quad (4.28)$$

а при резонансе:

$$\dot{I}_p = \frac{\dot{E}}{R_i + r_p}; \quad U_p = \frac{Er_p}{R_i + r_p}. \quad (4.29)$$

Отношение этих напряжений

$$\frac{\dot{U}}{\dot{U}_p} = \frac{1}{1 + jQ_3 \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left[Q_3 \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right) \right]^2}} e^{-j\varphi_3}, \quad (4.30)$$

где эквивалентная (приведенная) добротность

$$Q_3 = \frac{Q}{1 + \frac{r_p}{R_i}}, \quad (4.31)$$

а угол сдвига фаз напряжения на контуре при любой частоте к тому же напряжению при резонансе

$$\varphi_3 = \arctg Q_3 \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right). \quad (4.32)$$

Полоса пропускания определяется из условия, что $\frac{U}{U_p} = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Абсолютная и относительная полоса пропускания:

$$S_{aU} = f_2 - f_1 = \frac{f_p}{Q_3}; \quad (4.33)$$

$$S_{oU} = \frac{S_{aU}}{f_p} = \frac{1}{Q_3}. \quad (4.34)$$

Комплексный коэффициент передачи по напряжению — отношение комплексного напряжения на параллельном контуре к э.д.с. генератора при любой частоте:

$$K_U(j\omega) = \frac{\dot{U}}{\dot{E}} = \frac{Q_3 \frac{\rho}{R_i}}{1 + jQ_3 \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)}. \quad (4.35)$$

При резонансе

$$K_{Up} = k_{Up} = Q_3 \frac{\rho}{R_i}. \quad (4.36)$$

Их отношение

$$\frac{K_U}{K_{Up}} = \frac{1}{1 + jQ_3 \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)}. \quad (4.37)$$

4. Резонанс токов в сложном параллельном контуре (рис. 4.5). Для добротных контуров, у которых

$$r_1 \ll |x_1| = \left| \omega L_1 - \frac{1}{\omega C_1} \right| \quad \text{и} \quad r_2 \ll |x_2| = \left| \omega L_2 - \frac{1}{\omega C_2} \right|,$$

полное сопротивление определяется по приближенной формуле

$$Z = \frac{-x_1 x_2}{r + jx} = -\frac{rx_1 x_2}{r^2 + x^2} + j \frac{xx_1 x_2}{r^2 + x^2} = r_3 + jx_3,$$

(4.38)

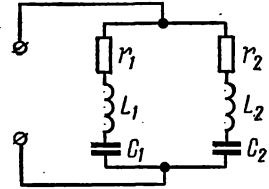


Рис. 4.5

где

$$r = r_1 + r_2, \quad x = x_1 + x_2, \quad r_3 = -\frac{rx_1 x_2}{r^2 + x^2}, \quad x_3 = \frac{xx_1 x_2}{r^2 + x^2}.$$

Условие резонанса токов (приближенное)

$$x_1 \approx -x_2 \quad \text{или} \quad \omega_p L_1 - \frac{1}{\omega_p C_1} \approx \frac{1}{\omega_p C_2} - \omega_p L_2, \quad (4.39)$$

отсюда угловая резонансная частота

$$\omega_p \approx \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}, \quad (4.40)$$

где $L = L_1 + L_2$ — полная индуктивность контура;

$C = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}$ — полная емкость контура.

Добротность сложного контура

$$Q = \frac{\rho}{r} = \frac{\omega_p L}{r_1 + r_2} = \frac{\omega_p L}{r} = \frac{1}{\omega_p C r}, \quad (4.41)$$

где

$$\rho = \sqrt{\frac{L}{C}}, \quad r = r_1 + r_2.$$

Полное сопротивление контура при резонансе определяется реактивным сопротивлением каждой из ветвей

$$r_p = \frac{x_1^2}{r} = \frac{x_2^2}{r}, \quad (4.42)$$

где

$$r = r_1 + r_2.$$

Если коэффициенты включения обозначить $m_L = \frac{L_1}{L}$, $m_C = \frac{C}{C_1}$, то полное сопротивление контура при резонансе

$$r_p = Q^2 r (m_L - m_C)^2. \quad (4.43)$$

Эта формула показывает возможность изменения величины r_p в широких пределах при данных L и C путем их перераспределения по ветвям, при неизменной частоте резонанса токов.

УПРАЖНЕНИЯ И ЗАДАЧИ

А. Резонанс напряжений

4.1. Определить емкость C , которую надо включить последовательно с катушкой, имеющей активное сопротивление $r = 16$ ом и индуктивность $L = 158$ мкГн, для того чтобы цепь была настроена на резонанс при частоте $f_0 = 1$ МГц. Найти ток, мощность, выделяемую в цепи, напряжения на конденсаторе и катушке при резонансе, если приложенное к цепи напряжение $U = 0,8$ в.

4.2. Последовательный колебательный контур (r , L , C) подключен к генератору синусоидальной э.д.с. $E = 1,6$ в с внутренним сопротивлением $R_i = 16$ ом. При какой величине сопротивления контура r в нем выделится максимальная мощность при резонансе и чему она будет равна?

4.3. Цепь состоит из индуктивной катушки r , L , соединенной последовательно с конденсатором без потерь. Приложенное ко всей цепи напряжение $U = 35$ в. Определить напряжение на катушке при резонансе, если при этом напряжение на конденсаторе равно 120 в.

4.4. Цепь схемы рис. 4.1, настроенная на резонанс при угловой частоте 5000 сек⁻¹, потребляет мощность 0,1 вт при токе 0,1 а. Напряжение на конденсаторе 200 в. Найти параметры цепи r , L , C и приложенное к ней напряжение.

4.5. Какому условию должны удовлетворять частоты f_1 и f_2 , при которых цепь, составленная из последовательно соединенных r , L и C , обладает одинаковыми по абсолютной величине, но противоположными по знаку реактивными сопротивлениями?

4.6. Найти параметры катушки (r , L), емкость C и сопротивление реостата r_1 , включенного в цепь, изображенную на рис. 4.6, если при резонансе приборы показали $U = 200$ в, $U_{10} = 204$ в, $U_{20} = 180$ в, $I_0 = 4$ а. Частота переменного тока $f = 50$ Гц.

4.7. Реостат с активным сопротивлением $r = 100$ ом, катушка с индуктивностью $L =$

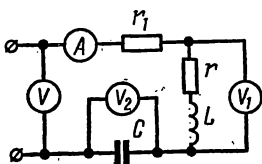


Рис. 4.6

= 5,05 мгн и конденсатор емкостью $C = 0,05$ мкф соединены последовательно. Вычислить резонансную частоту, характеристическое сопротивление, затухание контура, напряжения U_{L0} и U_{C0} при резонансной частоте. При каких частотах напряжения на конденсаторе $U_{C \max}$ и катушке $U_{L \max}$ достигнут максимума?

Чему они будут равны, если действующее значение напряжения переменной частоты, приложенного к цепи, $U = 10$ в?

Р е ш е н и е.

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{1}{5,05 \cdot 10^{-3} \cdot 0,05 \cdot 10^{-6}} = 6,28 \cdot 10^4 \text{ сек}^{-1};$$

$$f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{6,28 \cdot 10^4}{2 \cdot 3,14} = 10^4 \text{ гц};$$

$$\rho = \sqrt{\frac{L}{C}} = \sqrt{\frac{5,05 \cdot 10^{-3}}{0,05 \cdot 10^{-6}}} = 318 \text{ ом};$$

$$d = \frac{r}{\rho} = \frac{100}{318} = 0,314;$$

$$U_{L0} = U_{C0} = I_0 \rho = \frac{U}{r} \rho = \frac{10}{100} \cdot 318 = 31,8 \text{ в.}$$

Частоты, при которых напряжения на индуктивности и емкости максимальны, и значения этих максимальных напряжений определяются по формулам, известным из теории:

$$\omega_L = \omega_0 \sqrt{\frac{2}{2-d^2}} = 6,28 \cdot 10^4 \sqrt{\frac{2}{2-0,314^2}} = 6,45 \cdot 10^4 \text{ сек}^{-1};$$

$$\omega_C = \omega_0 \sqrt{\frac{2-d^2}{2}} = 6,13 \cdot 10^4 \text{ сек}^{-1};$$

$$f_L = \frac{\omega_L}{2\pi} = 10250 \text{ гц}; \quad f_C = \frac{\omega_C}{2\pi} = 9750 \text{ гц};$$

$$U_{L \max} = U_{C \max} = \frac{2U}{d \sqrt{4-d^2}} = \frac{2 \cdot 10}{0,314 \sqrt{4-0,314^2}} = 32,2 \text{ в.}$$

4.8. Катушка с индуктивностью $L = 5,05$ мгн и конденсатор с емкостью $C = 0,05$ мкф соединены последовательно с реостатом, сопротивление которого r . Ответить на вопросы задачи 4.7 для двух значений сопротивления: 1) $r = 318$ ом и 2) $r = 450$ ом.

4.9. Известно, что в последовательном колебательном контуре (см. рис. 4.1) при резонансной частоте 1 кгц отношение напряжения на емкости к напряжению на входе равно 50. Емкость $C = 0,5$ мкф. Вычислить r и L контура.

4.10. Электрическая цепь состоит из последовательно соединенных активного сопротивления $r = 10$ ом, катушки индуктивностью $L = 100$ мкгн и конденсатора емкостью $C = 100$ нф. Определить ре-

зонансную частоту ω_0 , характеристическое сопротивление ρ , затухание d и добротность Q . Чему равны ток I_0 , расходуемая в цепи мощность P_0 , напряжения на индуктивности U_{L_0} и емкости U_{C_0} при резонансе, если контур включен на напряжение $U = 1$ в? Вычислить абсолютное значение полосы пропускания контура.

Решение. По формулам (4.3)—(4.8) находим:

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{1}{\sqrt{100 \cdot 10^{-6} \cdot 100 \cdot 10^{-12}}} = 10^7 \text{ сек}^{-1};$$

$$f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{10^7}{2\pi} \approx 1,6 \cdot 10^6 \text{ гц} = 1,6 \text{ Мгц};$$

$$\rho = \sqrt{\frac{L}{C}} = \sqrt{\frac{100 \cdot 10^{-6}}{100 \cdot 10^{-12}}} = 1000 \text{ ом}; \quad d = \frac{r}{\rho} = \frac{10}{1000} = 0,01;$$

$$Q = \frac{\rho}{r} = \frac{1000}{10} = 100, \quad I_0 = \frac{U}{r} = \frac{1}{10} = 0,1 \text{ а} = 100 \text{ ма};$$

$$P_0 = I_0^2 r = 0,1^2 \cdot 10 = 0,1 \text{ вт} = 100 \text{ мвт};$$

$$U_{L_0} = U_{C_0} = I_0 \rho = 0,1 \cdot 1000 = 100 \text{ в}.$$

Полосу пропускания определяем по формуле (4.17):

$$S_a = \frac{f_0}{Q} = \frac{1,6 \cdot 10^6}{100} = 16000 \text{ гц}.$$

4.11. К контуру, данные которого приведены в задаче 4.10, подведено напряжение $U = 1$ в с угловой частотой $\omega = 1,002 \cdot 10^7 \text{ сек}^{-1}$. Чему при этом равны реактивное и полное сопротивление цепи, ток, мощность, напряжение на конденсаторе, сдвиг фаз φ между приложенным напряжением и током, сдвиг фаз φ' между приложенным напряжением и напряжением на конденсаторе, коэффициенты передачи по току и по напряжению?

Решение. Прежде всего вычислим абсолютную, относительную и обобщенную расстройку по формулам (4.9), (4.10) и (4.11в)

$$\Delta\omega = \omega - \omega_0 = 0,002 \cdot 10^7 \text{ сек}^{-1}; \quad \frac{\Delta\omega}{\omega_0} = 0,002;$$

$$\xi = 2Q \frac{\Delta\omega}{\omega_0} = 2 \cdot 100 \cdot 0,002 = 0,4.$$

Реактивное и полное сопротивление находим из (4.11в) и (4.13б)

$$x = \xi r = 0,4 \cdot 10 = 4 \text{ ом};$$

$$z = r \sqrt{1 + \xi^2} = 10 \sqrt{1 + 0,4^2} = 10,77 \text{ ом}.$$

Ток и расходуемая в контуре мощность:

$$I = \frac{U}{z} = \frac{1}{10,77} = 0,093 \text{ а} = 93 \text{ ма};$$

$$P = I^2 r = 0,093^2 \cdot 10 = 0,0865 \text{ вт} = 86,5 \text{ мвт}.$$

Напряжение на конденсаторе находим из (4.15б):

$$U_C = \frac{UQ}{\sqrt{1+\xi^2}} = \frac{1 \cdot 100}{\sqrt{1+0,4^2}} = 93 \text{ в.}$$

Сдвиг фаз между напряжением и током вычисляем из (4.13б):

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{x}{r} = \frac{4}{10} = 0,4; \quad \varphi = 21^\circ 50'.$$

Найдем сдвиг фаз φ' между \dot{U} и \dot{U}_C . Так как расстройка положительна, то $\omega L > \frac{1}{\omega C}$ и ток \dot{I} отстает от напряжения на угол φ ; вектор напряжения на конденсаторе \dot{U}_C отстает от вектора тока \dot{I} на 90° (рис. 4.7), поэтому \dot{U}_C отстает от \dot{U} на угол $\varphi' = \varphi + 90^\circ = 111^\circ 50'$.

При заданной расстройке коэффициенты передачи по току и по напряжению [см. формулы (4.14б) и (4.15б)] равны:

$$k_I = \frac{1}{\sqrt{1+\xi^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+0,4^2}} = 0,93;$$

$$k_C \approx k_L \approx \frac{Q}{\sqrt{1+\xi^2}} = \frac{100}{\sqrt{1+0,4^2}} = 93.$$

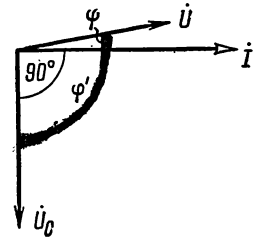


Рис. 4.7

4.12. Для контура и данных, рассмотренных в задачах 4.10 и 4.11, построить амплитудные и фазовые характеристики тока и напряжения на конденсаторе в зависимости от отношения $\frac{\omega}{\omega_0}$, от отношения расстройки частот питающего генератора Δf к резонансной частоте f_0 (построение сделать для частот, отличающихся от резонансной на $\pm 10\%$) и от обобщенной расстройки ξ (в пределах ± 4).

Решение. Построение амплитудной и фазочастотной характеристик тока и напряжения на конденсаторе в зависимости от $\frac{f}{f_0}$ и $\frac{\Delta f}{f_0}$ проводится на основании уравнений, получаемых из (4.14а) и (4.14б), (4.11б) и (4.11в), (4.15а):

$$I = \frac{I_0}{\sqrt{1 + \left[Q \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right) \right]^2}}; \quad \varphi = \operatorname{arctg} Q \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right);$$

$$U_C = \frac{\omega_0}{\omega} \frac{UQ}{\sqrt{1 + \left[Q \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right) \right]^2}}; \quad \varphi' = \operatorname{arctg} Q \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right) + \frac{\pi}{2}.$$

На практике обычно приходится иметь дело с небольшими расстройками $\Delta\omega = \omega - \omega_0$. В этом случае, учитывая, что

$$\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} = \frac{\omega^2 - \omega_0^2}{\omega_0\omega} = \frac{(\omega + \omega_0)(\omega - \omega_0)}{\omega_0\omega} \approx 2 \frac{\Delta\omega}{\omega_0},$$

формулы для I , φ , U_C и φ' примут вид:

$$I \approx \frac{I_0}{\sqrt{1 + \left(2Q \frac{\Delta\omega}{\omega_0}\right)^2}}; \quad \varphi \approx \arctg 2Q \frac{\Delta\omega}{\omega_0};$$

$$U_C \approx \frac{UQ}{\sqrt{1 + \left(2Q \frac{\Delta\omega}{\omega_0}\right)^2}}; \quad \varphi' \approx \arctg 2Q \frac{\Delta\omega}{\omega_0} + \frac{\pi}{2}.$$

Для удобства расчеты сведены в табл. 4.1. При этом следует иметь в виду, что $\Delta f/f_0 = \Delta\omega/\omega_0$ и $f/f_0 = \omega/\omega_0$.

Таблица 4.1

Задаваемые величины		Величины, рассчитанные при промежуточных вычислениях по приближенным формулам		Искомые величины, рассчитанные по приближенным формулам			
$\Delta f/f_0$ или f/f_0		$2 \frac{\Delta\omega}{\omega_0}$	$2Q \frac{\Delta\omega}{\omega_0}$	$I, \text{ мА}$	φ	$U_C, \text{ в}$	φ'
-0,10	0,90	-0,20	-20	5,0	-87°10'	5,0	2°50'
-0,08	0,92	-0,16	-16	6,2	-86°25'	6,2	3°35'
-0,06	0,94	-0,12	-12	8,3	-85°15'	8,3	4°45'
-0,04	0,96	-0,08	-8	12,4	-82°50'	12,4	7°10'
-0,02	0,98	-0,04	-4	24,3	-76°	24,3	14°
0	1,00	0	0	100	0	100	90°
0,02	1,02	0,04	4	24,3	76°	24,3	166°
0,04	1,04	0,08	8	12,4	82°50'	12,4	172°50'
0,06	1,06	0,12	12	8,3	85°15'	8,3	175°15'
0,08	1,08	0,16	16	6,2	86°25'	6,2	176°25'
0,10	1,10	0,20	20	5,0	87°10'	5,0	177°10'

По данным табл. 4.1 на рис. 4.8 начерчены требуемые кривые в зависимости от $\Delta f/f_0$ и f/f_0 .

Кривые зависимостей от обобщенной расстройки надо строить по уравнениям (4.12а), (4.13) и (4.15а):

$$I = \frac{U}{r \sqrt{1 + \xi^2}}; \quad \varphi = \arctg \xi;$$

$$U_C = \frac{UQ}{\sqrt{1 + \xi^2}}; \quad \varphi' = \arctg \xi + \frac{\pi}{2}.$$

Результаты расчетов сведены в табл. 4.2, а соответствующие кривые даны на рис. 4.8.

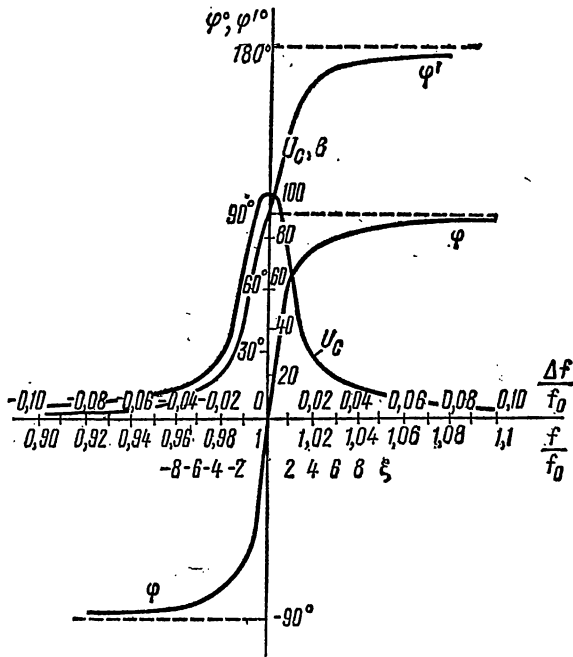


Рис. 4.8

Таблица 4.2

ξ	$I, \text{ мА}$	φ	$U_{c'}, \text{ в}$	φ'
-4	24,3	$-82^\circ 50'$	24,3	$7^\circ 10'$
-3	31,6	$-71^\circ 35'$	31,6	$18^\circ 25'$
-2	44,7	$-63^\circ 30'$	44,7	$26^\circ 30'$
-1	70,7	-45°	70,7	45°
0	100	0	100	90°
1	70,7	45°	70,7	135°
2	44,7	$63^\circ 30'$	44,7	$153^\circ 30'$
3	31,6	$71^\circ 35'$	31,6	$161^\circ 35'$
4	24,3	$82^\circ 50'$	24,3	$172^\circ 50'$

Наконец, выясним, каким значениям $\Delta f/f_0$ и f/f_0 соответствует фиксированная величина ξ . Пусть $\xi = \pm 1$. Тогда из выражения $\xi = \frac{1}{2Q} \frac{\Delta \omega}{\omega_0} = \pm 1$ находим, что

$$\frac{\Delta \omega}{\omega_0} = \frac{\Delta f}{f_0} = \pm \frac{1}{2Q} = \pm \frac{1}{2 \cdot 100} = \pm 0,005,$$

или

$$\frac{f - f_0}{f_0} = \frac{f}{f_0} - 1 = \pm 0,005,$$

отсюда

$$\frac{f}{f_0} = 1 \pm 0,005.$$

Таким образом, значению $\xi = \pm 1$ соответствуют $\Delta f/f_0 = \pm 0,005$, а $f/f_0 = 1,005$, или $0,995$, т. е. частота генератора напряжения отклоняется от резонансной на $\pm 0,5\%$. Аналогично найдем, что $\xi = 2$ соответствует $\Delta f/f_0 = \pm 0,01$; при $\xi = 3$ $\Delta f/f_0 = \pm 0,015$; при $\xi = 4$ $\Delta f/f_0 = \pm 0,02$.

4.13. Резонансный контур состоит из последовательно включенных $L = 100$ мкГн, $C = 100$ пФ и активного сопротивления r .

Построить амплитудные и фазовые характеристики для коэффициентов передачи по току k_I и по напряжению на емкости k_C в зависимости от $\Delta f/f_0$ и f/f_0 для трех значений активного сопротивления $r = 5$ ом, $r = 10$ ом и $r = 20$ ом.

У к а з а н и е. Искомые величины рассчитать по (4.14б), (4.13, б) и (4.15а).

Предварительно вычисляем добротности, которые соответственно равны: $Q_1 = 200$; $Q_2 = 100$; $Q_3 = 50$. На рис. 4.9 изображены требуемые кривые.

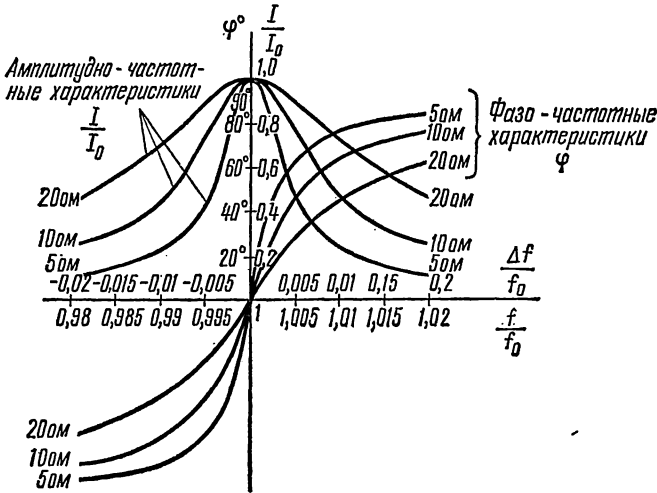


Рис. 4.9

4.14. В последовательном колебательном контуре, имеющем добротность $Q = 150$ и настроенном на резонансную частоту $f_0 = 2$ МГц при некотором напряжении U , проходит ток $I_0 = 60$ ма. Определить

ток в контуре, сдвиг фаз между напряжением и током, коэффициент передачи $k_C = \frac{U_C}{U}$ при его подключении к генератору такого же по величине напряжения U , но с частотой $f = 2,02$ Мгц.

У к а з а н и е. Вычислив обобщенную расстройку по (4.11в), воспользоваться (4.12б), (4.13б) и (4.15б).

4.15. Последовательный контур настроен на частоту $f_0 = 1$ Мгц. При какой добротности этот контур пропустит полосу частот:

1) $S_a = 2,5$ кгц и 2) $S_a = 10$ кгц?

4.16. Для контура и по данным задачи 4.10 найти частоты, соответствующие границе полосы пропускания.

4.17. Через последовательный контур ($C = 100$ пф, $r_L = 8$ ом), настроенный на резонанс при частоте $f_0 = 400$ кгц, надо пропустить полосу частот $S'_a = 10^4$ гц так, чтобы отношение тока на частоте

$f_0 + \frac{S'_a}{2}$ к току при резонансной частоте было равно $m = 0,8$. Определить добротность цепи и величину добавочного сопротивления, которое надо включить в контур для выполнения заданных условий.

Р е ш е н и е. Используя формулу (4.14б) согласно условию, имеем

$$\frac{I}{I_0} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(2Q \frac{\Delta\omega}{\omega_0}\right)^2}} = m,$$

откуда

$$\frac{\Delta\omega}{\omega_0} = \frac{\Delta f}{f_0} = \frac{\sqrt{1 - m^2}}{2mQ},$$

или, так как $\Delta f = \frac{S'_a}{2}$, то $\frac{S'_a}{2} = \frac{\sqrt{1 - m^2}}{2mQ}$.

Подставляя числовые значения, найдем $Q = 30$.

Активное сопротивление цепи определим из (4.4) и (4.5):

$$r = \frac{\rho}{Q} = \frac{1}{\omega_0 C Q} = \frac{1}{2\pi \cdot 400 \cdot 10^3 \cdot 100 \cdot 10^{-12} \cdot 30} = 13,3 \text{ ом.}$$

Таким образом, добавочное сопротивление

$$r_{\text{доб}} = r - r_L = 13,3 - 8 = 5,3 \text{ ом.}$$

4.18. Последовательный контур, содержащий постоянные r и L и регулируемую емкость C , подключен к источнику синусоидального напряжения неизменной частоты. В результате измерений установлено, что наибольший ток получается при $C_p = 250$ пф, а ток, в $\sqrt{2}$ раз меньший, — при емкостях $C_1 = 245$ пф и $C_2 = 255$ пф. Чему равна добротность этого контура?

4.19. В последовательном колебательном контуре емкость C шунтируется активным сопротивлением $r_{ш} \gg \frac{1}{\omega_0 C}$ (рис. 4.10, а). Как при этом изменится добротность эквивалентного последовательного контура? Дать числовой расчет, если известны $r = 20 \text{ ом}$, $L = 400 \text{ мкГн}$, $C = 625 \text{ нФ}$ и $r_{ш} = 80 \text{ ком}$.

Решение. Вычислим эквивалентные параметры $r_э$ и $C_э$ (рис. 4.10, б). Для этого определим комплексное сопротивление:

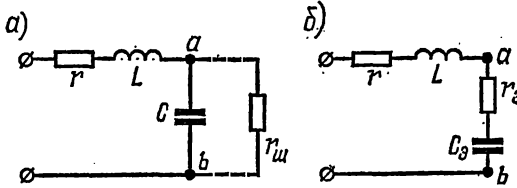


Рис. 4.10

$$Z_{ab} = \frac{r_{ш} \left(-j \frac{1}{\omega_0 C} \right)}{r_{ш} - j \frac{1}{\omega_0 C}} = \frac{r_{ш} \left(\frac{1}{\omega_0 C} \right)^2}{r_{ш}^2 + \left(\frac{1}{\omega_0 C} \right)^2} - j \frac{r_{ш}^2 \frac{1}{\omega_0 C}}{r_{ш}^2 + \left(\frac{1}{\omega_0 C} \right)^2}.$$

При $r_{ш} \gg \frac{1}{\omega_0 C}$ в знаменателях можно пренебречь вторыми слагаемыми по сравнению с первыми, тогда эта формула примет вид

$$Z_{ab} = \frac{\left(\frac{1}{\omega_0 C} \right)^2}{r_{ш}} - j \frac{1}{\omega_0 C} = r_э - j \frac{1}{\omega_0 C},$$

где

$$r_э = \frac{\left(\frac{1}{\omega_0 C} \right)^2}{r_{ш}}.$$

Отсюда видно, что шунтирование емкостного сопротивления большим активным сопротивлением не меняет емкость и вносит в цепь добавочное активное сопротивление $r_э$.

Прделаем числовой расчет:

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} = 2 \cdot 10^6 \text{ сек}^{-1}, \quad \rho = \frac{1}{\omega_0 C} = 800 \text{ ом},$$

т. е. выполняется условие $r_{ш} = 80 \cdot 10^3 \gg \frac{1}{\omega_0 C} = 800$.

В этом случае добавочное сопротивление

$$r_э = \frac{\left(\frac{1}{\omega_0 C} \right)^2}{r_{ш}} = \frac{800^2}{80 \cdot 10^3} = 8 \text{ ом}.$$

Эквивалентная добротность (см. рис. 4.10, б)

$$Q_s = \frac{\rho}{r + r_s} = \frac{800}{28} = 28,6.$$

До шунтирования добротность контура составляла

$$Q = \rho/r = 800/20 = 40.$$

4.20. По данным задачи 4.19 вычислить ток и напряжение на конденсаторе до и после шунтирования конденсатора при расстройке частоты генератора на 0,5%, если к контуру приложено напряжение $U = 1$ в.

4.21. Последовательный колебательный контур настроен в резонанс на частоту полезного сигнала радиостанции, работающей на длине волны $\lambda_c = 857$ м и наводящий в нем э.д.с. $E_c = 0,5$ мв. Добротность контура $Q = 50$, а его активное сопротивление $r = 16$ ом.

Чему равен ток, наводимый в контуре от другой радиостанции, работающей на длине волны $\lambda_{\Pi} = 800$ м и создающей э.д.с. помехи $E_{\Pi} = 1$ мв.

Вычислить отношение напряжения сигнала к напряжению помехи на емкости. Как изменится это отношение, если емкость зашунтировать сопротивлением $r_{\Pi} = 100$ ком.

У к а з а н и е. Длина волны связана с частотой соотношением $\lambda = \frac{3 \cdot 10^8}{f}$, где λ — в м, f — в гц.

Б. Резонанс токов

4.22. Цепь, состоящая из трех параллельных ветвей (рис. 4.11), параметры которых $r = 16$ ом, $L = 1,6$ мГн, $C = 25$ мкФ, подключена к генератору синусоидального напряжения, действующее значение которого $U = 10$ в. Найти резонансную частоту f_p и токи I , I_L , I_C при резонансе. Построить кривые токов $I = F_1(f)$, $I_L = F_2(f)$, $I_C = F_3(f)$ и угла сдвига фаз между U , величина которого поддерживается постоянной, и I в зависимости от частоты $[\varphi = F_4(f)]$. Частоту изменять в пределах от 0 до $4f_0$.

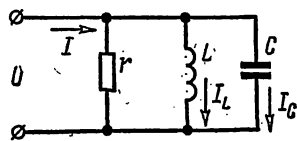


Рис. 4.11

4.23. Генератор, напряжение которого $U = 10$ в, а частота $\omega = 5000$ сек⁻¹, подключен к цепи, изображенной на рис. 4.11. Чему равна индуктивность L , при которой цепь настроена в резонанс, если $r = 16$ ом, $C = 25$ мкФ?

Полагая, что приложенное к цепи напряжение изменяется по закону $u = U\sqrt{2} \sin \omega t$, построить в зависимости от времени кривые i , i_L , i_C , p_L , p_C , p и кривые энергии ω_m и ω_e , запасаемой в магнитном и электрическом полях цепи.

4.24. Параметры цепи (см. рис. 4.2): $L = 4$ мГн, $C = 0,1$ мкФ, $r_1 = 160$ ом, $r_2 = 120$ ом. Выяснить, является ли параллельный кон-

тур высокодобротным. Вычислить частоту резонанса токов и сопротивление контура при резонансе. При каком значении сопротивления r_2 резонанс вообще невозможен? При каких значениях сопротивлений r_1 и r_2 резонанс в данной цепи будет иметь место при любой частоте?

Решение. Прежде всего вычисляем по формулам (4.4) и (4.5) характеристическое сопротивление и добротность контура:

$$\rho = \sqrt{\frac{L}{C}} = \sqrt{\frac{4 \cdot 10^{-3}}{0,1 \cdot 10^{-6}}} = 200 \text{ ом};$$

$$Q = \frac{\rho}{r_1 + r_2} = \frac{200}{280} = 0,715.$$

Как известно, контур высокодобротен, если $Q \gg 1$. В рассматриваемом случае контур низкодобротный. Поэтому резонансную частоту определяем по (4.19а), а сопротивление контура при резонансе по (4.21а):

$$\omega_p = \frac{1}{\sqrt{LC}} \sqrt{\frac{\rho^2 - r_1^2}{\rho^2 - r_2^2}} = \frac{1}{\sqrt{4 \cdot 10^{-3} \cdot 0,1 \cdot 10^{-6}}} \sqrt{\frac{200^2 - 160^2}{200^2 - 120^2}} =$$

$$= 5 \cdot 10^4 \cdot 0,75 = 3,75 \cdot 10^4 \text{ сек}^{-1};$$

$$Z_p = r_p = \frac{r_1 r_2 + \rho^2}{r_1 + r_2} = \frac{120 \cdot 160 + 200^2}{280} = 212 \text{ ом}.$$

Резонанс в цепи невозможен при $r_2 > 200 \text{ ом}$.

Резонанс будет иметь место при любой частоте, если $r_1 = r_2 = \rho = 200 \text{ ом}$.

4.25. Напряжение $U = 20 \text{ в}$, частота которого $f = 50 \text{ кГц}$, подключено к цепи, изображенной на рис. 4.2. Определить емкость C , при которой наступит резонанс, если $r_1 = 2 \text{ ом}$, $r_2 = 3,2 \text{ ом}$, $L = 9,56 \text{ мкГн}$. Найти токи при резонансе и построить векторную диаграмму.

Для каждого из найденных значений емкости C определить сдвиг фаз между приложенным к цепи напряжением и током, проходящим через конденсатор. В какой связи находятся найденные углы?

Решение. Сначала вычислим при резонансе сопротивление $x_L = \omega L = 2\pi \cdot 50 \cdot 10^3 \cdot 9,56 \cdot 10^{-6} = 3 \text{ ом}$ и, сопоставив его величину со значениями активных сопротивлений цепи, увидим, что заданный контур не является высокодобротным. Поэтому задачу решим не по упрощенным формулам, а следующим образом. Запишем комплексное сопротивление всей цепи и умножим числитель и знаменатель на комплекс, сопряженный знаменателю:

$$Z = \frac{(r_1 + jx_L)(r_2 - jx_C)}{r_1 + r_2 + j(x_L - x_C)} =$$

$$= \frac{[r_1 r_2 (r_1 + r_2) + (r_2 x_L - r_1 x_C)(x_L - x_C)] + j[(r_1 + r_2)(r_2 x_L - r_1 x_C) - (r_1 + r_2)^2 + (x_L - x_C)^2]}{(r_1 + r_2)^2 + (x_L - x_C)^2}.$$

$$\dots \rightarrow \frac{-(x_L - x_C)(r_1 r_2 + x_L x_C)}{(r_1 + r_2)^2 + (x_L - x_C)^2}.$$

При резонансе полное сопротивление цепи должно быть вещественной величиной, поэтому мнимую составляющую последнего выражения приравняем нулю:

$$(r_1 + r_2)(r_2 x_L - r_1 x_C) - (x_L - x_C)(r_1 r_2 + x_L x_C) = 0.$$

Подставив сюда числовые значения и после упрощения, получим квадратное уравнение

$$3x_C^2 - 25x_C + 30,72 = 0.$$

Решая его, найдем:

$$x_C' = 6,83 \text{ ом}; \quad C' = \frac{1}{\omega x_C'} = 0,466 \text{ мкф};$$

$$x_C'' = 1,5 \text{ ом}; \quad C'' = \frac{1}{\omega x_C''} = 2,12 \text{ мкф}.$$

Сопротивления правой ветви при найденных значениях емкостного сопротивления соответственно равны:

$$z_2' = \sqrt{r_2'^2 + x_C'^2} = \sqrt{3,2^2 + 6,83^2} = 7,5 \text{ ом};$$

$$z_2'' = \sqrt{r_2''^2 + x_C''^2} = \sqrt{3,2^2 + 1,5^2} = 3,53 \text{ ом}.$$

Вещественная часть Z при найденных x_C' и x_C'' равна

$$r_3' = 4,6 \text{ ом}, \quad r_3'' = 2,4 \text{ ом}.$$

Ток в левой ветви

$$I_1 = \frac{U}{\sqrt{r_1^2 + (\omega L)^2}} = \frac{20}{\sqrt{4^2 + 3^2}} = 4 \text{ а}.$$

Токи в правой ветви и в неразветвленной части цепи и сдвиг фаз между этим током и приложенным напряжением:

при $x_C' = 6,83 \text{ ом}$

$$I_2' = \frac{U}{z_2'} = \frac{20}{7,5} = 2,68 \text{ ма}; \quad I' = \frac{U}{r_3'} = \frac{20}{4,6} = 4,34 \text{ а};$$

$$\operatorname{tg} \varphi' = \frac{x_C'}{r_2} = \frac{6,83}{3,2} = 2,135; \quad \varphi' = 64^\circ 55';$$

при $x_C'' = 1,5 \text{ ом}$

$$I_2'' = \frac{U}{z_2''} = \frac{20}{3,53} = 5,67 \text{ ма}; \quad I'' = \frac{U}{r_3''} = \frac{20}{2,4} = 8,34 \text{ а};$$

$$\operatorname{tg} \varphi'' = \frac{x_C''}{r_2} = \frac{1,5}{3,2} = 0,468; \quad \varphi'' = 25^\circ 05'.$$

Обращаем внимание на то, что сумма углов $\varphi' + \varphi'' = 90^\circ$. Это имеет место всегда, когда в цепи (см. рис. 4.2) определяется резонансное значение L или C , а остальные величины являются заданными. Векторная диаграмма построена на рис. 4.12.

4.26. В цепи (см. рис. 4.2) даны $r_1 = 40 \text{ ом}$, $\omega L = 30 \text{ ом}$, $\frac{1}{\omega C} = 15 \text{ ом}$. Чему равно r_2 при резонансе токов и каково при этом полное сопротивление цепи?

4.27. К катушке индуктивности, параметры которой $r = 11,2 \text{ ом}$, $L = 4 \text{ мГн}$, подключен конденсатор емкостью $C = 2,5 \text{ мкФ}$ (см. рис. 4.3). При какой частоте наступит резонанс токов? Для найденной

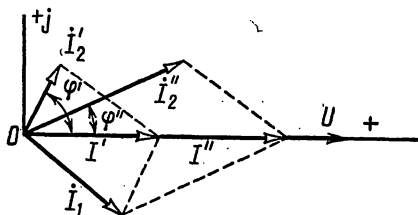


Рис. 4.12

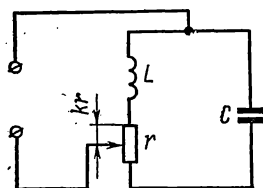


Рис. 4.13

частоты определить полное сопротивление цепи. Построить векторную диаграмму при резонансе, если $U = 10 \text{ в}$.

4.28. Для цепи (см. рис. 4.3) найти значение индуктивности L , при которой наступит резонанс на угловой частоте $\omega = 5000 \text{ сек}^{-1}$. Параметры цепи: $r = 14 \text{ ом}$, $C = 2 \text{ мкФ}$.

Для каждого из найденных значений L вычислить сдвиг фаз между приложенным напряжением и током, проходящим по катушке. В какой связи находятся найденные углы?

4.29. При перемещении ползунка сопротивление r распределяется между ветвями параллельного контура (рис. 4.13).

Определить пределы изменения резонансной частоты контура в зависимости от параметра k ($0 \leq k < 1$). Даны: $L = 2 \text{ мГн}$, $C = 500 \text{ нФ}$, $r = 1 \text{ ком}$.

4.30. Найти резонансную частоту и полное сопротивление параллельного контура (см. рис. 4.2), параметры которого равны: $r_1 = 9 \text{ ом}$, $r_2 = 1 \text{ ом}$, $L = 100 \text{ мкГн}$, $C = 100 \text{ нФ}$. Рассчитать токи, проходящие в каждой из ветвей при резонансе, и выделяемую в контуре мощность, если приложенное напряжение $U = 200 \text{ в}$.

Решение. В данном случае потери малы ($Q \gg 1$). Действительно,

$$Q = \frac{\sqrt{\frac{L}{C}}}{r_1 + r_2} = \frac{\sqrt{\frac{100 \cdot 10^{-6}}{100 \cdot 10^{-12}}}}{10} = 100.$$

Поэтому резонансную частоту можно определить по приближенной формуле (4.19в):

$$\omega_p = \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{100 \cdot 10^{-6} \cdot 100 \cdot 10^{-12}}} = 10^7 \text{ сек}^{-1},$$

$$f_p = 1,6 \text{ МГц}.$$

Вычислим сопротивление контура при резонансе по формуле (4.21в):

$$r_p = \frac{L}{(r_1 + r_2)C} = \frac{100 \cdot 10^{-6}}{10 \cdot 100 \cdot 10^{-12}} = 10^5 \text{ ом} = 100 \text{ ком}.$$

Токи в каждой из ветвей:

$$I_{1p} = \frac{U}{\sqrt{r_1^2 + (\omega_p L)^2}} = \frac{200}{\sqrt{9^2 + 1000^2}} \approx 0,2 \text{ а};$$

$$I_{2p} = \frac{U}{\sqrt{r_2^2 + \left(\frac{1}{\omega_p C}\right)^2}} = \frac{200}{\sqrt{1^2 + 1000^2}} \approx 0,2 \text{ а};$$

$$I_p = \frac{U}{r_p} = \frac{200}{10^5} = 2 \cdot 10^{-3} = 2 \text{ ма}.$$

Расходуемая в цепи мощность

$$P_p = I^2 r_p = (2 \cdot 10^{-3})^2 \cdot 10^5 = 0,4 \text{ вт}.$$

Та же мощность может быть подсчитана и так:

$$P_p = I_1^2 r_1 + I_2^2 r_2 = 0,2^2 \cdot 10 = 0,4 \text{ вт}.$$

4.31. Для контура и данных задачи 4.30 определить, чему будут равны эквивалентные активное, реактивное и полное сопротивления контура, если вследствие расстройки частота станет на 0,2% больше резонансной. Для этого случая вычислить все токи и мощность, выделяемую в контуре, полагая, что величина приложенного к цепи напряжения осталась прежней ($U = 200 \text{ в}$).

Решение. Произведем расчеты при $\omega = 1,002 \omega_p$. Найдем абсолютную и обобщенную расстройки и искомые сопротивления по формулам (4.9), (4.11в) и (4.27):

$$\Delta\omega = \omega - \omega_p = 0,002\omega_p = 0,002 \cdot 10^7 = 2 \cdot 10^4 \text{ сек}^{-1};$$

$$\xi = 2Q \frac{\Delta\omega}{\omega_p} = 2 \cdot 100 \frac{0,002\omega_p}{\omega_p} = 0,4;$$

$$r_s = \frac{r_p}{1 + \xi^2} = \frac{100}{1 + 0,4^2} = 86,2 \text{ ком};$$

$$x_s = -\xi r_s = -0,4 \cdot 86,2 = -34,4 \text{ ком},$$

x_3 имеет емкостный характер, так как ξ положительно [см. формулу (4.27)].

Полное сопротивление при расстройке:

$$z_3 = \frac{r_p}{\sqrt{1 + \xi^2}} = \frac{100}{\sqrt{1 + 0,4^2}} = 93,3 \text{ ком};$$

$$\operatorname{tg} \varphi_3 = \frac{x_3}{r_3} = -\frac{34,4}{86,2} = -0,4; \quad \varphi_3 = -21^\circ 50'.$$

Так как φ_3 отрицателен, ток опережает напряжение:

$$I_1 = \frac{U}{\sqrt{r_1^2 + (\omega L)^2}} = \frac{200}{\sqrt{9^2 + (1,002 \cdot 10^7 \cdot 100 \cdot 10^{-6})^2}} \approx 0,2 \text{ а};$$

$$I_2 = \frac{U}{\sqrt{r_2^2 + \left(\frac{1}{\omega C}\right)^2}} = \frac{200}{\sqrt{1^2 + \left(\frac{1}{1,002 \cdot 10^7 \cdot 100 \cdot 10^{-12}}\right)^2}} \approx 0,2 \text{ а};$$

$$I = \frac{U}{z_3} = \frac{200}{93,3 \cdot 10^3} \approx 2,15 \cdot 10^{-3} \text{ а} = 2,15 \text{ ма}.$$

Расходуемая мощность

$$P = UI \cos \varphi_3 = 200 \cdot 2,15 \cdot 10^{-3} \cos 21^\circ 50' = 0,4 \text{ вт},$$

или

$$P = I_1^2 r = 0,2^2 \cdot 10 = 0,4 \text{ вт}.$$

Заметим, что даже при небольшой расстройке (0,2%) в полном сопротивлении контура появилась значительная реактивная составляющая x_3 , вследствие которой и оказался сдвиг фаз φ_3 между током I и напряжением U . Ввиду небольшого изменения частоты реактивные сопротивления каждой из параллельных ветвей и токи в них почти не изменились и ненамного изменился ток в неразветвленной части цепи.

4.32. Для контура и по данным задачи 4.30 построить резонансную кривую неразветвленного тока в зависимости: а) от отношения расстройки частоты питающего генератора Δf к резонансной частоте f_0 (построение сделать для области частот, отличающихся от резонансной на $\pm 10\%$); б) от отношения f/f_0 и в) от обобщенной расстройки ξ .

Построить те же кривые, если рассмотренный контур имеет активное сопротивление: 1) $r_1 = 4,5 \text{ ом}$ и $r_2 = 0,5 \text{ ом}$; 2) $r_1 = 18 \text{ ом}$ и $r_2 = 2 \text{ ом}$.

4.33. Параметры параллельного контура (см. рис. 4.2) имеют следующие значения: $r_1 = 15 \text{ ом}$, $L = 338 \text{ мкгн}$, $r_2 = 1 \text{ ом}$, $C = 300 \text{ пф}$. Чему равны резонансная частота и сопротивление контура при резонансе? Вычислить эквивалентные активное, реактивное и полное сопротивления контура при частоте $f = 496 \text{ кгц}$. Определить все токи

и мощность, выделяемую в контуре, если к нему подведено напряжение $U = 150$ в.

4.34. Определить эквивалентные величины активной, реактивной составляющих и полного сопротивления параллельного контура (см. рис. 4.3) при частоте f по следующим данным: 1) $C = 300$ пф; $r = 16,3$ ом, $Q = 65$; $f = 505$ кГц; 2) $L = 93,5$ мкГн; $f_p = 1,5$ МГц; $Q = 40$; $f = 1490$ кГц; 3) $L = 600$ мкГн; $Q = 66$; $r_p = 100$ ком; $f = 400$ кГц.

4.35. Параллельный контур с малыми потерями (т. е. $Q \gg 1$) включен к генератору с э.д.с. $E = 200$ в и внутренним сопротивлением $R_i = 69$ ком (см. рис. 4.4). Определить параметры контура r и L , если известны резонансная частота $f_p = 500$ кГц, емкость $C = 300$ пф и что сопротивление контура при резонансе равно внутреннему сопротивлению генератора R_i . Вычислить токи генератора каждой из ветвей, мощность, доставляемую генератором и выделяемую в нем и в параллельном контуре при резонансе.

Решение. Находим индуктивность по формуле (4.19в):

$$L = \frac{1}{\omega_p^2 C} = 338 \text{ мкГн.}$$

Имея в виду, что, по условию, $r_p = R_i$ по формуле (4.21в), находим активное сопротивление:

$$r = \frac{L}{r_p C} = \frac{338 \cdot 10^{-6}}{69 \cdot 10^3 \cdot 300 \cdot 10^{-12}} = 16,3 \text{ ом.}$$

Ток генератора и напряжение на параллельном контуре при резонансе:

$$I_p = \frac{E}{R_i + r_p} = \frac{200}{2 \cdot 69 \cdot 10^3} = 1,45 \cdot 10^{-3} \text{ а} = 1,45 \text{ ма};$$

$$U_p = I_p r_p = 1,45 \cdot 10^{-3} \cdot 69 \cdot 10^3 = 100 \text{ в.}$$

В каждой из ветвей контура токи:

$$I_{ip} = \frac{U}{\sqrt{r^2 + (\omega_p L)^2}} = \frac{100}{\sqrt{16,3^2 + 1060^2}} = 94,2 \text{ ма};$$

$$I_{2p} = U \omega_p C = 100 \cdot 2\pi \cdot 500 \cdot 10^3 \cdot 300 \cdot 10^{-12} = 94,2 \cdot 10^{-3} \text{ а} = 94,2 \text{ ма.}$$

Мощность, доставляемая генератором ($P_{г.р}$), расходуемая в нем ($P_{вн}$) и выделяемая в контуре (P_p):

$$P_{г.р} = EI_p = 200 \cdot 1,45 \cdot 10^{-3} = 0,29 \text{ вт};$$

$$P_{вн} = I^2 R_i = (1,45 \cdot 10^{-3})^2 \cdot 69 \cdot 10^3 = 0,145 \text{ вт};$$

$$P_p = I_p^2 r_p = (1,45 \cdot 10^{-3})^2 \cdot 69 \cdot 10^3 = 0,145 \text{ вт.}$$

4.36. Для задачи 4.35 определить абсолютное значение и относительную величину полосы пропускания контура по напряжению.

Решение. Предварительно вычислим характеристическое сопротивление и добротность контура:

$$\rho = \sqrt{\frac{L}{C}} = 1060 \text{ ом}; \quad Q = \frac{\rho}{r} = 65.$$

Искомые значения абсолютной и относительной величины полосы пропускания контура по напряжению равны [см. формулы (4.33) и (4.34)]:

$$S_{aU} = \frac{f_p}{Q} \left(1 + \frac{r_p}{R_i} \right) = \frac{500 \cdot 10^3}{65} \left(1 + \frac{69}{69} \right) = 15400 \text{ гц};$$

$$S_{0U} = \frac{S_{aU}}{f_p} = \frac{15400}{500 \cdot 10^3} = 0,031.$$

4.37. По данным задачи 4.35 вычислить указанные там величины, если э.д.с. генератора напряжения останется той же ($E = 200 \text{ в}$), а вследствие расстройки его частота увеличится на 0,5%.

Указание. Разобрать решение задачи 4.31.

4.38. Для контура и по данным задачи 4.35 ($L = 338 \text{ мкгн}$, $C = 300 \text{ пф}$, $r = 16,3 \text{ ом}$) построить частотные характеристики для коэффициента передачи ($k_U = U : E$), для трех значений активного сопротивления, равных $0,5 r$; r ; $2r$. Построение дать в зависимости от отношения расстройки частоты питающего генератора к резонансной частоте $\Delta f/f_p$ (построение сделать для частот, отличающихся от резонансной на $\pm 10\%$); отношения частот f/f_p (в пределах $0,9 \div 1,1$); обобщенной расстройки ξ (в пределах ± 4).

Построить также резонансную кривую отношения неразветвленного тока к току при резонансе ($k_I = I/I_p$).

4.39. Найти резонансную частоту и неизвестный параметр параллельного контура (см. рис. 4.4), выделяемую в нем мощность при резонансе по данным:

- 1) $E = 150 \text{ в}$, $r_1 + r_2 = 22 \text{ ом}$, $C = 300 \text{ пф}$, $Q = 60$, $R_i = 35 \text{ ком}$;
- 2) $E = 100 \text{ в}$, $L = 10,3 \text{ мкгн}$, $C = 68 \text{ пф}$, $Q = 111$, $R_i = 30 \text{ ком}$.

Для каждого из случаев вычислить абсолютное значение полосы пропускания и относительную величину полосы пропускания по напряжению.

4.40. Определить резонансную частоту и эквивалентное сопротивление контура при резонансе нагруженного на сопротивление r (рис. 4.14), исходя из того, что $\omega_p L \gg r_1$.

Каковы резонансная частота и сопротивление цепи при резонансе, если $r \gg r_1$?

Решение. Обозначим:

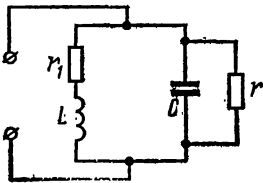


Рис. 4.14

$$Z_1 = r_1 + j\omega_p L, \quad Z_2 = \frac{-j \frac{1}{\omega_p C} r}{r - j \frac{1}{\omega_p C}}$$

Комплексное сопротивление цепи, состоящей из параллельно соединенных сопротивлений Z_1 и Z_2 ,

$$Z = \frac{Z_1 Z_2}{Z_1 + Z_2} = \frac{r \frac{1}{\omega_p C} (\omega_p L - jr_1)}{r_1 r + \frac{L}{C} - j \left(r \frac{1}{\omega_p C} - r \omega_p L + r_1 \frac{1}{\omega_p C} \right)}$$

Так как $\omega_p L \gg r_1$, то в скобках числителя последнего выражения можно пренебречь вторым слагаемым по сравнению с первым, тогда комплексное сопротивление

$$Z = \frac{r \frac{L}{C}}{r_1 r + \frac{L}{C} - j \left(r \frac{1}{\omega_p C} - r \omega_p L + r_1 \frac{1}{\omega_p C} \right)}$$

При резонансе комплексное сопротивление должно быть чисто вещественной величиной, поэтому мнимую компоненту знаменателя следует приравнять нулю. Решая это уравнение относительно резонансной частоты, найдем

$$\omega_p = \frac{1}{\sqrt{LC}} \sqrt{1 + \frac{r_1}{r}}$$

При резонансе комплексное сопротивление

$$Z_p = r_p = \frac{r \frac{L}{C}}{r_1 r + \frac{L}{C}} = \frac{\frac{L}{C}}{r_1 + \frac{L/C}{r}} = \frac{\rho^2}{r_1 + \frac{\rho^2}{r}},$$

где $\rho = \sqrt{\frac{L}{C}}$.

При $r \gg r_1$ резонансная частота

$$\omega_p \approx \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

Заметим, что при $r \rightarrow \infty$ выражение для сопротивления при резонансе обратится в $r_p = \frac{\rho^2}{r_1}$, т. е. перейдет в формулу для простого параллельного контура.

4.41. Параллельный контур, параметры которого $r_L = 16,3 \text{ ом}$, $L = 338 \text{ мкГн}$, $C = 300 \text{ нФ}$, подключен к генератору напряжения, имеющему э.д.с. $E = 200 \text{ в}$ и внутреннее сопротивление $R_i = 69 \text{ ком}$.

1. Вычислить эквивалентную добротность контура и полосу его пропускания. Найти все токи и расходуемую в контуре мощность при резонансе.

2. Чему будут равны эквивалентная добротность контура и полюса его пропускания, если его нагрузить на активное сопротивление $r = 138 \text{ ком}$ (рис. 4.15, а)? Определить для данного случая все токи, мощности, доставляемую генератором и расходуемую в контуре и в нагрузочном сопротивлении \hat{r} при резонансе.

Решение. 1. Для заданного контура вычисляем:

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \approx 3,14 \cdot 10^6 \text{ сек}^{-1}; \quad f_p \approx f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} = 500 \text{ кГц};$$

$$\rho = \sqrt{\frac{L}{C}} = 1060 \text{ ом}; \quad Q = \frac{\rho}{r_L} = \frac{1060}{16,3} = 65;$$

$$r_p = Q^2 r_p = 69 \text{ ком}.$$

Эквивалентную добротность заданного контура с учетом внутреннего сопротивления генератора напряжения и полюса его пропускания определяем по формулам (4.31) и (4.33):

$$Q_s = \frac{Q}{1 + \frac{r_p}{R_i}} = 32,5; \quad S'_{aU} = \frac{f_p}{Q_s} = 15400 \text{ гц}.$$

Так как данные контура, э.д.с. генератора и его внутреннего сопротивления те же, что и в задаче 4.35, то в решении были уже вычислены требуемые по условию I_p , I_{1p} , I_{2p} , $P_{г.р.}$, P_p .

2. Решение задачи в случае нагрузки контура на сопротивление r проще всего может быть получено, если осуществить замену относительно зажимов ab заданного генератора напряжения с E и R_i и подключенным к нему параллельно сопротивлением r (рис. 4.15, б),

эквивалентным генератором напряжения с э.д.с. E_s и внутренним сопротивлением r_s (рис. 4.15, в). Для определения E_s отключим параллельный контур (см. рис. 4.15, б и в) и вычислим напряжение холостого хода U_{ab} , равное E_s :

$$E_s = \frac{Er}{r + R_i} = \frac{200 \cdot 138}{69 + 138} = 133 \text{ в}.$$

Сопротивление короткого замыкания равно внутреннему сопротивлению эквивалентного генератора (рис. 4.15, г):

$$r_s = \frac{rR_i}{r + R_i} = \frac{69 \cdot 138}{69 + 138} = 46 \text{ ком}.$$

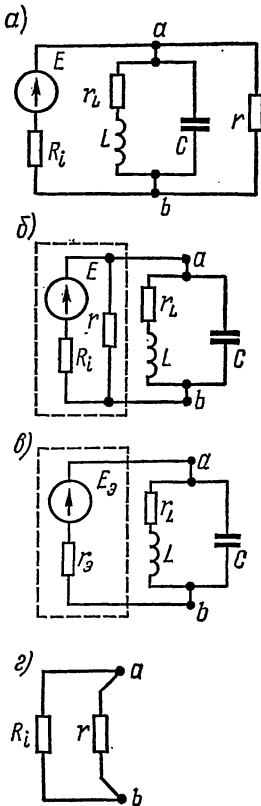


Рис. 4.15

Для схемы 4.15, в согласно формулам (4.31) и (4.33) эквивалентные добротность и полоса пропускания соответственно равны:

$$Q'_s = \frac{Q}{1 + \frac{r_p}{r_s}} = 26; \quad S'_{aU} = \frac{f_p}{Q'_s} = 19200 \text{ гц.}$$

Следует отметить, что подключение к контуру сопротивления r приводит к уменьшению эквивалентной добротности и увеличению полосы пропускания.

Рассчитаем ток в неразветвленной части заданной цепи, напряжение на контуре, токи в ветвях контура и нагрузочном сопротивлении r , мощности, доставляемую генератором и выделяемую в контуре и в сопротивлении r :

$$I'_p = \frac{E}{R_i + \frac{rr_p}{r + r_p}} = \frac{20}{69 + \frac{138 \cdot 69}{138 + 69}} = 1,74 \text{ ма};$$

$$U'_p = E - I'_p R_i = 200 - 1,74 \cdot 10^3 \cdot 69 \cdot 10^3 = 80 \text{ в};$$

$$I'_{1p} = \frac{U'_p}{\sqrt{r_L^2 + (\omega_p L)^2}} = \frac{80}{\sqrt{16,3^2 + 1060^2}} = 75,5 \text{ ма};$$

$$I'_{2p} = \frac{U'_p}{\frac{1}{\omega C}} = 75,5 \text{ ма}; \quad I_{н.п} = \frac{U'_p}{r} = 0,58 \text{ ма};$$

$$P'_{г.п} = EI'_p = 0,348 \text{ вт}; \quad P'_{вн} = I'^2_p R_i = 0,209 \text{ вт};$$

$$P'_{к.п} = I'^2_{1p} r_L = 0,093 \text{ вт}; \quad P'_{н.п} = I'^2_{н.п} r = 0,046 \text{ вт.}$$

Проверка показывает, что

$$P'_{г.п} = P'_{вн} + P'_{к.п} + P'_{н.п}.$$

4.42. Решить задачу 4.41, если принять, что нагрузочное сопротивление:

а) $r = R_i$ и б) $r = R_i/2$. Остальные данные те же, что и в задаче 4.41.

В. Резонансы напряжений и токов в сложных контурах

4.43. Параметры параллельного контура (рис. 4.16) имеют следующие значения: $r_1 = 1 \text{ ом}$, $L_1 = 25 \text{ мкгн}$, $C_1 = 1600 \text{ нф}$, $r_2 = 4 \text{ ом}$, $L_2 = 150 \text{ мкгн}$.

Найти частоты резонанса токов, напряжений и сопротивления цепи при этих частотах. Чему равна добротность контура и эквивалентная добротность при его подключении к генератору с внутренним сопротивлением $R_i = 20 \text{ ком}$? Какова при этом полоса пропускания

контура? Определить область частот, при которых модуль сопротивления параллельного контура больше 10 ком. Определить эквивалентные активные и реактивные сопротивления контура на границах этой области. При каком условии сопротивление контура при резонансе токов будет иметь максимально возможное значение?

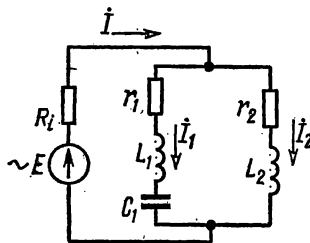


Рис. 4.16

Как нужно подключить контур к источнику синусоидальной э.д.с. с амплитудой $E_m = 100$ в и внутренним сопротивлением $R_i = 20$ ком, чтобы мощность, выделенная в контуре, была максимальна и чему она равна?

Решение. Частота резонанса токов [см. формулу (4.40)]:

$$\omega_1 = \frac{1}{\sqrt{(L_1 + L_2)C}} = 1,89 \cdot 10^6 \text{ сек}^{-1};$$

$$f_1 = \frac{1,89 \cdot 10^6}{2\pi} = 3 \cdot 10^5 \text{ гц} = 300 \text{ кгц}.$$

Сопротивление контура при этой частоте [см. формулу (4.22)]

$$r_p = \frac{x_2^2}{r_1 + r_2} = \frac{(\omega_1 L_2)^2}{r_1 + r_2} = 16 \text{ ком}.$$

Частота резонанса напряжений:

$$\omega_2 = \frac{1}{\sqrt{L_1 C_1}} = 5 \cdot 10^6 \text{ сек}^{-1};$$

$$f_2 = \frac{5 \cdot 10^6}{2\pi} = 795 \text{ кгц}.$$

При этой частоте сопротивление каждой из ветвей и всего параллельного контура соответственно равны:

$$Z_1 = r_1 + j\left(\omega_2 L_1 - \frac{1}{\omega_2 C_1}\right) = r_1 = 1 \text{ ом};$$

$$Z_2 = r_2 + j\omega_2 L_2 = (4 + j750) \text{ ом};$$

$$Z = \frac{Z_1 Z_2}{Z_1 + Z_2} = \frac{1(4 + j750)}{5 + j750} \approx 1 \text{ ом}.$$

Добротность контура [см. формулу (4.41)]

$$Q = \frac{\omega_1 (L_1 + L_2)}{r_1 + r_2} = \frac{1,89 \cdot 10^6 \cdot 175 \cdot 10^{-6}}{5} = 66,2$$

и эквивалентная добротность [см. формулу (4.31)]

$$Q_3 = \frac{Q}{1 + \frac{r_p}{R_i}} = \frac{66,2}{1 + \frac{16}{20}} = 36,8.$$

Полосу пропускания найдем по формуле (4.33):

$$S_{AV} = f_p / Q_3 = 300 / 36,8 = 8,15 \text{ кГц.}$$

Для определения области частот, при которых модуль сопротивления параллельного контура больше 10 ком, используем формулу (4.27) для модуля полного сопротивления:

$$z_3(\omega) = 10000 \leq \frac{r_p}{\sqrt{1 + \xi^2}} = \frac{16000}{\sqrt{1 + \xi^2}}.$$

Отсюда найдем обобщенную расстройку $\xi = \pm 1,25$ и по формуле (4.27) с учетом величины δ из (4.26) — соответствующую ей абсолютную расстройку:

$$\Delta\omega = \xi\delta = \frac{\xi(r_1 + r_2)}{2(L_1 + L_2)} = \pm \frac{1,25 \cdot 5}{2 \cdot 175 \cdot 10^{-8}} = 17900 \text{ сек}^{-1},$$

$$\Delta f = \frac{17900}{2\pi} = 2850 \text{ Гц.}$$

Искомая область частот, при которой $z_3(\omega) > 10 \text{ ком}$, определяется из неравенства $(f_1 - \Delta f) < f < (f_1 + \Delta f)$, или $297\,150 \text{ Гц} < f < 302\,850 \text{ Гц}$.

Эквивалентные активное и реактивное сопротивления при $\xi = 1,25$ найдем по (4.27):

$$r_3 = \frac{r_p}{1 + \xi^2} = 6,25 \text{ ком}, \quad x_3 = -\frac{r_p}{1 + \xi^2} \xi = -7,81 \text{ ком.}$$

Вычислим максимально возможное сопротивление параллельного контура при резонансе токов. Оно имеет место тогда, когда вся индуктивность будет сосредоточена в одной из ветвей, а емкость — в другой. В этом случае согласно формуле (4.21в)

$$r_p = \frac{L}{rC} = \frac{175 \cdot 10^{-8}}{5 \cdot 1600 \cdot 10^{-12}} = 21,8 \cdot 10^3 \text{ ом} = 21,8 \text{ ком.}$$

Наконец разрешим вопрос об условиях подключения контура к источнику э.д.с., с тем чтобы в нем была выделена максимальная мощность. Как известно, это будет в случае, если сопротивление контура при резонансе r_p будет равно сопротивлению источника R_i . Для этого используем свойство сложного параллельного контура изменять свое резонансное сопротивление при перераспределении его реактивных элементов по отдельным ветвям без изменения частоты резонанса токов. Обозначим величину индуктивности правой ветви

контура, удовлетворяющей требованиям задачи ($r'_p = R_i$) через L'_2 , тогда с учетом (4.42)

$$r'_p = \frac{(\omega_1 L'_2)^2}{r_1 + r_2} = R_i.$$

Отсюда

$$L'_2 = \frac{\sqrt{R_i (r_1 + r_2)}}{\omega_1} = \frac{\sqrt{20 \cdot 10^3 \cdot 5}}{1,89 \cdot 10^6} = 167 \cdot 10^{-6} \text{ гн.}$$

Максимальная мощность, выделяемая в контуре при указанном условии,

$$P_{\max} = \left(\frac{\frac{E_m}{\sqrt{2}}}{r'_p + R_i} \right)^2 r'_p = \frac{100^2}{2(40 \cdot 10^3)^2} 20 \cdot 10^3 = 0,0625 \text{ вт} = 6,25 \text{ мвт.}$$

4.44. Для контура, изображенного на рис. 4.5, найти резонансные частоты и вычислить его активное, реактивное и полное сопротивления при этих частотах. Даны: $r_1 = 9,4 \text{ ом}$, $L_1 = 256 \text{ мкгн}$, $C_1 = 270 \text{ пф}$, $r_2 = 12 \text{ ом}$, $L_2 = 660 \text{ мкгн}$, $C_2 = 430 \text{ пф}$.

4.45. Как надо перераспределить индуктивности L_1 и L_2 между отдельными ветвями контура задачи 4.43, чтобы при той же частоте резонанса токов полное сопротивление параллельного контура равнялось 12 ком ?

Решение. Пусть при требуемых условиях (ω_1 остается той же) полная индуктивность контура $L = L_1 + L_2 = 175 \text{ мкгн}$ распределится так, чтобы в левой ветви была индуктивность L' , а в правой — $L'' = L - L'$. При этом полное сопротивление контура [см. формулу (4.42)] при частоте резонанса токов

$$r_p = 12000 = \frac{(\omega_1 L'')^2}{r_1 + r_2}.$$

Отсюда

$$L'' = \frac{\sqrt{r_p (r_1 + r_2)}}{\omega_1} = 130 \text{ мкгн,}$$

$$L' = L - L'' = 175 - 130 = 45 \text{ мкгн.}$$

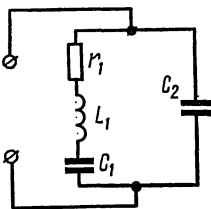


Рис. 4.17

4.46. Дан колебательный контур (рис. 4.17). Найти емкости C_1 и C_2 , если известно, что $r_1 = 5 \text{ ом}$, $L_1 = 150 \text{ мкгн}$, сопротивление контура при резонансе $r = 20 \text{ ком}$ и полная емкость контура $C = 500 \text{ пф}$ ($C = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}$). Как надо включить элементы этой схемы, чтобы сопротивление контура было максимально и чему оно при этом равно?

4.47. Контур имеет в каждой ветви индуктивность, емкость и активное сопротивление (см. рис. 4.5). Определить активную и реактивную составляющие эквивалентного сопротивления контура для частоты, которая на 0,5% отличается от частоты резонанса токов. Значения параметров контуров взять из задачи 4.44.

Указание. Решение задачи начать с разбора решения задачи 4.31.

4.48. Сложный параллельный контур (см. рис. 4.16), параметры которого взять из условия задачи 4.43, подключенный к генератору синусоидальной э.д.с. с амплитудой $E_m = 100$ в и внутренним сопротивлением $R_i = 20$ ком, зашунтирован активным сопротивлением $r_n = 30$ ком (на рис. 4.16 не показано).

Рассчитать действующее значение тока генератора, токов в ветвях контура и в нагрузочном сопротивлении r_n в режиме резонанса токов и при расстройке частоты генератора на 0,5%.

Какое сопротивление $r_{ш}$ надо взять вместо r_n , чтобы при резонансе токов в контуре была выделена максимальная мощность?

4.49. Дан контур (см. рис. 4.16) с полосой пропускания 5 кГц, добротностью 100 и индуктивностью $L = L_1 + L_2 = 400$ мкГн. Коэффициент включения $m_L = 0,6$. Э.д.с. генератора $E = 200$ в, его внутреннее сопротивление $R_i = 62,5$ ком. Найти L_1 , L_2 , C , r_1 и r_2 (полагать, что $r_1 = r_2$). Определить частоты резонансов токов и напряжений, все токи и мощности, потребляемые контуром при этих частотах.

4.50. Определить значение сопротивления r_2 , при котором в цепи рис. 4.18, а имеется резонанс напряжений на частоте $f = 500$ Гц. Вычислить все токи. Построить векторную диаграмму.

Даны: $r_1 = 2,7$ ом, $L = 286$ мкГн, $C = 318$ мкФ, $U = 30$ в.

Решение.

$$\omega L = 2\pi \cdot 500 \cdot 286 \cdot 10^{-6} = 0,9 \text{ ом};$$

$$\frac{1}{\omega C} = \frac{1}{2\pi \cdot 500 \cdot 318 \cdot 10^{-6}} = 1 \text{ ом};$$

$$Z_0 = 2,7 + j0,9 + \frac{-j1r_2}{r_2 - j1} = 2,7 + j0,9 + \frac{r_2^2 - jr_2^2}{r_2^2 + 1}.$$

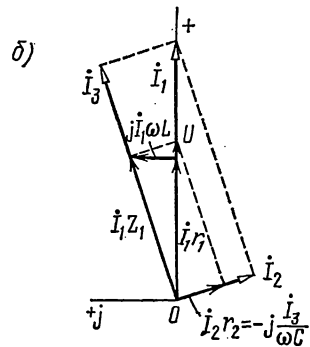
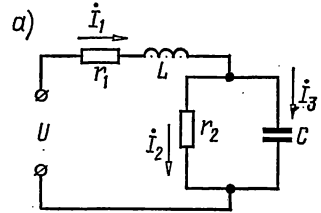


Рис. 4.18

При резонансе реактивная составляющая сопротивления Z_3 должна быть равна нулю, т. е. $0,9 - \frac{r_2^2}{r_2^2 + 1} = 0$, откуда $r_2 = 3 \text{ ом}$.

При найденном значении r_2 полное сопротивление цепи имеет только вещественную составляющую:

$$r_3 = 2,7 + \frac{r_2^2}{r_2^2 + 1} = 2,7 + \frac{3}{3^2 + 1} = 3 \text{ ом}.$$

Ток в неразветвленной части цепи

$$I_1 = \frac{U}{r_3} = \frac{30}{3} = 10 \text{ а}.$$

Токи в параллельных ветвях:

$$I_2 = I_1 \frac{-jx_C}{r_2 - jx_C} = 10 \frac{-j1}{3 - j1} = 1 - j3 = 3,16e^{-j71^\circ 35'} \text{ а};$$

$$I_3 = I_1 \frac{r_2}{r_2 - jx_C} = 10 \frac{3}{3 - j1} = 9 + j3 = 9,5e^{j18^\circ 25'} \text{ а}.$$

На рис. 4.18, б начерчена векторная диаграмма. На основе расчета отложены векторы токов I_2 , I_3 и I_1 , далее построены векторы

$$I_2 r_2 = -j \frac{I_3}{\omega C}, \quad I_1 r_1 \text{ и } jI_1 \omega L \text{ и } I_1 Z_1 = I_1 r_1 + jI_1 \omega L.$$

Наконец, построен вектор, являющийся суммой векторов напряжений на неразветвленном $I_1 Z_1$ и на параллельном $I_2 Z_2$ участках.

4.51. К зажимам цепи (см. рис. 4.18, а) подведено напряжение U частотой f . Параметры цепи r_1 , L и C известны. Определить, каким минимальным активным сопротивлением r_2 можно шунтировать конденсатор C , при котором еще может иметь место резонанс. Чему в этом случае равен ток в неразветвленной части цепи?

4.52. Определить, при каком значении и характере сопротивления Z_1 в цепи рис. 4.19 показание ваттметра наибольшее, если известно, что $r_2 = 8 \text{ ом}$, $x_{L_2} = 6 \text{ ом}$, $r_3 = 12 \text{ ом}$, $x_C = 5 \text{ ом}$. $U = 110 \text{ в}$. Чему равно показание ваттметра при этом режиме? Построить векторную диаграмму.

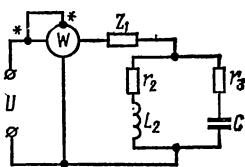


Рис. 4.19

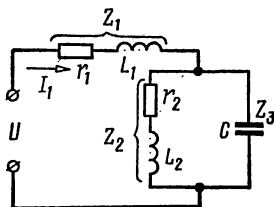


Рис. 4.20

У к а з а н и е. Требуемое условие будет выполнено при резонансе напряжений.

4.53. При каком реактивном сопротивлении Z_3 (рис. 4.20) приложенное напряжение U и ток I_1 совпадут по фазе? Даны: $Z_1 = (12 + j14) \text{ ом}$, $Z_2 = (10 + j15) \text{ ом}$. Для найденного значения Z_3 вычислить все токи и построить векторную диаграмму при $U = 120 \text{ в}$.

4.54. Для цепи рис. 4.21 найти емкостное сопротивление x_C , при котором имеется резонанс напряжений. Даны: $r_1 = 12 \text{ ом}$, $r_2 = 12 \text{ ом}$, $x_L = 16 \text{ ом}$, $r_3 = 20 \text{ ом}$. Вычислить для этого режима токи и построить векторную диаграмму, если $U = 220 \text{ в}$.

4.55. При каком индуктивном сопротивлении x_L в цепи рис. 4.21 наступит резонанс напряжений? Вычислить токи и построить векторную диаграмму, если $r_1 = 1,5 \text{ ом}$, $x_C = 1,25 \text{ ом}$, $r_2 = 3 \text{ ом}$, $r_3 = 5 \text{ ом}$, $U = 120 \text{ в}$.

4.56. В неразветвленной части цепи (см. рис. 4.3) при резонансе проходит ток $I = 8 \text{ а}$ при напряжении $U = 100 \text{ в}$. Сопротивление конденсатора $x_C = 25 \text{ ом}$. Определить активное и индуктивное сопротивления катушки.

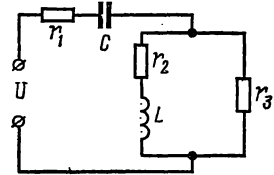


Рис. 4.21

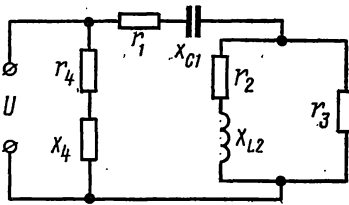


Рис. 4.22

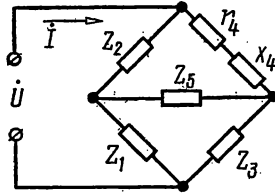


Рис. 4.23

4.57. В цепи рис. 4.21 имеет место резонанс. В этом режиме в ее неразветвленной части проходит ток $I = 2,5 \text{ а}$ при $U = 110 \text{ в}$. Известны: $r_1 = 24 \text{ ом}$, $x_L = 32 \text{ ом}$, $r_3 = 40 \text{ ом}$. Вычислить активное сопротивление r_2 и емкостное сопротивление x_C . Найти все токи.

4.58. К цепи подведено напряжение $U = 30 \text{ в}$ (рис. 4.22). Сопротивления элементов цепи: $r_1 = 1 \text{ ом}$, $x_1 = -3 \text{ ом}$, $r_2 = 4 \text{ ом}$, $x_2 = 8 \text{ ом}$, $r_3 = 4 \text{ ом}$, $r_4 = 3 \text{ ом}$. Найти величину и характер реактивного сопротивления x_4 , чтобы в цепи был резонанс токов при указанной частоте. В этом случае найти все токи и построить векторную диаграмму.

У к а з а н и е. Мнимую часть комплекса полной проводимости надо приравнять нулю.

4.59. Определить частоты резонансов напряжений и токов в цепи рис. 4.20, если известны $r_1 = 12 \text{ ом}$, $L_1 = 0,31 \text{ мГн}$, $r_2 = 3 \text{ ом}$, $L_2 = 0,29 \text{ мГн}$, $C = 11,6 \text{ мкФ}$.

4.60. Выяснить, при каком значении и характере реактивного сопротивления x_4 напряжение \dot{U} и ток \dot{I} , проходящий в неразветвленной части цепи (рис. 4.23), совпадут по фазе. Сопротивления элементов: $Z_1 = 12 \text{ ом}$, $Z_2 = (20 + j4) \text{ ом}$, $Z_3 = (6 + j6) \text{ ом}$, $r_4 = 8 \text{ ом}$, $Z_5 = -j6 \text{ ом}$.

У к а з а н и е. Треугольник сопротивлений Z_1, Z_3, Z_5 преобразовать в эквивалентную звезду и затем мнимую часть полного сопротивления цепи приравнять нулю.

4.61. Определить частоты резонансов напряжения и токов в цепи рис. 4.20, если известны: $r_1 = 12 \text{ ом}$, $L_1 = 0,31 \text{ мГн}$, $r_2 = 3 \text{ ом}$, $L_2 = 0,29 \text{ мГн}$, $C = 11,6 \text{ мкФ}$.

У к а з а н и е. Учесть, что в начале наступает резонанс токов, а затем резонанс напряжений.

Глава пятая

СВЯЗАННЫЕ ЦЕПИ

ОСНОВНЫЕ ПОЛОЖЕНИЯ И СООТНОШЕНИЯ

1. По схемным признакам различают *внутреннюю* (рис. 5.1, а) и *внешнюю* (рис. 5.1, б) связь двух контуров. Сопротивление Z_{12} элемента общего для обоих контуров называют *сопротивлением связи*.

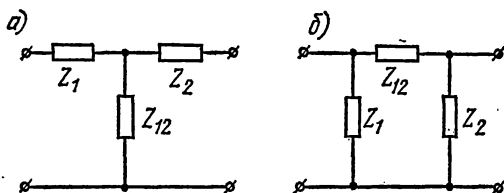


Рис. 5.1

Виды связи: 1) *магнитная* (рис. 5.2, а — индуктивная или трансформаторная; рис. 5.2, б — кондуктивная или автотрансформаторная); 2) *электрическая* (рис. 5.2, в — емкостная внутренняя; рис. 5.2, г — емкостная внешняя); 3) *комбинированная* или *смешанная* (рис. 5.2, д — индуктивно-емкостная; рис. 5.2, е — кондуктивно-емкостная); 4) *гальваническая* (рис. 5.2, ж).

Для количественной оценки взаимного влияния двух контуров служит коэффициент связи k . Он определяется как среднее геометрическое значений степеней связи k_1 и k_2 , определяемых для каждого контура по отношению к другому

$$k = \sqrt{k_1 k_2}. \quad (5.1)$$

Для чисто магнитной (или чисто электрической) связи степень связи k_1 первого контура со вторым представляет собой отношение напряжения на индуктивности (емкости) второго контура в режиме его холостого хода к полному напряжению на индуктивности (емкости) первого контура. Аналогично степень связи k_2 второго контура с первым есть отношение напряжения на индуктивности (емкости) первого контура в режиме его холостого хода к полному напряжению на индуктивности (емкости) второго контура.

Для схемы рис. 5.2, а

$$k_1 = \frac{M}{L_1}, \quad k_2 = \frac{M}{L_2}, \quad k = \frac{M}{\sqrt{L_1 L_2}}; \quad (5.2a)$$

для схемы рис. 5.2, б

$$k_1 = \frac{L_{12}}{L_1 + L_{12}}, \quad k_2 = \frac{L_{12}}{L_2 + L_{12}}, \quad k = \frac{L_{12}}{\sqrt{(L_1 + L_{12})(L_2 + L_{12})}}; \quad (5.2б)$$

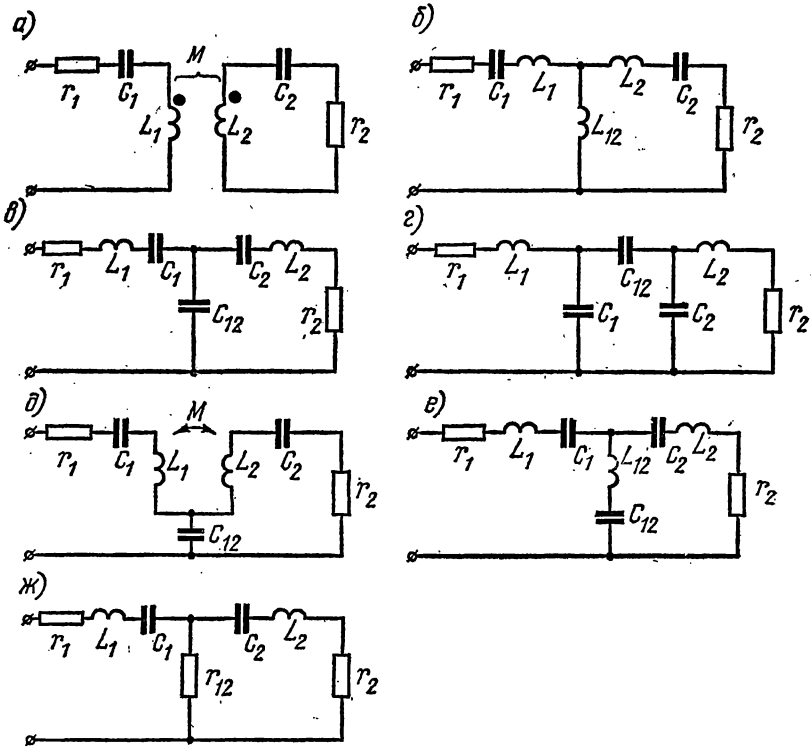


Рис. 5.2

для схемы рис. 5.2, в

$$k_1 = \frac{C_1}{C_1 + C_{12}}, \quad k_2 = \frac{C_2}{C_2 + C_{12}}, \quad k = \frac{\sqrt{C_{11}C_{22}}}{C_{12}}, \quad (5.2в)$$

где

$$C_{11} = \frac{C_1 C_{12}}{C_1 + C_{12}}; \quad C_{22} = \frac{C_2 C_{12}}{C_2 + C_{12}};$$

для схемы рис. 5.2, г

$$k_1 = \frac{C_{12}}{C_{12} + C_1}; \quad k_2 = \frac{C_{12}}{C_{12} + C_2}; \quad k = \frac{C_{12}}{\sqrt{(C_{12} + C_1)(C_{12} + C_2)}}. \quad (5.2г)$$

2. Индуктивно связанные цепи. Приступая к расчету электрической цепи с взаимной индуктивностью, следует на схеме отметить стрелками произвольно выбираемые положительные направления токов в ветвях (и контурных токов в случае применения метода контурных токов). Кроме того, одинаковыми условными значками (буквами, звездочками, точками и т. п.) обозначить одноименные зажимы каждой пары индуктивно связанных элементов цепи (катушек).

Одноименными считаются такие зажимы, при одинаковых положительных направлениях токов относительно которых магнитные потоки самоиндукции и взаимной индукции складываются.

Заметим, что при наличии трех (или более) индуктивно связанных катушек зажимы второй и третьей катушек, являющиеся одноименными по отношению к какому-либо зажиму первой катушки, могут в общем случае оказаться разноименными относительно друг друга (см. задачу 5.41). В таком случае каждая пара одноименных зажимов отмечается особыми значками.

При составлении уравнений второго закона Кирхгофа с помощью комплексных чисел ($\sum \dot{E} = \sum Z \dot{I}$) величины э. д. с. взаимной индукции $\dot{E}_{ks} = -j\omega M_{ks} \dot{I}_s$ обычно из части уравнения, содержащей э. д. с., переносятся с переменной знака в другую часть, содержащую падения напряжения, в виде членов типа $\pm \dot{U}_{ks} = \pm j\omega M_{ks} \dot{I}_s = \pm Z_{ks} \dot{I}_s$.

Верхние (положительные) знаки принимаются тогда, когда при обходе контура, содержащего ветвь k , направление обхода этой ветви и направление положительного тока ветви s относительно одноименных зажимов одинаковы; в противном случае принимаются отрицательные знаки.

Здесь \dot{E}_{ks} — комплексная э. д. с. взаимной индукции в k -й катушке, определяемая током в s -й катушке;
 M_{ks} — взаимная индуктивность этих катушек;
 ω — угловая частота;
 $Z_{ks} = j\omega M_{ks}$ — сопротивление взаимной индукции.

Указанное правило разметки зажимов и выбора знаков справедливо, если M считать всегда положительным.

3. При последовательном соединении двух индуктивно связанных катушек эквивалентное комплексное сопротивление и эквивалентная индуктивность определяются по формулам

$$\left. \begin{aligned} Z &= Z_1 + Z_2 \pm 2Z_{12}; \\ L &= L_1 + L_2 \pm 2M_{12}; \end{aligned} \right\} \quad (5.3)$$

где $Z_{12} = j\omega M_{12}$.

Знак плюс соответствует согласному включению катушек, а знак минус — встречному.

Примеры приведены в задачах 5.4, 5.5 и 5.11.

При параллельном соединении двух индуктивно связанных катушек эквивалентное комплексное сопротивление

$$Z = \frac{Z_1 Z_2 - Z_{12}^2}{Z_1 + Z_2 \mp 2Z_{12}}, \quad (5.4a)$$

а эквивалентная индуктивность (при условии, что активные сопротивления катушек равны нулю)

$$L = \frac{L_1 L_2 - M^2}{L_1 + L_2 \mp 2M}. \quad (5.4б)$$

Знак минус в знаменателе уравнений (5.4a) и (5.4б) ставится при согласном включении, а знак плюс — при встречном.

Примеры даны в задачах 5.13 и 5.14.

4. Уравнения второго закона Кирхгофа для двух индуктивно связанных контуров (рис. 5.3, а) имеют вид:

$$\left. \begin{aligned} Z_{11} \dot{I}_1 - Z_{12} \dot{I}_2 &= \dot{U}_1; \\ Z_{22} \dot{I}_2 - Z_{21} \dot{I}_1 &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (5.5)$$

где

$$\begin{aligned} Z_{11} &= Z_1 + j\omega L_1 = Z_1 + jx_1 = r_{11} + jx'_{11} + jx_1 = r_{11} + jx_{11}; \\ Z_{22} &= Z_2 + j\omega L_2 + Z_H = Z_2 + jx_2 + Z_H = r'_{22} + jx'_{22} + jx_2 + r_H + \\ &\quad + jx_H = r_{22} + jx_{22}; \\ Z_{12} &= Z_{21} = j\omega M = jx_{12}. \end{aligned}$$

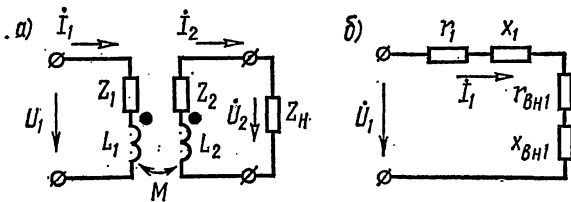


Рис. 5.3

Схема рис. 5.3, а может быть заменена эквивалентной (рис. 5.3, б), содержащей вносимые в первый контур активное и реактивное сопротивления, соответственно равные

$$r_{BH1} = \frac{\omega^2 M^2}{r_{22}^2 + x_{22}^2} r_{22} = \frac{\omega^2 M^2}{z_{22}^2} r_{22}; \quad (5.6)$$

$$x_{BH1} = -\frac{\omega^2 M^2}{r_{22}^2 + x_{22}^2} x_{22} = -\frac{\omega^2 M^2}{z_{22}^2} x_{22}. \quad (5.7)$$

$$I_1 = \frac{U_1}{(r_{11} + r_{вн1}) + j(x_{11} + x_{вн1})}. \quad (5.8)$$

5. Развязка индуктивных связей. Цепи схем рис. 5.4, а и б соответственно эквивалентны цепям рис. 5.4, в, г и д, не содержащим индуктивные связи. Поэтому, например, при анализе схемы рис. 5.3, а достаточно исследовать схему рис. 5.4, в.

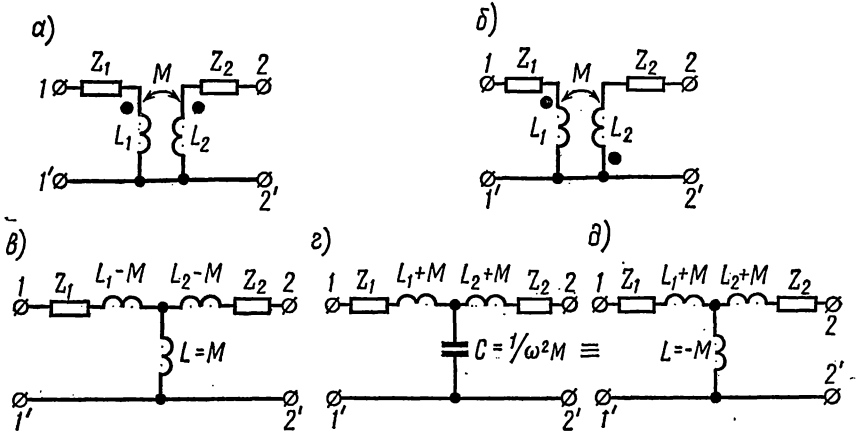


Рис. 5.4

Примеры приведены в задачах 5.21, 5.22, 5.36 и 5.37.

6. Индуктивно связанные резонансные контуры (рис. 5.5). Собственное комплексное сопротивление первого контура $Z_1 = r_1 + jx_1$, где $x_1 = \omega L_1 - \frac{1}{\omega C_1}$ — реактивное сопротивление первого контура. Собственное комплексное сопротивление второго контура $Z_2 = r_2 + jx_2$ с реактивным сопротивлением $x_2 = \omega L_2 - \frac{1}{\omega C_2}$. Комплексное сопротивление связи $Z_{12} = j\omega M = jx_{12}$.

Действующие значения токов в связанных контурах:

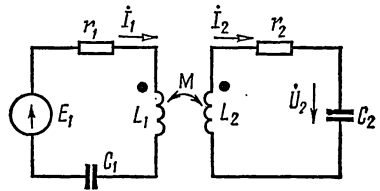


Рис. 5.5

$$I_1 = \frac{E_1 \frac{z_2}{z_1}}{\sqrt{(r_1 + r_{вн1})^2 + (x_1 + x_{вн1})^2}} = \frac{E_1 \frac{z_2}{z_1}}{\sqrt{(r_2 + r_{вн2})^2 + (x_2 + x_{вн2})^2}}; \quad (5.9)$$

$$I_2 = \frac{E_1 \frac{x_{12}}{z_2}}{\sqrt{(r_1 + r_{вн1})^2 + (x_1 + x_{вн1})^2}} = \frac{E_1 \frac{x_{12}}{z_1}}{\sqrt{(r_2 + r_{вн2})^2 + (x_2 + x_{вн2})^2}}, \quad (5.10)$$

где $r_{вн1} = \frac{x_{12}^2}{z_2^2} r_{12}$ — вносимое активное сопротивление в первый контур;

$x_{вн1} = -\frac{x_{12}^2}{z_2^2} x_2$ — вносимое реактивное сопротивление в первый контур;

$r_{вн2} = \frac{x_{12}^2}{z_1^2} r_1$ — вносимое активное сопротивление во второй контур;

$x_{вн2} = -\frac{x_{12}^2}{z_1^2} x_1$ — вносимое реактивное сопротивление во второй контур.

7. Резонансы в связанных контурах (см. рис. 5.5):

а) Первый частный резонанс достигается при изменении параметров первого контура при неизменных параметрах второго контура и постоянном коэффициенте связи k . Условие этого резонанса

$$x_{1э} = x_1 + x_{вн1} = x_1 - \frac{x_{12}^2}{z_2^2} x_2 = 0^*, \quad (5.11)$$

при этом вторичный ток достигает максимального значения:

$$I_{2I \max} = \frac{E_1 x_{12}}{z_2 (r_1 + r_{вн1})}. \quad (5.12)$$

б) Второй частный резонанс получается подбором параметров второго контура при неизменных параметрах первого контура и постоянном k . Этот резонанс имеет место при

$$x_{2э} = x_2 + x_{вн2} = x_2 - \frac{x_{12}^2}{z_1^2} x_1 = 0. \quad (5.13)$$

В этом случае ток во вторичном контуре достигает максимума, равного

$$I_{2II \max} = \frac{E_1 x_{12}}{z_1 (r_2 + r_{вн2})}. \quad (5.14)$$

в) Сложный резонанс достигается одновременным изменением параметров одного из контуров и подбором оптимального коэффициента связи k .

При настройке изменением элементов первого контура [должно соблюдаться условие (5.11)] оптимальное значение сопротивления связи

$$x_{12 \text{ опт}}^1 = z_2 \sqrt{\frac{r_1}{r_2}}. \quad (5.15)$$

* Выводы формул (5.11) ÷ (5.34) можно найти в [4], [16], [30].

При настройке вариаций параметров второго контура [должно соблюдаться условие (5.13)] оптимальному коэффициенту связи соответствует сопротивление связи:

$$x_{12 \text{ опт}}^{\text{II}} = z_1 \sqrt{\frac{r_2}{r_1}}. \quad (5.16)$$

В этих случаях ток во вторичном контуре достигает максимально возможного значения («максимум-максимум»), равного

$$I_2 \text{ max max} = \frac{E_1}{2\sqrt{r_1 r_2}}. \quad (5.17)$$

г) Полный резонанс имеет место при резонансной настройке по-рознь каждого из контуров:

$$x_1 = 0, \quad x_2 = 0 \quad (5.18)$$

и при подборе оптимальной связи между контурами $k_{\text{опт}} = \frac{1}{\sqrt{Q_1 Q_2}}$, которой соответствует сопротивление связи:

$$x_{12 \text{ опт}} = \sqrt{r_1 r_2}. \quad (5.19)$$

При полном резонансе вторичный ток имеет такое же значение, как и при сложном резонансе [см. формулу (5.17)].

Примеры даны в задачах 5.42, 5.43, 5.44.

8. Резонансные характеристики связанных контуров. Входное сопротивление системы связанных контуров (рис. 5.5) определяется формулой

$$Z(j\omega) = r_1 + \frac{x_{12}^2}{z_2^2} r_2 + j \left(x_1 - \frac{x_{12}^2}{z_2^2} x_2 \right). \quad (5.20)$$

Если собственные резонансные частоты контуров ω_{01} и ω_{02} между собой близки и при их небольших расстройках относительно частоты источника ($\Delta\omega_1 = \omega - \omega_{01} \ll \omega_{01}$ и $\Delta\omega_2 = \omega - \omega_{02} \ll \omega_{02}$), входное сопротивление системы связанных контуров

$$Z(j\omega) = r_{1\text{э}} + jx_{1\text{э}} \approx r_1 \left(1 + \frac{A^2}{1 + \xi_2^2} \right) + j\xi_1 r_1 \left(1 - \frac{A^2}{1 + \xi_2^2} \cdot \frac{\xi_2^2}{\xi_1} \right), \quad (5.21)$$

где $\xi_1 = \frac{x_1}{r_1} \approx 2Q_1 \frac{\Delta\omega_1}{\omega_{01}}$ — обобщенная расстройка первого контура;
 $\xi_2 = \frac{x_2}{r_2} \approx 2Q_2 \frac{\Delta\omega_2}{\omega_{02}}$ — обобщенная расстройка второго контура;
 $A = \frac{x_{12}}{\sqrt{r_1 r_2}}$ — фактор связи.

Действующее значение вторичного тока и модуль коэффициента передачи (амплитудно-частотная характеристика) при одинаковых

резонансных частотах контуров определяются выражениями:

$$I_2 = \frac{E_1 A}{\sqrt{r_1 r_2} \sqrt{(A^2 + 1 - \xi_1 \xi_2)^2 + (\xi_1 + \xi_2)^2}}; \quad (5.22)$$

$$k_C = \frac{U_2}{E_1} = \frac{A}{\omega C_2 \sqrt{r_1 r_2} \sqrt{(A^2 + 1 - \xi_1 \xi_2)^2 + (\xi_1 + \xi_2)^2}}. \quad (5.23)$$

При настройке порознь каждого из контуров на одну и ту же частоту, т. е. когда $\frac{1}{\sqrt{L_1 C_1}} = \omega_{01} = \omega_0 = \omega_{02} = \frac{1}{\sqrt{L_2 C_2}}$, различают следующие случаи связи: а) *сильную* ($k > k_{кр}$), б) *критическую* ($k = k_{кр}$), в) *слабую* ($k < k_{кр}$). Критической связи соответствует значение

$$k = k_{кр} = \sqrt{\frac{d_1^2 + d_2^2}{2}}, \quad (5.24)$$

где $d_1 = \frac{1}{Q_1}$ и $d_2 = \frac{1}{Q_2}$ — затухания первого и второго контуров.

При слабой связи резонансная кривая тока I_2 имеет один максимум. При сильной связи резонансная кривая тока I_2 имеет два максимума, наступающих при *частотах связи* ω_I и ω_{II} ($\omega_I < \omega_0 < \omega_{II}$):

$$\omega_I = \frac{\omega_0}{\sqrt{1 + \sqrt{k^2 - k_{кр}^2}}}; \quad \omega_{II} = \frac{\omega_0}{\sqrt{1 - \sqrt{k^2 - k_{кр}^2}}}. \quad (5.25)$$

При небольших расстройках ($\Delta\omega = \omega - \omega_0 \ll \omega_0$) системы одинаковых связанных контуров $\xi_1 = \xi_2 = \xi$ действующее значение вторичного тока и модуль коэффициента передачи:

$$I_2 = \frac{E_1 A}{r \sqrt{(A^2 + 1 - \xi^2)^2 + 4\xi^2}}, \quad (5.22a)$$

$$k_C = \frac{U_2}{E_1} = \frac{QA}{\sqrt{(A^2 + 1 - \xi^2)^2 + 4\xi^2}}. \quad (5.23a)$$

Полоса пропускания двух идентичных ($\omega_{01} = \omega_{02} = \omega_0$, $d_1 = d_2 = d$) индуктивно связанных контуров на уровне $1/\sqrt{2} \approx 0,707$ зависит не только от затухания контуров d , но и от коэффициента связи k .

При слабой связи и при идентичных контурах относительная полоса пропускания

$$S_0 = d \sqrt{\left(\frac{k}{d}\right)^2 - 1 + \sqrt{2 \left[1 + \left(\frac{k}{d}\right)^4\right]}}. \quad (5.26)$$

При критической связи и при идентичных контурах относительная полоса пропускания

$$S_0 = \sqrt{2} d. \quad (5.27)$$

При сильной связи и при идентичных контурах относительная полоса пропускания

$$S_0 = d \sqrt{\left(\frac{k}{d}\right)^2 - 1 + 2\left(\frac{k}{d}\right)}. \quad (5.28)$$

Максимальная полоса пропускания имеет место при связи, обеспечивающей в точке нулевой расстройки ток, равный $0,707 I_{2 \max \max}$. При этом $k = 2,41 d$,

$$S_{0 \max} = 3,1 d. \quad (5.29)$$

9. Энергетические соотношения в индуктивно связанных контурах. Мощности, выделяемые в каждом из двух связанных контуров:

$$P_1 = \frac{I_{1m}^2 r_1}{2} = I_1^2 r_1; \quad P_2 = \frac{I_{2m}^2 r_2}{2} = I_2^2 r_2. \quad (5.30)$$

К. п. д. системы двух связанных контуров находится как отношение мощности второго контура P_2 ко всей затраченной мощности $P = P_1 + P_2$, т. е.

$$\eta = \frac{P_2}{P_1 + P_2}. \quad (5.31)$$

К. п. д. вычисляется по формуле

$$\eta = \frac{r_{вн1}}{r_1 + r_{вн1}}. \quad (5.32)$$

При настроенных первичном и вторичном контурах ($x_1 = 0, x_2 = 0$), но при любом коэффициенте связи k к. п. д.

$$\eta = \frac{k^2}{d_1 d_2 + k^2}. \quad (5.33)$$

При полном резонансе мощность во вторичном контуре достигает максимального значения, равного

$$P_{2 \max \max} = P_{1 \max \max} = \frac{E_{1m}^2}{8r_1} = \frac{E_1^2}{4r_1}. \quad (5.34)$$

При этом к.п.д. составляет 50%.

Примеры даны в задачах 5.48, 5.50, 5.52, 5.53, 5.54, 5.56.

УПРАЖНЕНИЯ И ЗАДАЧИ

А. Расчет связанных цепей

5.1. Имеется два индуктивно связанных контура (см. рис. 5.2, а), собственные частоты которых соответственно равны 8 и 10 МГц, а емкости 50 и 80 нФ. При какой взаимной индуктивности можно получить коэффициент связи 0,05?

5.2. Определить емкость конденсатора связи в схеме с внутренней емкостной связью (см. рис. 5.2, в), если $C_1 = C_2 = 100 \text{ нф}$, а коэффициент связи равен 0,1.

5.3. В схеме с автотрансформаторной связью (см. рис. 5.2, б) $L_1 = 20 \text{ мкГн}$, $C_1 = 50 \text{ нф}$, $L_2 = 6 \text{ мкГн}$, собственная резонансная частота первого контура 4 МГц .

Найти коэффициент связи между контурами.

5.4. Определить эквивалентное комплексное сопротивление цепи (рис. 5.6, а), ток и напряжения между точками a и b , c и d , если известны $U = 130 \text{ в}$, $r_1 = 2 \text{ ом}$, $r_2 = 3 \text{ ом}$, $\omega L_1 = 3 \text{ ом}$, $\omega L_2 = 7 \text{ ом}$, $\omega M = 1 \text{ ом}$.

Решение. Проследив по рис. 5.6, а прохождение тока по виткам обеих катушек, видим, что в каждой из них потоки самоиндукции и взаимной индукции действуют попутно. Таким образом, катушки включены согласно. Заданная цепь может быть представлена схемой, показанной на рис. 5.6, б. Составим для нее уравнение второго закона Кирхгофа:

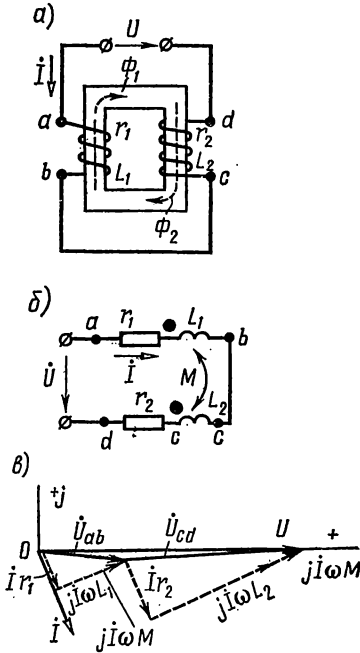


Рис. 5.6

где

$$Z_1 = r_1 + j\omega L_1 = (2 + j3) \text{ ом};$$

$$Z_2 = r_2 + j\omega L_2 = (3 + j7) \text{ ом};$$

$$Z_{12} = Z_{21} = j\omega M = j1 \text{ ом}.$$

Эквивалентное комплексное сопротивление цепи

$$Z = Z_1 + Z_2 + 2Z_{12} = 5 + j12 = 13e^{j67^\circ 20'} \text{ ом},$$

Искомый комплексный ток

$$i = \frac{\dot{U}}{Z} = \frac{130}{13e^{j67^\circ 20'}} = 10e^{-j67^\circ 20'} \text{ а}.$$

Комплексные напряжения между точками a и b , c и d равны:

$$\dot{U}_{ab} = i(Z_1 + Z_2) = 44,7e^{-j3^\circ 50'} \text{ в};$$

$$\dot{U}_{cd} = i(Z_2 + Z_{21}) = 85,5e^{j2^\circ 5'} \text{ в}.$$

На рис. 5.6, в представлена векторная диаграмма. По вещественной оси отложен вектор напряжения, от него в сторону отставания на $67^{\circ}20'$ направлен вектор тока, затем отложены векторы падения напряжения в каждой из катушек.

5.5. Для цепи, изображенной на рис. 5.7, а, найти ток и напряжение между точками а и b, с и d. Даны: $r_1 = 2 \text{ ом}$, $r_2 = 4 \text{ ом}$, $\omega L_1 = 6 \text{ ом}$, $\omega L_2 = 4 \text{ ом}$, $\omega M = 1 \text{ ом}$. К цепи приложено напряжение

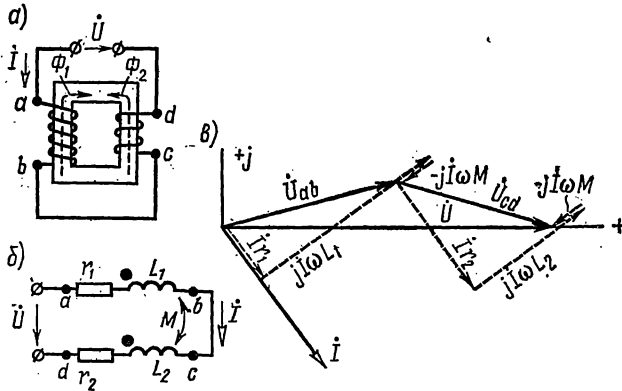


Рис. 5.7

$U = 100 \text{ в}$. Построить векторную диаграмму.

Решение. Соединение катушек встречное. Для эквивалентной схемы (рис. 5.7; б) запишем уравнение второго закона Кирхгофа

$$\dot{U} = Z_1 i - Z_{12} i + Z_2 i - Z_{21} i.$$

Искомый ток и напряжения:

$$i = \frac{\dot{U}}{Z_1 + Z_2 - 2Z_{12}} = 10 e^{-j53^{\circ}10'} \text{ а};$$

$$\dot{U}_{ab} = (Z_1 - Z_{12}) i = 53,9 e^{j15^{\circ}5'} \text{ в};$$

$$\dot{U}_{cd} = (Z_2 - Z_{12}) i = 50 e^{-j16^{\circ}20'} \text{ в}.$$

На рис. 5.7, в начерчена векторная диаграмма.

5.6. К цепи (см. рис. 5.7, а) приложено напряжение $U = 100 \text{ в}$.

Найти ток и напряжения \dot{U}_{ab} и \dot{U}_{cd} , а также построить векторную диаграмму. Даны $r_1 = 30 \text{ ом}$, $r_2 = 50 \text{ ом}$, $\omega L_1 = 120 \text{ ом}$, $\omega L_2 = 30 \text{ ом}$. Коэффициент связи $k = 0,75$.

З а м е ч а н и е. По результатам решения обратить внимание на то, что напряжение на одной из катушек отстает по фазе от тока.

5.7. Вычислить ток и напряжение между точками a и b , если $r_1 = 5 \text{ ом}$, $r_2 = 3 \text{ ом}$, $\omega L_1 = 4 \text{ ом}$, $\omega L_2 = 2 \text{ ом}$, $\omega M = 2 \text{ ом}$, $\frac{1}{\omega C} = 4 \text{ ом}$, а приложенное к цепи напряжение $U = 100 \text{ в}$ (рис. 5.8). Построить векторную диаграмму.

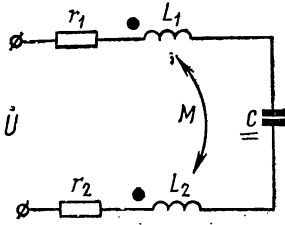


Рис. 5.8

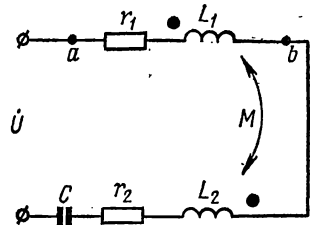


Рис. 5.9

5.8. Чему равно напряжение на конденсаторе емкостью $C = 43 \text{ мкф}$, включенном между двумя индуктивно связанными катушками, параметры которых $r_1 = 10,5 \text{ ом}$, $L_1 = 22 \text{ мГн}$, $r_2 = 9,2 \text{ ом}$, $L_2 = 18 \text{ мГн}$, $M = 6,5 \text{ мГн}$? К цепи приложено напряжение $U = 100 \text{ в}$ (рис. 5.9). Частота переменного тока $f = 200 \text{ гц}$. Построить векторную диаграмму.

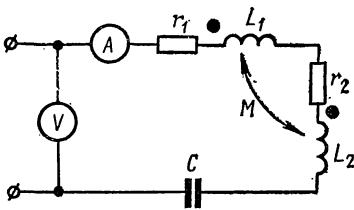


Рис. 5.10

5.9. Вольтметр и амперметр, включенные в цепь (рис. 5.10), показали $U = 88 \text{ мв}$, $I = 2,2 \text{ ма}$. Чему равна емкость C , если $r_1 = 9,5 \text{ ом}$, $\omega L_1 = 14,6 \text{ ом}$, $r_2 = 11,6 \text{ ом}$, $\omega L_2 = 17 \text{ ом}$, $\omega M = 3,2 \text{ ом}$? Частота тока $f = 50 \text{ кГц}$.

Решение. Из уравнения закона Ома

$$Z = \frac{\dot{U}}{i} = (r_1 + r_2) + j\left(\omega L_1 + \omega L_2 + 2\omega M - \frac{1}{\omega C}\right).$$

Модуль полного сопротивления определим из показаний приборов как отношение $\frac{U}{I} = \frac{88 \cdot 10^{-3}}{2,2 \cdot 10^{-3}} = 40 \text{ ом}$. Его можно также найти из

выражения
$$z = \sqrt{(r_1 + r_2)^2 + \left(\omega L_1 + \omega L_2 + 2\omega M - \frac{1}{\omega C}\right)^2}.$$

Подставляя числовые значения, будем иметь

$$40 = \sqrt{21,1^2 + \left(38 - \frac{1}{\omega C}\right)^2}.$$

Решая это уравнение, получим

$$\frac{1}{\omega C} = 4 \text{ ом} \quad \text{или} \quad \frac{1}{\omega C} = 72 \text{ ом},$$

и, наконец, $C = 0,796 \text{ мкф}$ или $C = 0,0442 \text{ мкф}$.

5.10. Для цепи предыдущей задачи вычислить коэффициент связи k , если $U = 85 \text{ мв}$, $I = 1,7 \text{ ма}$, $r_1 = 16 \text{ ом}$, $\omega L_1 = 26 \text{ ом}$, $r_2 = 14 \text{ ом}$, $\omega L_2 = 28 \text{ ом}$, $\frac{1}{\omega C} = 20 \text{ ом}$.

5.11. Для определения взаимной индуктивности двух катушек их соединили последовательно и подключили к источнику; были измерены напряжение, ток и мощность в двух случаях: в первом — зажим 2 первой катушки был соединен с зажимом 3 второй катушки (рис. 5.11, а), во втором — зажим 2 первой катушки был соединен с

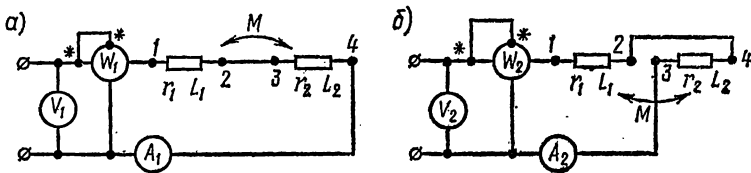


Рис. 5.11

зажимом 4 второй катушки (рис. 5.11, б). Показания приборов при первом опыте: $U_1 = 120 \text{ в}$, $I_1 = 12 \text{ а}$, $P_1 = 864 \text{ вт}$; при втором — $U_2 = 120 \text{ в}$, $I_2 = 10 \text{ а}$, $P_2 = 600 \text{ вт}$.

Чему равна взаимная индуктивность катушек, если частота переменного тока $f = 50 \text{ гц}$? Выяснить, в какой из двух схем соединены катушки соответствует согласному включению.

Решение. По данным первого опыта найдем полное сопротивление схемы z_I , ее активное r_I и реактивное сопротивления x_I :

$$z_I = \frac{U_1}{I_1} = 10 \text{ ом}; \quad r_I = \frac{P_1}{I_1^2} = 6 \text{ ом}; \quad x_I = \sqrt{z_I^2 - r_I^2} = 8 \text{ ом}.$$

Аналогично из данных второго опыта:

$$z_{II} = \frac{U_2}{I_2} = 12 \text{ ом}; \quad r_{II} = \frac{P_2}{I_2^2} = 6 \text{ ом}; \quad x_{II} = \sqrt{z_{II}^2 - r_{II}^2} = 10,4 \text{ ом}.$$

Равенство полученных значений активного сопротивления $r_I = r_{II}$ свидетельствует об отсутствии ошибок измерения. Реактивное же сопротивление во втором опыте оказалось больше, чем в первом ($x_{II} > x_I$). Это указывает на то, что вторая схема соответствует согласному включению, а первая — встречному.

Искомая взаимная индуктивность найдется из уравнений.

$$\omega L_1 + \omega L_2 + 2\omega M = x_{II} \quad \text{и} \quad \omega L_1 + \omega L_2 - 2\omega M = x_I.$$

Вычитая одно уравнение из другого, получим

$$M = \frac{x_{11} - x_1}{4\omega} = \frac{10,4 - 8}{4 \cdot 2\pi \cdot 50} = 1,91 \text{ мГн.}$$

5.12. При включении одной первой катушки (рис. 5.12, а) приборы показали $U_1 = 52 \text{ в}$, $I_1 = 4 \text{ а}$, $P_1 = 80 \text{ Вт}$, а при включении только одной второй катушки (рис. 5.12, б) $U_2 = 52 \text{ в}$, $I_2 = 4,16 \text{ а}$, $P_2 = 60,5 \text{ Вт}$. При включении же катушек по схеме рис. 5.12, в

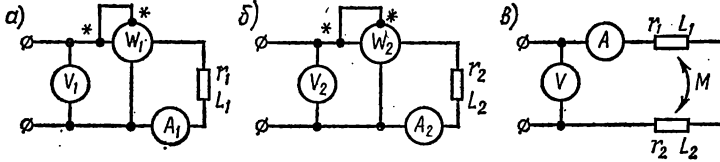


Рис. 5.12

приборы показали $U = 76 \text{ в}$, $I = 4 \text{ а}$.

Выяснить, включены катушки согласно или встречно, и подсчитать взаимную индуктивность M , если частота переменного тока $f = 50 \text{ Гц}$.

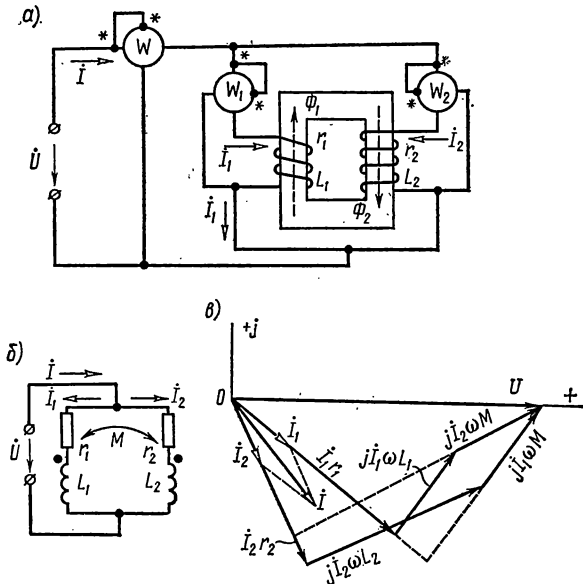


Рис. 5.13

5.13. Даны две параллельно соединенные катушки (рис. 5.13, а), параметры которых $r_1 = 20 \text{ ом}$, $\omega L_1 = 10 \text{ ом}$, $r_2 = 20 \text{ ом}$, $\omega L_2 = 20 \text{ ом}$ и сопротивление взаимной индукции $\omega M = 10 \text{ ом}$. К цепи подведено

напряжение $U = 150$ в. Определить все токи и построить векторную диаграмму. Определить показание каждого ваттметра и мощности тепловых потерь в каждой из ветвей.

Решение. Из рис. 5.13, а видно, что катушки соединены согласно, так как каждую из них магнитные потоки само- и взаимной индукции пронизывают в одном и том же направлении. На рис. 5.13, б начерчена схема заданной цепи.

Введем обозначения:

$$Z_1 = r_1 + j\omega L_1 = (20 + j10) \text{ ом};$$

$$Z_2 = r_2 + j\omega L_2 = (20 + j20) \text{ ом}; \quad Z_M = j\omega M = j10 \text{ ом}.$$

По законам Кирхгофа,

$$\dot{U} = \dot{I}_1 Z_1 + \dot{I}_2 Z_M; \quad (1)$$

$$\dot{U} = \dot{I}_2 Z_2 + \dot{I}_1 Z_M; \quad (2)$$

$$\dot{I} = \dot{I}_1 + \dot{I}_2. \quad (3)$$

Решив совместно уравнения (1) и (2) и приняв $\dot{U} = U = 150$ в, получим:

$$\dot{I}_1 = U \frac{Z_2 - Z_M}{Z_1 Z_2 - Z_M^2} = 4 - j3 = 5 e^{-j36^\circ 50'} \text{ а};$$

$$\dot{I}_2 = U \frac{Z_1 - Z_M}{Z_1 Z_2 - Z_M^2} = 2 - j4 = 4,47 e^{-j63^\circ 30'} \text{ а};$$

$$\dot{I} = \dot{I}_1 + \dot{I}_2 = 6 - j7 = 9,22 e^{-j49^\circ 25'} \text{ а}.$$

На рис. 5.13, в по уравнениям (1) — (3) построена векторная диаграмма. По вещественной оси отложен вектор \dot{U} . На основе расчетов построены векторы \dot{I}_1 , \dot{I}_2 и \dot{I} . Затем на основании уравнения (1) построены векторы $\dot{I}_1 r_1$, $\dot{I}_1 j\omega L_1$, $\dot{I}_2 j\omega M$; их сумма дает вектор \dot{U} . Аналогично построены векторы по уравнению (2).

Определяем показания каждого из ваттметров:

$$P_1 = \text{Re} [\dot{U} \dot{I}_1^*] = \text{Re} [150 (4 + j3)] = 150 \cdot 4 = 600 \text{ вт};$$

$$P_2 = \text{Re} [\dot{U} \dot{I}_2^*] = \text{Re} [150 (2 + j4)] = 150 \cdot 2 = 300 \text{ вт};$$

$$P = \text{Re} [\dot{U} \dot{I}^*] = \text{Re} [150 (6 + j7)] = 150 \cdot 6 = 900 \text{ вт}.$$

Тепловые потери в первой и второй ветвях соответственно равны:

$$\Delta P_1 = I_1^2 r_1 = 5^2 \cdot 20 = 500 \text{ вт};$$

$$\Delta P_2 = I_2^2 r_2 = 4,47^2 \cdot 20 = 400 \text{ вт},$$

а их сумма $\Delta P_1 + \Delta P_2$ равна мощности P , поступающей во всю рассматриваемую цепь (900 *вт*).

Активная мощность $P_1 = 600$ *вт*, потребляемая первой ветвью от источника энергии, частично расходуется на тепловые потери в этой ветви ($\Delta P_1 = 500$ *вт*), и оставшая часть ($600 - 500 = 100$ *вт*) поступает в магнитное поле, откуда вследствие взаимной индукции передается во вторую катушку. Это видно из следующего.

Напряжение взаимной индукции на первой катушке

$$\dot{U}_{1M} = Z_M \dot{I}_2 = j 10 (2 - j 4) = (40 + j 20) \text{ в,}$$

а мощность, передаваемая полем из первой катушки во вторую,

$$P_{1M} = \text{Re} [\dot{U}_{1M} \dot{I}_1^*] = \text{Re} [(40 + j 20)(4 + j 3)] = 40 \cdot 4 - 20 \cdot 3 = 100 \text{ вт.}$$

Аналогично,

$$\dot{U}_{2M} = Z_M \dot{I}_1 = j 10 (4 - j 3) = (30 + j 40) \text{ в;}$$

$$P_{2M} = \text{Re} [\dot{U}_{2M} \dot{I}_2^*] = \text{Re} [(30 + j 40)(2 + j 4)] = 30 \cdot 2 - 40 \cdot 4 = -100 \text{ вт.}$$

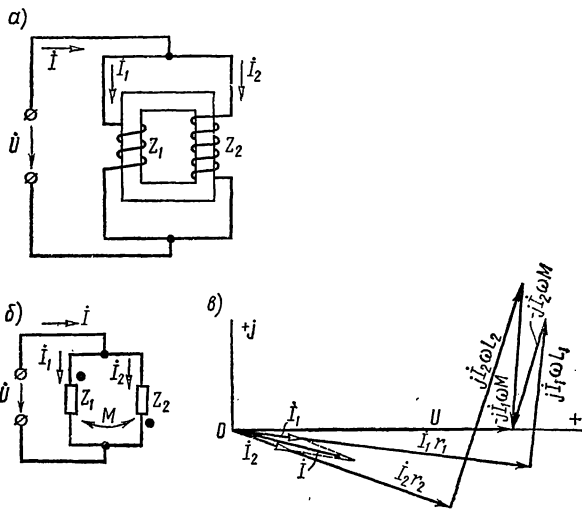


Рис. 5.14

5.14. Вычислить токи и построить векторную диаграмму для цепи схемы (рис. 5.14, а), параметры которой равны $Z_1 = (20 + j10)$ *ом*, $Z_2 = (20 + j20)$ *ом*, $Z_M = j10$ *ом*. Напряжение $U = 150$ *в*.

У к а з а н и е. Катушки цепи, изображенной на рис. 5.14, б, соединены встречно. При указанных на схеме положительных направлениях токов система уравнений Кирхгофа будет:

$$\dot{U} = \dot{I}_1 Z_1 - \dot{I}_2 Z_M; \quad \dot{U} = \dot{I}_2 Z_2 - \dot{I}_1 Z_M; \quad \dot{I} = \dot{I}_1 \nrightarrow \dot{I}_2.$$

По результатам расчетов на рис. 5.14 в построена векторная диаграмма.
 5.15. Вычислить токи и построить векторную диаграмму для цепи рис. 5.14, а, к которой подведено напряжение $U = 120$ в. Даны: $Z_1 = (5 + j10)$ ом, $Z_2 = (100 + j20)$ ом, $Z_M = j \cdot 10$ ом.

З а м е ч а н и е. Получив результат решения задачи, обратить внимание на то, что ток в одной из ветвей опережает приложенное напряжение.

5.16. Подобрать емкость C так, чтобы в цепи схемы рис. 5.15 при угловой частоте $\omega = 5 \cdot 10^5$ сек⁻¹ был резонанс напряжений. Параметры цепи: $r_1 = 100$ ом, $L_1 = 0,1$ мГн, $r_2 = 100$ ом, $L_2 = 0,2$ мГн, $M = 0,1$ мГн. При найденной емкости определить токи и построить векторную диаграмму, если $U = 75$ мВ.

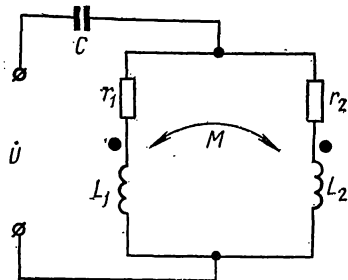


Рис. 5.15

5.17. Решить предыдущую задачу в случае встречного включения катушек.

5.18. При какой емкости C , включенной в цепь (рис. 5.16, а), будет резонанс токов на частоте $f = 10^4$ гц? Параметры цепи: $L_1 = 318$ мкГн, $L_2 = 159$ мкГн, $M = 124$ мкГн. Вычислить токи и построить векторную диаграмму при $U = 40$ мВ.

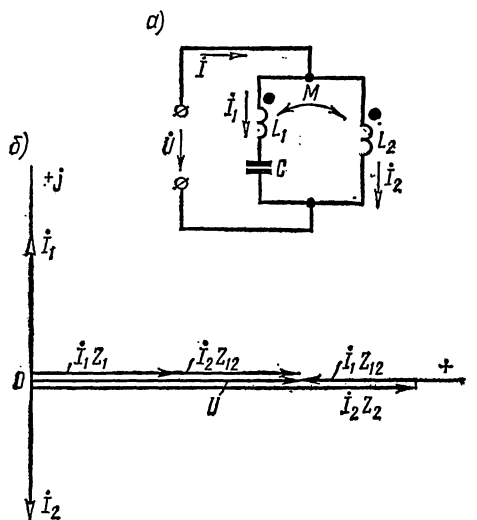


Рис. 5.16

Р е ш е н и е. Обозначим:

$$Z_1 = j\left(\omega L_1 - \frac{1}{\omega C}\right); \quad Z_2 = j\omega L_2; \quad Z_{12} = j\omega M.$$

По законам Кирхгофа,

$$\dot{U} = Z_1 \dot{I}_1 + Z_{12} \dot{I}_2;$$

$$\dot{U} = Z_2 \dot{I}_2 + Z_{12} \dot{I}_1.$$

Совместное решение этих уравнений даст:

$$\dot{I}_1 = \frac{\dot{U} (Z_2 - Z_{12})}{Z_1 Z_2 - Z_{12}^2}; \quad (1)$$

$$\dot{I}_2 = \frac{\dot{U} (Z_1 - Z_{12})}{Z_1 Z_2 - Z_{12}^2}; \quad (2)$$

$$\dot{i} = \dot{I}_1 + \dot{I}_2 = \dot{U} \frac{Z_1 + Z_2 - 2 Z_{12}}{Z_1 Z_2 - Z_{12}^2}. \quad (3)$$

Так как цепь содержит только реактивные элементы, то условие резонанса токов сводится к тому, что ток \dot{i} в неразветвленной части цепи должен равняться нулю. Подставляя значения комплексных сопротивлений в числитель формулы (3) и приравнявая его нулю, найдем

$$C = \frac{1}{\omega^2 (L_1 + L_2 - 2M)} = \frac{1}{(2\pi \cdot 10^4)^2 (318 + 159 - 2 \cdot 124) 10^{-6}} = 1,1 \text{ мкф.}$$

При этом необходимо проверить, что знаменатель не обращается в нуль. В данном случае это условие удовлетворено.

Расчет токов осуществляется по уравнениям (1) и (2):

$$\dot{I}_1 = j 17,6 \cdot 10^{-3} \text{ а} = 17,6 \text{ ма};$$

$$\dot{I}_2 = -j 17,6 \cdot 10^{-3} \text{ а} = -j 17,6 \text{ ма}.$$

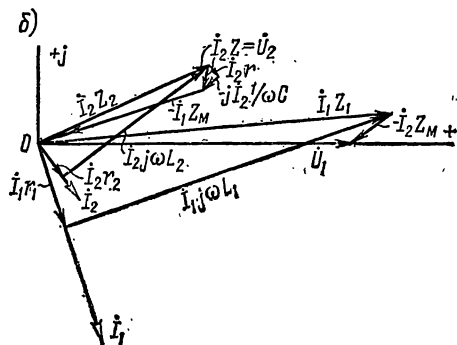
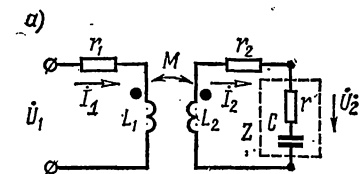


Рис. 5.17

На рис. 5.16, б дана векторная диаграмма токов и напряжений.

5.19. Решить предыдущую задачу при встречном включении катушек.

5.20. К первичной обмотке трансформатора без стального сердечника подведено напряжение $U_1 = 120 \text{ в}$ (рис. 5.17, а). Определить напряжение U_2 на нагрузочном сопротивлении Z при $Z_1 = r_1 +$

$+j\omega L_1 = (10 + j42) \text{ ом}$, $Z_2 = r_2 + j\omega L_2 = (15 + j70) \text{ ом}$, $Z =$
 $= r - j \frac{1}{\omega C} = (5 - j10) \text{ ом}$, $Z_M = j\omega M = j20 \text{ ом}$. Построить вектор-

ную диаграмму.
 Решение. Система уравнений второго закона Кирхгофа для этого случая будет:

$$I_1 Z_1 - I_2 Z_M = \dot{U}_1; \quad (1)$$

$$I_2 (Z_2 + Z) - I_1 Z_M = 0. \quad (2)$$

Решая эти два уравнения, получим:

$$I_1 = 1 - j3 = 3,16 e^{-j71^\circ 35'} \text{ а}; \quad I_2 = 0,6 - j0,8 = 1 e^{-j53^\circ 10'} \text{ а}.$$

Напряжение на сопротивлении Z

$$U_2 = I_2 Z = -5 - j10 = 11,2 e^{-j116^\circ 30'} \text{ в}.$$

Векторная диаграмма приведена на рис. 5.17, б. Порядок ее построения таков: на основе расчетов отложены векторы токов I_1 , I_2 , далее в соответствии с уравнением (1) отложены векторы $I_1 r_1$, $I_1 j\omega L_1$, $-I_2 j\omega M$, их сумма дает вектор \dot{U}_1 . Аналогично построены векторы по уравнению (2).

5.21. Во вторичной обмотке трансформатора без стального сердечника проходит ток $I_2 = 0,5 \text{ а}$ (рис. 5.18, а). Коэффициент связи между первой и второй обмотками $k = 0,5$. Вторичная обмотка трансформатора замкнута на конденсатор емкостью C . Сопротивления элементов цепи: $r_1 = 60 \text{ ом}$, $\omega L_1 = 80 \text{ ом}$, $r_2 = 90 \text{ ом}$, $\omega L_2 = 45 \text{ ом}$ и $\frac{1}{\omega C} = 210 \text{ ом}$.

Определить ток в первичной обмотке I_1 и приложенное к ней напряжение \dot{U}_1 . Построить векторную диаграмму.

Решение. Зная, что $k = \frac{M}{\sqrt{L_1 L_2}} = \frac{\omega M}{\omega \sqrt{L_1 L_2}}$, найдем

$$\omega M = k \sqrt{\omega L_1 \omega L_2} = 0,5 \sqrt{80 \cdot 45} = 30 \text{ ом}.$$

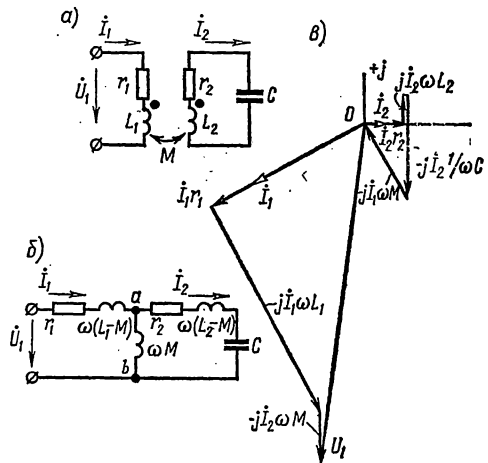


Рис. 5.18

Из уравнения второго закона Кирхгофа для вторичного контура

$$\left[r_2 + j \left(\omega L_2 - \frac{1}{\omega C} \right) \right] \dot{I}_2 - j \omega M \dot{I}_1 = 0$$

определим ток в первичной обмотке;

$$\dot{I}_1 = \dot{I}_2 \frac{r_2 + j \left(\omega L_2 - \frac{1}{\omega C} \right)}{j \omega M} = -2,75 - j1,5 = 3,14 e^{-j151^\circ 30'} \text{ а.}$$

Приложенное к цепи напряжение найдем из уравнения второго закона Кирхгофа, составленного для первичного контура:

$$\dot{U}_1 = (r_1 + j \omega L_1) \dot{I}_1 - j \omega M \dot{I}_2 = -45 - j325 = 328 e^{-j97^\circ 50'} \text{ в.}$$

Та же задача может быть решена и путем замены заданной схемы другой, ей эквивалентной (рис. 5.18, б), в соответствии с рис. 5.4. Векторная диаграмма построена на рис. 5.18, в.

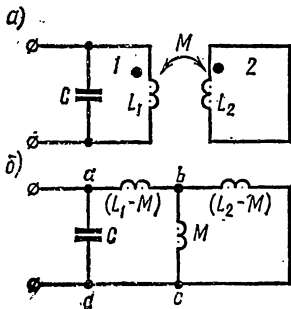


Рис. 5.19

5.22. Вблизи колебательного контура 1 без потерь расположена короткозамкнутая цепь 2 (рис. 5.19, а). Чему равна резонансная частота, если $L_1 = 9 \text{ мГн}$, $L_2 = 4 \text{ мГн}$, $M = 2 \text{ мГн}$, $C = 0,2 \text{ мкФ}$?

Решение. На рис. 5.19, б представлена схема, эквивалентная заданной (см. рис. 5.4).

Резонанс токов наступит, когда реактивная проводимость равна нулю. Вычислим ее, начиная с определения эквивалентного комплексного сопротивления двух параллельных ветвей, подключенных к точкам b и c:

$$Z_{bc} = \frac{j \omega M j \omega_0 (L_2 - M)}{j \omega_0 L_2} = \frac{j \omega_0 M (L_2 - M)}{L_2};$$

$$Z_{ac} = Z_{ab} + Z_{bc} = j \omega_0 (L_1 - M) + \frac{j \omega_0 M (L_2 - M)}{L_2} = \frac{j \omega_0 (L_1 L_2 - M^2)}{L_2};$$

$$Y_3 = Y_{ad} + Y_{ac} = j \omega_0 C + \frac{L_2}{j \omega_0 (L_1 L_2 - M^2)} = 0,$$

или

$$\omega_0 C = \frac{L_2}{\omega_0 (L_1 L_2 - M^2)},$$

отсюда

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{L_2}{C (L_1 L_2 - M^2)}} = 2,5 \cdot 10^4 \text{ сек}^{-1}.$$

5.23. Какое сопротивление Z_n следует подключить ко вторичной обмотке трансформатора без стального сердечника (рис. 5.20), чтобы

ток на входе первичной катушки был равен 15 а и совпадал по фазе с первичным напряжением $U_1 = 120 \text{ в}$? Даны: $r_1 = 2 \text{ ом}$, $\omega L_1 = 8 \text{ ом}$, $r_2 = 3 \text{ ом}$, $\omega L_2 = 15 \text{ ом}$, $\omega M = 10 \text{ ом}$.

5.24. К цепи, изображенной на рис. 5.21, а, подключено напряжение $U = 110 \text{ в}$. Параметры цепи: $r_1 = 20 \text{ ом}$, $r_2 = 15 \text{ ом}$, $r_3 = 10 \text{ ом}$, $L_1 = 0,4 \text{ гн}$, $L_2 = 0,3 \text{ гн}$, $M = 0,2 \text{ гн}$. Частота тока $f = 50 \text{ гц}$. Найти все токи.

Решение. Выбрав положительные направления токов, как это указано на рис. 5.21, а, изобразим заданную цепь схемой, показанной на рис. 5.21, б.

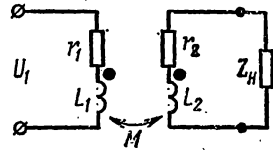


Рис. 5.20

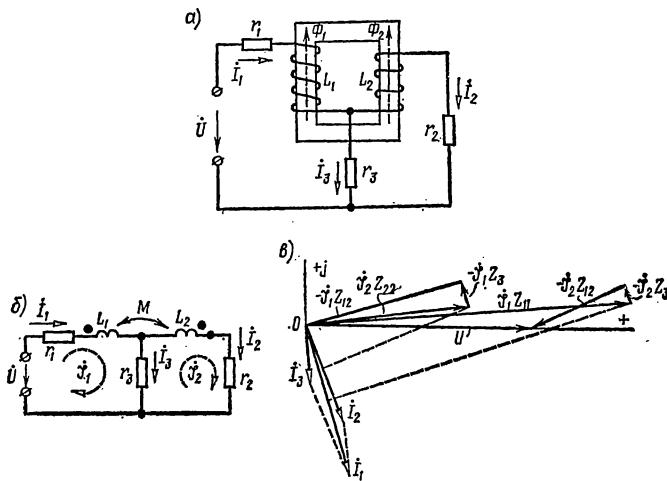


Рис. 5.21

Для решения задачи воспользуемся методом контурных токов. В соответствии с выбранными направлениями контурных токов \dot{J}_1 и \dot{J}_2 , по законам Кирхгофа,

$$\dot{U} = Z_{11}\dot{J}_1 - Z_3\dot{J}_2 - Z_{12}\dot{J}_2; \quad (1)$$

$$0 = Z_{22}\dot{J}_2 - Z_3\dot{J}_1 - Z_{12}\dot{J}_1. \quad (2)$$

Здесь:

$$Z_{11} = r_1 + r_3 + j\omega L_1 = (30 + j126) \text{ ом};$$

$$Z_{22} = r_2 + r_3 + j\omega L_2 = (25 + j94,2) \text{ ом};$$

$$Z_3 = r_3 = 10 \text{ ом}, Z_{12} = j\omega M = j62,8 \text{ ом}.$$

Решая совместно уравнения (1) и (2), получим:

$$\begin{aligned} \dot{j}_1 &= \frac{\dot{U}Z_{22}}{Z_{11}Z_{22} - (Z_3 + Z_{12})^2} = \frac{110 \cdot 97,5e^{j75^\circ 10'}}{-8630e^{-j33^\circ 10'}} = 1,24e^{-j71^\circ 40'} = \\ &= (0,39 - j1,18) \text{ а}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{j}_2 &= \frac{U(Z_3 + Z_{12})}{Z_{11}Z_{22} - (Z_3 + Z_{12})^2} = \frac{110(10 + j62,8)}{-8630e^{-j33^\circ 10'}} = 0,81e^{-j65^\circ 50'} = \\ &= (0,33 - j0,74) \text{ а}. \end{aligned}$$

Искомые токи в отдельных ветвях:

$$\dot{I}_1 = \dot{J}_1 = 1,24e^{-j71^\circ 40'} \text{ а}, \dot{I}_2 = \dot{J}_2 = 0,81e^{-j65^\circ 50'} \text{ а};$$

$$\dot{I}_3 = \dot{J}_1 - \dot{J}_2 = 0,06 - j0,44 = 0,444e^{-j82^\circ 20'} \text{ а}.$$

На рис. 5.21, в построена векторная диаграмма.

5.25. Вычислить токи, проходящие в цепи, изображенной на рис. 5.22. Числовые значения активных и реактивных сопротивлений и приложенного напряжения те же, что и в предыдущей задаче.

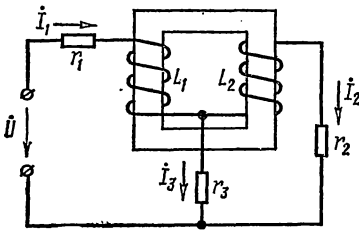
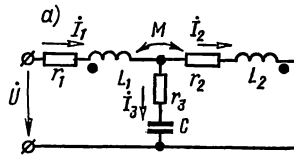


Рис. 5.22

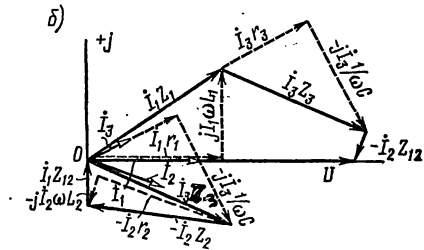


Рис. 5.23

5.26. Найти емкостное сопротивление x_C , при котором в цепи рис. 5.23, а наступит резонанс напряжений, если известны $r_1 = 30 \text{ ом}$, $\omega L_1 = 20 \text{ ом}$, $r_2 = 50 \text{ ом}$, $\omega L_2 = 10 \text{ ом}$, $\omega M = 10 \text{ ом}$, $r_3 = 50 \text{ ом}$. При найденном x_C определить все токи и построить векторную диаграмму, если $U = 120 \text{ в}$.

Решение. Обозначим: $Z_1 = (r_1 + j\omega L_1) = (30 + j20) \text{ ом}$; $Z_2 = (r_2 + j\omega L_2) = (50 + j10) \text{ ом}$; $Z_3 = r_3 - jx_C = (50 - jx_C)$; $Z_{12} = j\omega M = j10 \text{ ом}$.

Наметим ход решения задачи. Для того чтобы в цепи имелся резонанс напряжений, надо, чтобы приложенное напряжение \dot{U} и ток \dot{I}_1

в ее неразветвленной части совпадали по фазе. Поэтому найдем I_1 и вычислим отношение \dot{U}/I_1 , которое должно быть вещественной величиной.

Для определения токов составим уравнения по законам Кирхгофа:

$$\dot{U} = Z_1 \dot{I}_1 + Z_3 \dot{I}_3 - Z_{12} \dot{I}_2; \quad (1)$$

$$0 = Z_{12} \dot{I}_1 + Z_3 \dot{I}_3 - Z_2 \dot{I}_2; \quad (2)$$

$$\dot{I}_1 = \dot{I}_2 + \dot{I}_3. \quad (3)$$

Решая их, находим:

$$\dot{I}_1 = \frac{\dot{U}(Z_2 + Z_3)}{(Z_1 + Z_3)(Z_2 + Z_3) - (Z_3 - Z_{12})^2}; \quad (4)$$

$$\dot{I}_2 = \frac{\dot{U}(Z_3 + Z_{12})}{(Z_1 + Z_3)(Z_2 + Z_3) - (Z_3 + Z_{12})^2}; \quad (5)$$

$$\dot{I}_3 = \frac{\dot{U}(Z_2 - Z_{12})}{(Z_1 + Z_3)(Z_2 + Z_3) - (Z_3 + Z_{12})^2}. \quad (6)$$

Из уравнения (4) определим отношение \dot{U}/I_1 (входное сопротивление цепи $Z_{\text{вх}}$):

$$\dot{U}/I_1 = Z_{\text{вх}} = \frac{Z_1 Z_3 + Z_1 Z_2 + Z_2 Z_3 - 2Z_{12} Z_3 - Z_{12}^2}{Z_2 + Z_3}.$$

Подставив числовые значения всех сопротивлений, выделим вещественную и мнимую составляющие:

$$\begin{aligned} Z_{\text{вх}} &= \frac{(30 + j20)(50 - jx_C) + (30 + j20)(50 + j10)}{100 + j(10 - x_C)} + \\ &+ \frac{(50 + j10)(50 - jx_C) - j20(50 - jx_C) + 100}{100 + j(10 - x_C)} = \\ &= \frac{(80x_C^2 - 1600x_C + 558\,000) + j(10x_C^2 - 2700x_C + 126\,000)}{10\,000 + (10 - x_C)^2}. \end{aligned} \quad (7)$$

В полученном выражении коэффициент при мнимой части приравняем нулю:

$$10x_C^2 - 2700x_C + 126\,000 = 0.$$

Решая это квадратное уравнение, получим:

$$x_{C_1} = 210 \text{ ом}; \quad x_{C_2} = 60 \text{ ом}.$$

Определим токи.

При $x_{C_1} = 210$ ом вещественная часть входного сопротивления по (7)

$$Z_{\text{вх}} = \frac{80 \cdot 210^2 - 1600 \cdot 210 + 558\,000}{10\,000 + (10 - 210)^2} = 75 \text{ ом},$$

а ток

$$I_1 = \frac{\dot{U}}{Z_{\text{вх}}} = \frac{120}{75} = 1,6 \text{ а.}$$

По формуле (5) ток

$$I_2 = (1,44 - j0,32) \text{ а},$$

и, наконец, комплексный ток

$$I_3 = I_1 - I_2 = 1,6 - (1,44 - j0,32) = (0,16 + j0,32) \text{ а}.$$

При $x_{C_2} = 60$ ом вещественная часть входного сопротивления равна 60 ом, а токи $I_1 = 2$ а, $I_2 = (1,2 - j0,4)$ а, $I_3 = (0,8 + j0,4)$ а.

На рис. 5.23, б дана векторная диаграмма напряжений и токов, построенная для $x_{C_2} = 60$ ом на основании уравнений (1)–(3).

5.27. Решить задачу 5.26 при условии, если проводники, подходящие к зажимам второй катушки (r_2, L_2), поменять местами, т. е. считать, что точка на схеме рис. 5.23, а стоит не справа, а слева. Параметры цепи: $r_1 = r_2 = 10$ ом, $\omega L_1 = \omega L_2 = 8$ ом, $\omega M = 2$ ом, $r_3 = 0$, $U = 100$ в.

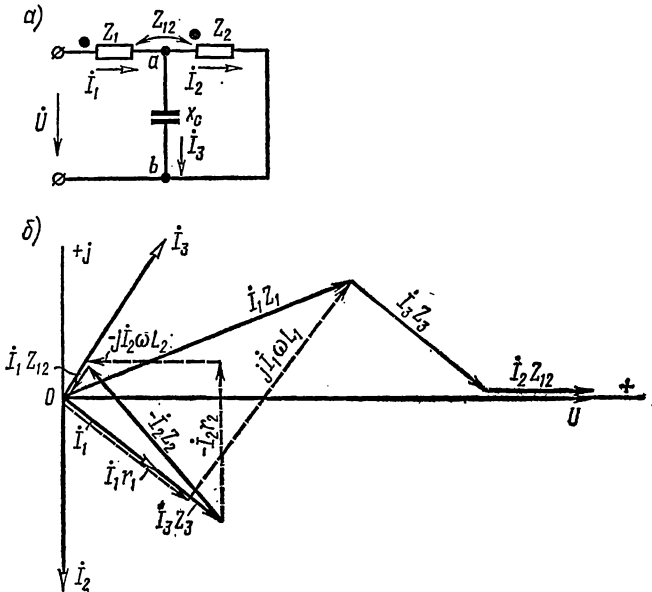


Рис. 5.24

5.28. Для цепи рис. 5.24, а определить емкостное сопротивление x_C , при котором наступит резонанс токов. Сопротивления элементов цепи: $Z_1 = (20 + j34) \text{ ом}$, $Z_2 = (12 + j10) \text{ ом}$, $Z_{12} = j6 \text{ ом}$, $Z_3 = -jx_C$.

При найденном значении емкостного сопротивления найти все токи и построить векторную диаграмму, если приложенное напряжение $U = 200 \text{ в}$.

У к а з а н и е. Следует сначала определить все токи, а затем напряжение \dot{U}_{ab} на участке ab . Резонанс токов будет при условии совпадения по фазе напряжения \dot{U}_{ab} и тока \dot{i}_1 .

По результатам вычислений должно быть получено следующее отношение:

$$\frac{\dot{U}_{ab}}{\dot{i}_1} = \frac{Z_2 Z_3 + Z_3 Z_{12}}{Z_2 + Z_3}$$

Мнимую часть этого отношения приравниваем нулю, откуда находим два значения емкостного сопротивления $x_C = 19 \text{ ом}$ и $x_C = 0$. Второе значение $x_C = 0$ (короткое замыкание) отбрасываем, как не удовлетворяющее требованиям задачи.

По результатам расчетов для $x_C = 19 \text{ ом}$ на рис. 5.24, б построена векторная диаграмма.

5.29. В цепи рис. 5.24, а поменять местами проводники, подходящие к зажимам второй катушки Z_2 , т. е. считать, что у нее точка на схеме стоит не слева, а справа. Определить x_C , при котором будет резонанс токов, если

$$Z_1 = (8 + j6) \text{ ом}; Z_2 = (4 + j6) \text{ ом}; Z_{12} = -j2 \text{ ом}.$$

Вычислить все токи при $U = 120 \text{ в}$.

5.30. При каком коэффициенте связи k в цепи рис. 5.24, а будет резонанс токов? Даны: $r_1 = 4 \text{ ом}$, $x_1 = 6 \text{ ом}$, $r_2 = 4 \text{ ом}$, $x_2 = 6 \text{ ом}$ и $x_C = 8 \text{ ом}$. Для указанного случая вычислить токи и построить векторную диаграмму, если $U = 115 \text{ в}$.

5.31. К цепи рис. 5.25, а приложено напряжение $U = 250 \text{ мв}$. Найти токи и определить напряжение между точками a и b схемы.

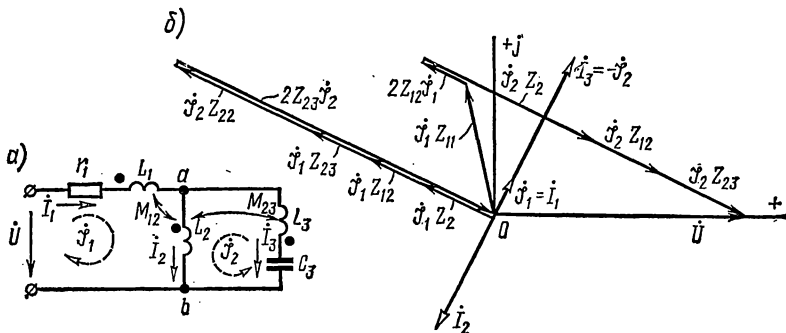


Рис. 5.25

Сопротивления: $r_1 = 50 \text{ ом}$, $\omega L_1 = 20 \text{ ом}$, $\omega L_2 = 20 \text{ ом}$, $\omega L_3 = 20 \text{ ом}$, $\frac{1}{\omega C} = 50 \text{ ом}$, $\omega M_{12} = 10 \text{ ом}$, $\omega M_{23} = 10 \text{ ом}$. Построить векторную диаграмму напряжений и токов. Задачу решить методом контурных токов.

Решение. Обозначим:

$$Z_1 = r_1 + j\omega L_1 = (50 + j20) \text{ ом}, Z_2 = j\omega L_2 = j20 \text{ ом};$$

$$Z_3 = j\left(\omega L_3 - \frac{1}{\omega C_3}\right) = -j30 \text{ ом}, Z_{12} = j\omega M_{12} = j10 \text{ ом};$$

$$Z_{23} = j\omega M_{23} = j10 \text{ ом}; Z_{11} = Z_1 + Z_2 = (50 + j40) \text{ ом}; Z_{22} = Z_2 + Z_3 = -j10 \text{ ом}.$$

Пользуясь введенными обозначениями, составим уравнения контурных токов:

$$\dot{J}_1(Z_{11} + 2Z_{12}) + \dot{J}_2(Z_2 + Z_{12} + Z_{23}) = \dot{U};$$

$$\dot{J}_1(Z_2 + Z_{12} + Z_{23}) + \dot{J}_2(Z_{22} + 2Z_{23}) = 0.$$

Совместное решение этих уравнений дает:

$$\dot{J}_1 = (1 + j2) \text{ ма}; \quad \dot{J}_2 = (-4 - j8) \text{ ма}.$$

Комплексные токи, проходящие в каждой ветви,

$$\dot{I}_1 = \dot{J}_1 = (1 + j2) \text{ ма}; \quad \dot{I}_2 = \dot{J}_1 + \dot{J}_2 = (-3 - j6) \text{ ма}; \quad \dot{I}_3 = -\dot{J}_2 = (4 + j8) \text{ ма}.$$

Напряжение между точками a и b

$$\dot{U}_{ab} = \dot{I}_3 Z_3 - \dot{I}_2 Z_{23} = (180 - j90) \text{ мв}.$$

Тот же результат можно получить и из уравнений

$$\dot{U}_{ab} = \dot{U} - \dot{I}_1 Z_1 - \dot{I}_2 Z_{12}; \quad \dot{U}_{ab} = \dot{I}_2 Z_2 + \dot{I}_1 Z_{12} - \dot{I}_3 Z_{23}.$$

Векторная диаграмма построена на рис. 5.25, б.

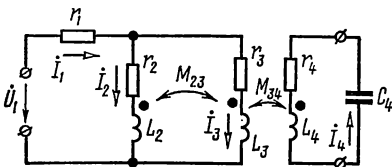


Рис. 5.26

5.32. Параметры цепи рис. 5.26 при некоторой частоте имеют:

$$Z_1 = r_1 = 13 \text{ ом}; \quad Z_2 = r_2 + j\omega L_2 = (8 + j12) \text{ ом}; \quad Z_3 = r_3 + j\omega L_3 = (6 + j8) \text{ ом};$$

$$Z_4 = r_4 + j\omega L_4 = (10 + j15) \text{ ом};$$

$$Z_4^* = -j \frac{1}{\omega C_4} = -j20 \text{ ом};$$

$$Z_{23} = j\omega M_{23} = j6 \text{ ом}; \quad Z_{34} = j\omega M_{34} = j10 \text{ ом}.$$

Через конденсатор C_4 , являющийся нагрузкой, проходит ток $I_4 = 2$ а. Вычислить все токи и напряжение U_1 , подведенное к цепи. Определить отношение напряжения на нагрузке к напряжению U_1 .

5.33. В цепи рис. 5.25, а поменять местами проводники, подходящие к зажимам катушки L_3 . Найти токи и напряжение U_{ab} , если $U = 120$ в, а сопротивления цепи: $Z_1 = (120 + j30)$ ом, $Z_2 = j20$ ом, $Z_3 = -j20$ ом, $Z_{12} = j10$ ом, $Z_{23} = 10$ ом.

5.34. Определить все токи, если сопротивления элементов цепи (рис. 5.27, а): $r_1 = 8$ ом, $\omega L_1 = 56$ ом, $r_2 = 10$ ом, $\omega L_2 = 20$ ом, $r_3 = 15$ ом, $\omega L_3 = 20$ ом, $r_4 = 5$ ом, $\omega M_{12} = 10$ ом, $\omega M_{13} = 10$ ом. Напряжение, приложенное к цепи, $U = 100$ в. Построить векторную диаграмму. Составить баланс мощностей.

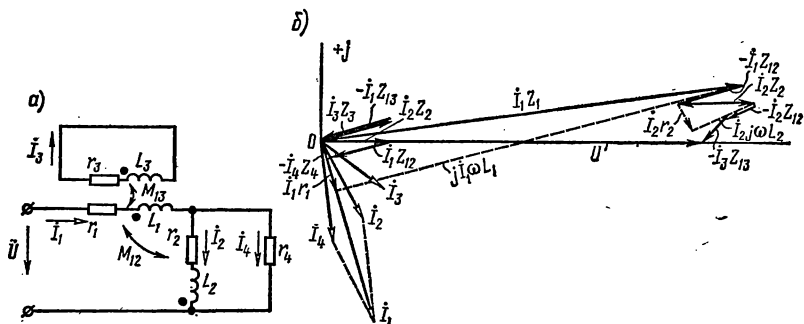


Рис. 5.27

Решение. $Z_1 = (8 + j56)$ ом; $Z_2 = (10 + j20)$ ом; $Z_3 = (15 + j20)$ ом; $Z_4 = 5$ ом; $Z_{12} = j10$ ом; $Z_{13} = j10$ ом.

Задавшись положительными направлениями токов, обозначенными на схеме, составим систему уравнений Кирхгофа:

$$I_1(Z_1 - Z_{12}) + I_2(Z_2 - Z_{12}) - I_3Z_{13} = U;$$

$$I_2Z_2 - I_1Z_{12} - I_4Z_4 = 0;$$

$$I_3Z_3 - I_1Z_{13} = 0;$$

$$I_1 = I_2 + I_4.$$

Решив их, найдем:

$$I_1 = 0,56 - j1,92 = 2e^{-j73^\circ 45'} \text{ а};$$

$$I_2 = 0,4 - j0,8 = 0,894e^{-j63^\circ 30'} \text{ а};$$

$$I_3 = 0,64 - j0,48 = 0,8e^{-j36^\circ 50'} \text{ а};$$

$$I_4 = 0,16 - j1,12 = 1,13e^{-j82^\circ} \text{ а}.$$

На основе полученных данных построим векторную диаграмму (рис. 5.27, б).

Проверим баланс мощностей:

$$UI_1 \cos \varphi_1 = \operatorname{Re}[UI_1^*] = I_1^2 r_1 + I_2^2 r_2 + I_3^2 r_3 + I_4^2 r_4,$$

или

$$\operatorname{Re}[100(0,56 + j1,92)] = 2^2 \cdot 8 + 0,894^2 \cdot 10 + 0,8^2 \cdot 15 + 1,13^2 \cdot 5,$$

или

$$100 \cdot 0,56 = 32 + 8 + 9,6 + 6,4,$$

получилось тождество: $56 = 56$.

5.35. В цепи рис. 5.27, а поменять местами проводники, подходящие к зажимам второй катушки (r_2, L_2), т. е. считать, что точка поставлена вверху. Сопротивления элементов цепи:

$Z_1 = (17 + j44)$ ом, $Z_2 = (25 + j50)$ ом, $Z_3 = (37,5 + j50)$ ом,
 $Z_4 = 7,5$ ом, $Z_{12} = j25$ ом, $Z_{13} = j25$ ом. Напряжение $U = 120$ в.

Вычислить все токи и построить векторную диаграмму. Задачу решить, пользуясь законами Кирхгофа и методом контурных токов.

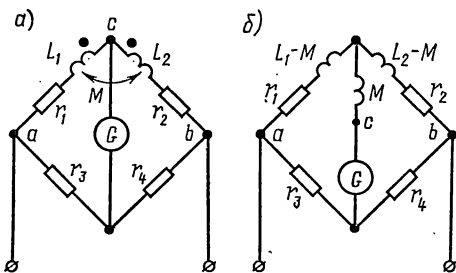


Рис. 5.28

5.36. В схеме рис. 5.28, а определить r_4 и M , при которых мост уравновешен. Даны: $r_1 = 10$ ом, $r_2 = 20$ ом, $r_3 = 25$ ом, $L_1 = 4$ мГн, $L_2 = 6$ мГн. Найти входное сопротивление цепи, если $\omega = 10^4$ сек⁻¹.

Решение. Воспользовавшись развязкой индуктивных связей (см. п. 5 основных положений), преобразуем исходную схему рис. 5.28, а в эквивалентную, не содержащую взаимных индуктивностей (рис. 5.28, б); при этом следует обратить внимание на появление новой узловой точки. Для последней схемы записываем условие равновесия моста

$$[r_1 + j\omega(L_1 - M)] r_4 = [r_2 + j\omega(L_2 - M)] r_3.$$

Приравняем соответственно вещественные и мнимые составляющие:

$$r_1 r_4 = r_2 r_3; \quad \omega(L_1 - M) r_4 = \omega(L_2 - M) r_3.$$

Решая эти уравнения, найдем:

$$r_4 = 50 \text{ ом}; \quad M = 2 \text{ мГн}.$$

Определяем входное сопротивление цепи:

$$Z_{\text{вх}} = \frac{r_3[r_1 + j\omega(L_1 - M)]}{r_3 + r_1 + j\omega(L_1 - M)} + \frac{r_4[r_2 + j\omega(L_2 - M)]}{r_4 + r_2 + j\omega(L_2 - M)} = 41,5e^{j33^\circ 40'} \text{ ом.}$$

5.37. Вычислить входное сопротивление цепи (рис. 5.29, а), если $x_1 = 25 \text{ ом}$, $x_2 = 40 \text{ ом}$, $x_3 = 65 \text{ ом}$, $x_{12} = 20 \text{ ом}$, $x_{23} = 10 \text{ ом}$, $x_{31} = 25 \text{ ом}$, $x_C = 12,5 \text{ ом}$.

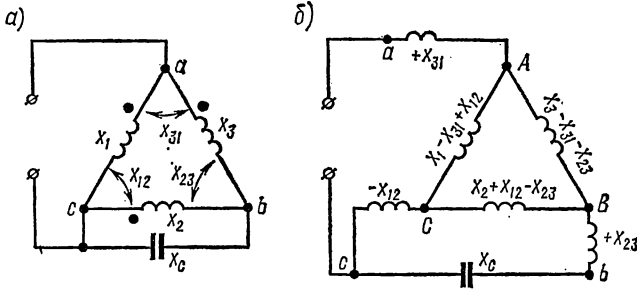


Рис. 5.29

При каком сопротивлении x_C в цепи будет резонанс напряжений?

У к а з а н и е. Заданная схема может быть заменена эквивалентной, представленной на рис. 5.29, б, в которой появились новые узловые точки А, В, С (см. решение задачи 5.36). В ней следует треугольник сопротивлений АВС заменить эквивалентной звездой.

5.38. Определить емкостное сопротивление x_C , при котором в цепи (рис. 5.30) наступит: а) резонанс токов; б) резонанс напряжений. Для каждого из случаев определить показания амперметров. Даны: $U = 24 \text{ в}$, $r_1 = 20 \text{ ом}$, $x_1 = 4 \text{ ом}$, $x_2 = 14 \text{ ом}$, $x_3 = 18 \text{ ом}$, $x_{23} = 2 \text{ ом}$.

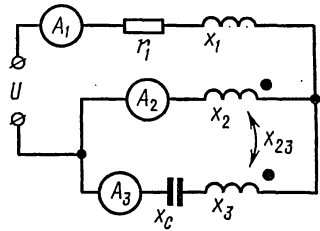


Рис. 5.30

5.39. Сопротивление первичной обмотки трансформатора (рис. 5.31, а) $Z_1 = (5 + j20) \text{ ом}$, а сопротивления двух частей его вторичной обмотки $Z_{2a} = (4 + j32) \text{ ом}$, $Z_{2b} = (3 + j22) \text{ ом}$. Комплексное сопротивление взаимной индуктивности между первичной обмоткой и верхней частью вторичной $Z_{1a} = j5 \text{ ом}$, а между первичной и нижней частью вторичной обмотки $Z_{1b} = j3 \text{ ом}$. Комплексное сопротивление взаимной индуктивности между отдельными частями вторичной обмотки $Z_{ab} = j4 \text{ ом}$. Определить все токи, если части вторичной обмотки трансформатора нагружены на сопротивления, равные $Z'_{2a} = (6 - j7) \text{ ом}$, $Z'_{2b} = 5 \text{ ом}$, а напряжение источника, подведенного к первичной обмотке трансформатора, $U_1 = 120 \text{ в}$.

Решение. Начертим схему, эквивалентную заданной схеме (рис. 5.31, б), и наметим положительные направления токов. Для разметки зажимов катушек трансформатора примем зажим H_1 за начало первичной катушки. Тогда, проследив по схеме за направлениями намоток катушек, убедимся в том, что одноименным ему является зажим H_{2a} верхней части вторичной обмотки; зажим H_{2b} нижней части вторичной обмотки также одноименен зажиму H_1 ; вместе с тем зажимы H_{2a} и H_{2b} являются одноименными. Поэтому все три одноименных зажима H_1 , H_{2a} и H_{2b} имеют одноименное обозначение — точку.

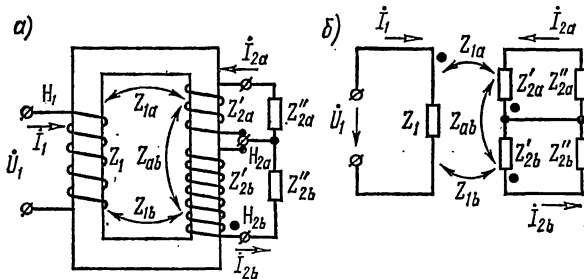


Рис. 5.31

Обозначим:

$$Z_{2a} = Z'_{2a} + Z''_{2a} = (10 + j25) \text{ ом}; \quad Z_{2b} = Z'_{2b} + Z''_{2b} = (8 + j22) \text{ ом}.$$

По второму закону Кирхгофа,

$$I_1 Z_1 - I_{2a} Z_{1a} - I_{2b} Z_{1b} = \dot{U}_1; \quad (1)$$

$$-I_1 Z_{1a} + I_{2a} Z_{2a} + I_{2a} Z_{ab} = 0; \quad (2)$$

$$-I_1 Z_{1b} + I_{2a} Z_{ab} + I_{2b} Z_{2b} = 0. \quad (3)$$

Подставив числовые значения и решив эти уравнения, найдем искомые токи:

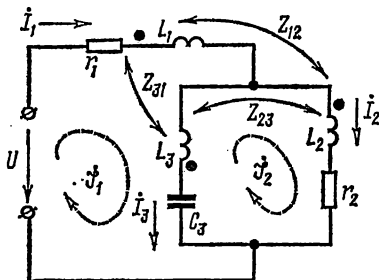


Рис. 5.32

$$= j(14 - 22) = -j8 \text{ ом}, \quad Z_{12} = j4 \text{ ом}, \quad Z_{23} = j5 \text{ ом}, \quad Z_{31} = j6 \text{ ом}.$$

$$I_1 = 6,13e^{-j74^\circ 10'} \text{ а}; \quad I_{2a} = 1,05e^{-j53^\circ 35'} \text{ а}; \quad I_{2b} = 0,62e^{-j60^\circ} \text{ а}.$$

5.40. В цепи рис. 5.32 каждая из трех катушек индуктивно связана с двумя другими. Вычислить все токи, если $Z_1 = r_1 + j\omega L_1 = (7 + j20) \text{ ом}$, $Z_2 = r_2 + j\omega L_2 = (6 + j16) \text{ ом}$, $Z_3 = j\left(\omega L_3 - \frac{1}{\omega C_3}\right) =$

Напряжение $U = 100$ в. Точкой отмечены одноименные зажимы каждой из катушек относительно двух других.

Решение. Составим уравнения по методу контурных токов:

$$\dot{I}_1(Z_1 + Z_3 - 2Z_{31}) + \dot{I}_2(-Z_3 + Z_{12} + Z_{31} - Z_{23}) = U;$$

$$\dot{I}_1(-Z_3 + Z_{12} + Z_{31} - Z_{23}) + \dot{I}_2(Z_2 + Z_3 + 2Z_{23}) = 0.$$

Решая их, найдем контурные токи, а затем и токи в ветвях:

$$\dot{I}_1 = \dot{I}_1 = 7,76e^{j40^\circ 45'} \text{ а}; \quad \dot{I}_2 = \dot{I}_2 = 5,3e^{-j120^\circ 50'} \text{ а};$$

$$\dot{I}_3 = \dot{I}_1 - \dot{I}_2 = 12,9e^{j48^\circ 10'} \text{ а}.$$

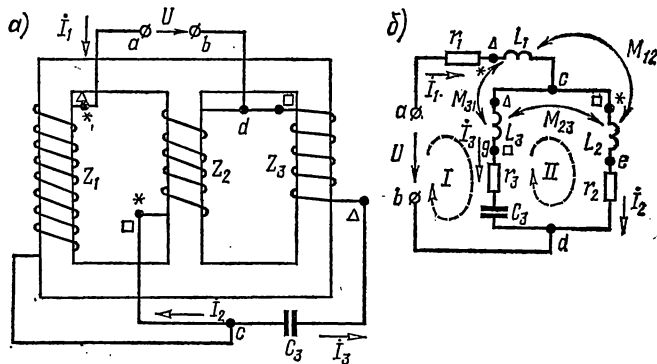


Рис. 5.33

5.41. В цепи схемы рис. 5.33, а каждая из трех катушек индуктивно связана с двумя другими. Сопротивление первой катушки $Z_1 = r_1 + j\omega L_1 = (5 + j15)$ ом, сопротивление второй катушки $Z_2 = r_2 + j\omega L_2 = (2 + j17)$ ом, а сопротивление третьей катушки и последовательно включенного с ней конденсатора C_3

$$Z_3 = r_3 + j\omega L_3 - j \frac{1}{\omega C_3} = 3 + j10 - j35 = (3 - j25) \text{ ом}.$$

Комплексные сопротивления между первой и второй катушками $Z_{12} = j7$ ом, между второй и третьей $Z_{23} = j4$ ом и между третьей и первой $Z_{31} = j5$ ом. Вычислить все токи, если к цепи приложено напряжение $U = 120$ в.

Решение. Пометим одноименные зажимы каждой пары индуктивно связанных цепей: звездочкой — одноименные зажимы катушек 1 и 2, квадратиками — одноименные зажимы 2 и 3 и треугольником — 1 и 3. Следует проследить за направлением намотки катушек, убедиться в правильности разметки одноименных зажимов. Далее начертить схему цепи (рис. 5.33, б) и выбрать положительные направления токов.

По законам Кирхгофа, для:

$$\text{контура I } \dot{I}_1 Z_1 + \dot{I}_3 Z_3 + \dot{I}_2 Z_{12} + \dot{I}_3 Z_{13} + \dot{I}_1 Z_{31} - \dot{I}_2 Z_{32} = U;$$

$$\text{контура II } \dot{I}_2 Z_2 + \dot{I}_1 Z_{21} - \dot{I}_3 Z_{23} - \dot{I}_3 Z_3 - \dot{I}_1 Z_{31} + \dot{I}_2 Z_{32} = 0;$$

$$\text{узла c } \dot{I}_1 = \dot{I}_2 + \dot{I}_3.$$

Совместное решение этой системы уравнений дает следующие значения токов:

$$\dot{I}_1 = 1,04e^{-j13^\circ 50'} \text{ а; } \dot{I}_2 = 4,82e^{-j96^\circ 25'} \text{ а; } \dot{I}_3 = 4,8e^{j71^\circ 20'} \text{ а.}$$

Б. Резонансы в связанных контурах *

5.42. Даны два индуктивно связанных колебательных контура (рис. 5.5), имеющих параметры: $r_1 = 15 \text{ ом}$, $L_1 = 250 \text{ мкГн}$, $r_2 = 100 \text{ ом}$, $L_2 = 300 \text{ мкГн}$, $C_2 = 1150 \text{ пф}$, коэффициент связи $k = 16,5\%$.

При какой емкости C_1 будет выполнено условие первого частного резонанса, если частота генератора $f = 600 \text{ кгц}$?

Чему при этом равны токи первичного и вторичного контуров, первичная и вторичная мощности и к.п.д., если $E_1 = 50 \text{ мв}$?

Р е ш е н и е. Вычислим:

$$\omega L_1 = 942 \text{ ом; } \omega L_2 = 1130 \text{ ом;}$$

$$\frac{1}{\omega C_2} = 230 \text{ ом;}$$

$$x_2 = \omega L_2 - \frac{1}{\omega C_2} = 900 \text{ ом; } z_2 = \sqrt{100^2 + 900^2} = 905 \text{ ом;}$$

$$x_{12} = \omega M = k\sqrt{\omega L_1 \omega L_2} = 170 \text{ ом;}$$

$$x_1 = -x_{вн1} = -\frac{x_{12}^2}{z_2^2} x_2 = \frac{170^2 \cdot 900}{905^2} = 31,8 \text{ ом.}$$

Так как

$$x_1 = \omega L_1 - \frac{1}{\omega C_1},$$

то

$$\frac{1}{\omega C_1} = \omega L_1 - x_1 = 942 - 31,8 \approx 910 \text{ ом, } C_1 = \frac{1}{2\pi \cdot 600 \cdot 10^3 \cdot 910} = 292 \text{ пф.}$$

Далее

$$r_{вн1} = \frac{x_{12}^2}{z_2^2} r_2 = \frac{170^2 \cdot 100}{905^2} = 3,53 \text{ ом.}$$

По формулам (5. 9) и (5. 12) находим токи, а по (5.30) — мощ-

* В данной теме рассматриваются высокодобротные контуры, имеющие важное практическое значение.

НОСТИ:

$$I_{1I\max} = \frac{E_1}{r_1 + r_{\text{вн1}}} = \frac{50}{15 + 3,53} = 2,7 \text{ ма};$$

$$I_{2I\max} = \frac{E_1 x_{12}}{z_2(r_1 + r_{\text{вн1}})} = \frac{50 \cdot 170}{905 \cdot 18,5} = 0,507 \text{ ма};$$

$$P_{1I\max} = I_{1I\max}^2 r_1 = (2,7 \cdot 10^{-3})^2 \cdot 15 = 110 \text{ мквт};$$

$$P_{2I\max} = I_{2I\max}^2 r_2 = (0,507 \cdot 10^{-3})^2 \cdot 100 = 25,8 \text{ мквт};$$

$$\eta = \frac{P_{2I\max}}{P_{1I\max} + P_{2I\max}} = \frac{25,8}{135,8} = 0,19.$$

5.43. В схеме рис. 5.5, параметры которой $r_1 = 15 \text{ ом}$, $L_1 = 250 \text{ мкГн}$, $r_2 = 100 \text{ ом}$, $L_2 = 300 \text{ мкГн}$, $C_2 = 1150 \text{ пф}$, путем настройки первого контура и изменением коэффициента связи k требуется обеспечить режим сложного резонанса при частоте генератора $f = 600 \text{ кГц}$. Чему при этом равны C_1 , M , первичный и вторичный токи, мощности каждого из контуров и к.п.д., если $E_1 = 50 \text{ мВ}$?

Решение. По данным задачи вычисляем:

$$\begin{aligned} \omega L_1 &= 942 \text{ ом}; \quad \omega L_2 = 1130 \text{ ом}; \quad \frac{1}{\omega C_2} = 230 \text{ ом}; \quad x_2 = \omega L_2 - \frac{1}{\omega C_2} = \\ &= 900 \text{ ом}; \quad z_2 = \sqrt{r_2^2 + x_2^2} = 905 \text{ ом}. \end{aligned}$$

По формуле (5. 15) находим оптимальное сопротивление связи:

$$x_{12\text{опт}}^1 = 905 \sqrt{\frac{15}{100}} = 350 \text{ ом}; \quad M = \frac{x_{12\text{опт}}^1}{\omega} = 93 \text{ мкГн}.$$

Далее из формулы (5. 11) определяем

$$x_1 = \left(\frac{x_{12\text{опт}}^1}{z_2} \right)^2 x_2 = \frac{350^2}{905^2} \cdot 900 = 135 \text{ ом};$$

и так как $x_1 = \omega L_1 - \frac{1}{\omega C_1}$, то $\frac{1}{\omega C_1} = \omega L_1 - x_1 = 807 \text{ ом}$, $C_1 = 330 \text{ пф}$.

Наконец, по формулам (5. 9), (5. 17) и (5. 30) определяем токи и мощности:

$$I_{1\max\max} = \frac{E_1}{r_1 + r_{\text{вн1}}} = \frac{50}{15 + 15} = 1,67 \text{ ма};$$

$$I_{2\max\max} = \frac{E_1}{2\sqrt{r_1 r_2}} = \frac{50}{2\sqrt{15 \cdot 100}} = 0,645 \text{ ма};$$

$$P_{1\max\max} = (1,67 \cdot 10^{-3})^2 \cdot 15 = 42 \text{ мквт};$$

$$P_{2\max\max} = (0,645 \cdot 10^{-3})^2 \cdot 100 = 42 \text{ мквт}, \quad \eta = \frac{42}{42 + 42} = 0,5.$$

5.44. Для индуктивно связанных контуров, параметры которых $r_1 = 15 \text{ ом}$, $L_1 = 250 \text{ мкГн}$, $r_2 = 100 \text{ ом}$ и $L_2 = 300 \text{ мкГн}$, требуется осуществить режим полного резонанса настройкой первого и второго контуров и подбором оптимальной связи при частоте $f = 600 \text{ кГц}$. Определить C_1 , C_2 , $x_{12\text{опт}}$. Чему равны токи $I_{1\text{max max}}$, $I_{2\text{max max}}$ и мощности $P_{1\text{max max}}$, $P_{2\text{max max}}$ и к.п.д., если $E_1 = 50 \text{ мВ}$?

Решение. При полном резонансе реактивное сопротивление каждого из контуров равно нулю [см. формулу (5.18)], отсюда

$$C_1 = \frac{1}{\omega^2 L_1} = 281 \text{ пф}; \quad C_2 = \frac{1}{\omega^2 L_2} = 234 \text{ пф}.$$

Оптимальное сопротивление связи по формуле (5.19)

$$x_{12\text{опт}} = \sqrt{r_1 r_2} = \sqrt{15 \cdot 100} = 38,7 \text{ ом}.$$

Искомые токи и мощности:

$$I_{1\text{max max}} = \frac{E_1}{2r_1} = 1,67 \text{ ма}; \quad I_{2\text{max max}} = \frac{E}{2\sqrt{r_1 r_2}} = 0,645 \text{ ма};$$

$$P_{1\text{max max}} = I_{1\text{max max}}^2 r_1 = 42 \text{ мкВт}; \quad P_{2\text{max max}} = I_{2\text{max max}}^2 r_2 = 42 \text{ мкВт};$$

$$\eta = \frac{P_{1\text{max max}}}{P_{1\text{max max}} + P_{2\text{max max}}} = 0,5.$$

5.45. Задана система из двух индуктивно связанных контуров (см. рис. 5.5) с параметрами: $r_1 = 12 \text{ ом}$, $L_1 = 400 \text{ мкГн}$, $C_1 = 333 \text{ пф}$, $r_2 = 16 \text{ ом}$, $L_2 = 500 \text{ мкГн}$ и $M = 60 \text{ мкГн}$.

Рассчитать емкость C_2 второго контура так, чтобы при $\omega = 3 \cdot 10^6 \text{ рад/сек}$ было выполнено условие второго частного резонанса. Чему при этом равны $P_{1\text{max}}$, $P_{2\text{max}}$ и η , если $E_1 = 20 \text{ в}$?

5.46. Для двух индуктивно связанных контуров, параметры которых даны в задаче 5.45, определить C_2 и $M_{\text{опт}}$, соответствующие режиму сложного резонанса. Вычислить при этом режиме $P_{1\text{max}}$, $P_{2\text{max}}$ и η , если $E_1 = 20 \text{ в}$, $\omega = 3 \cdot 10^6 \text{ рад/сек}$.

5.47. Параметры двух индуктивно связанных контуров: $r_1 = 12 \text{ ом}$, $L_1 = 400 \text{ мкГн}$, $r_2 = 16 \text{ ом}$ и $L_2 = 500 \text{ мкГн}$. Рассчитать C_1 и C_2 и $M_{\text{опт}}$ при которых будет режим полного резонанса. Определить $P_{1\text{max}}$, $P_{2\text{max}}$ и η , если $E_1 = 20 \text{ в}$, $\omega = 3 \cdot 10^6 \text{ рад/сек}$.

5.48. Антенный контур I (рис. 5.34) индуктивно связан с входным контуром II усилителя. Оба контура настроены в резонанс на частоту

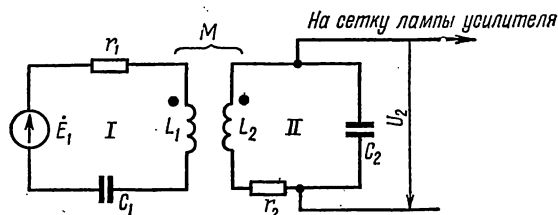


Рис. 5.34

принимаемого сигнала $\omega = 2,5 \cdot 10^6$ рад/сек. В антенном контуре наводится э.д.с. E_1 , равная 100 мкв. Даны: $r_1 = 10$ ом, $L_1 = 200$ мкгн, $r_2 = 20$ ом, $L_2 = 400$ мкгн, коэффициент связи $k = 0,03$.

Считая входное сопротивление усилителя бесконечным, определить: емкости C_1 и C_2 ; добротности Q_1 и Q_2 каждого контура; взаимную индуктивность M , ток во втором контуре I_2 и напряжение на сетке входной лампы при частоте ω_0 ; частоты связи ω_1 и ω_{11} ток I_2 и напряжение на сетке лампы при этих частотах; полосу пропускания индуктивно связанных контуров и сравнить ее с полосой пропускания каждого контура в отдельности.

Р е ш е н и е. По условию имеем

$$\omega_{01} = \frac{1}{\sqrt{L_1 C_1}} = \omega_{02} = \frac{1}{\sqrt{L_2 C_2}} = \omega_0 = 2,5 \cdot 10^6 \text{ сек}^{-1},$$

отсюда $C_1 = 800$ пф; $C_2 = 400$ пф;

$$Q_1 = \frac{\sqrt{\frac{L_1}{C_1}}}{r_1} = 50; \quad Q_2 = \frac{\sqrt{\frac{L_2}{C_2}}}{r_2} = 50,$$

т. е. добротности контуров одинаковы.

Взаимная индуктивность

$$M = k\sqrt{L_1 L_2} = 0,03\sqrt{200 \cdot 10^{-6} \cdot 400 \cdot 10^{-6}} \approx 8,5 \text{ мкгн.}$$

При $\omega = \omega_{01} = \omega_{02}$ расстройка $\xi = 0$, тогда из (5. 22а) и (5. 23а), учитывая, что фактор связи $A = \frac{x_{12}}{\sqrt{r_1 r_2}} = \frac{\omega M}{\sqrt{r_1 r_2}} = 1,5$,

найдем:

$$I_2 = \frac{E_1 A}{\sqrt{r_1 r_2} \sqrt{(A^2 + 1)^2}} = 3,27 \text{ мка};$$

$$U_2 = E_1 k_C = 3,27 \text{ мв.}$$

Частоты связи находим по формуле (5. 25), учитывая, что $d = 1/Q = 0,02$ (в расчетах использовано приближенное соотношение при $\alpha \ll 1$: $\frac{1}{\sqrt{1 \pm \alpha}} = 1 \mp \alpha/2$):

$$\omega_1 = \frac{2,5 \cdot 10^6}{\sqrt{1 + \sqrt{0,03^2 - 0,02^2}}} = \frac{2,5 \cdot 10^6}{\sqrt{1 + 2,24 \cdot 10^{-2}}} = (2,5 \cdot 10^6 - 2,8 \cdot 10^4) \text{ сек}^{-1};$$

$$\Delta\omega_1 = -2,8 \cdot 10^4 \text{ сек}^{-1};$$

$$\omega_{11} = \frac{2,5 \cdot 10^6}{\sqrt{1 - \sqrt{0,03^2 - 0,02^2}}} = (2,5 \cdot 10^6 + 2,8 \cdot 10^4) \text{ сек}^{-1};$$

$$\Delta\omega_{11} = 2,8 \cdot 10^4 \text{ сек}^{-1}.$$

Обобщенная расстройка ξ контуров при этих частотах

$$\xi_{11} = -\xi_1 = 2Q \frac{\Delta\omega_{11}}{\omega_0} = 2 \cdot 50 \cdot \frac{2,8 \cdot 10^4}{2,5 \cdot 10^6} = 1,12.$$

По (5.22а) и (5.23а) ток и напряжение при частотах связи:

$$I_2 = \frac{EA}{\sqrt{r_1 r_2} \sqrt{(A^2 + 1 - \xi_{11}^2)^2 + 4\xi_{11}^2}} = 3,54 \text{ мка};$$

$$U_2 = E_1 k_C(\omega_{11}) = 3,54 \text{ мв.}$$

Относительная полоса пропускания S_0 для связи, большей критической ($k > d$), вычисляется по формуле (5.28):

$$S_0 = 0,02 \sqrt{\left(\frac{0,03}{0,02}\right)^2 - 1 + 2\frac{0,03}{0,02}} = 4,12 \cdot 10^{-2}.$$

Она значительно превосходит относительную полосу пропускания S'_0 одиночного контура:

$$S'_0 = d = 2 \cdot 10^{-2}.$$

5.49. Решить предыдущую задачу, если коэффициент связи уменьшен до критического значения $k_{кр}$.

5.50. Два одинаковых индуктивно связанных контура, параметры которых $L_1 = L_2 = 250 \text{ мкГн}$, $r_1 = r_2 = 10 \text{ ом}$, настроены порознь на одну и ту же частоту $f_0 = 5 \cdot 10^5 \text{ Гц}$.

Определить: 1) полосу пропускания каждого контура; 2) полосу пропускания индуктивно связанных контуров при критической связи; 3) максимальную полосу пропускания двух связанных контуров; 4) при каких коэффициентах связи полоса пропускания двух связанных контуров будет: а) в $\sqrt{2}$ меньше, б) в 1,2 раза больше и в) в 2 раза больше по сравнению с полосой пропускания одиночного контура.

Р е ш е н и е. Относительная полоса пропускания одиночного контура определяется затуханием контура [см. формулу (4.17)]:

$$S_0 = d = \frac{r}{\omega_0 L} = \frac{10}{2\pi \cdot 5 \cdot 10^5 \cdot 250 \cdot 10^{-6}} = 0,0127,$$

тогда абсолютная полоса пропускания каждого контура

$$S_a = f_0 S_0 = 5 \cdot 10^5 \cdot 12,7 \cdot 10^{-3} = 6350 \text{ Гц.}$$

Относительная полоса пропускания двух индуктивно связанных контуров при критической связи рассчитывается по формуле (5.27):

$$S_{0кр} = \sqrt{2} d = 1,41 \cdot 0,0127 = 0,018.$$

При этом абсолютная полоса пропускания

$$S_{aкр} = f_0 S_{0кр} = 5 \cdot 10^5 \cdot 18 \cdot 10^{-3} = 9000 \text{ Гц.}$$

Максимальная полоса пропускания двух индуктивно связанных контуров (см. формулу (5.29)):

$$S_{o \max} = 3,1 d = 3,1 \cdot 0,0127 = 0,0394;$$

$$S_{a \max} = f_0 S_{o \max} = 5 \cdot 10^5 \cdot 39,4 \cdot 10^{-3} = 19700 \text{ гц}.$$

Для ответа на вопросы п.4а и 4б данной задачи, условия которых соответствуют полосе пропускания при связи ниже критической, для которой $S_{o \text{кр}} = 1,41 d$, нужно воспользоваться формулой (5.26):

$$\text{а) } S_o = d \sqrt{\left(\frac{k}{d}\right)^2 - 1 + \sqrt{2 \left[1 + \left(\frac{k}{d}\right)^4\right]}} = \frac{1}{\sqrt{2}} d,$$

или

$$\left(\frac{k}{d}\right)^2 - 1 + \sqrt{2 \left[1 + \left(\frac{k}{d}\right)^4\right]} = 0,5.$$

Решая последнее уравнение относительно k , найдем $k = 3,6 \cdot 10^{-3}$.

$$\text{б) } S_o = d \sqrt{\left(\frac{k}{d}\right)^2 - 1 + \sqrt{2 \left[1 + \left(\frac{k}{d}\right)^4\right]}} = 1,2 d,$$

или

$$\left(\frac{k}{d}\right)^2 = 1 + \sqrt{2 \left[1 + \left(\frac{k}{d}\right)^4\right]} = 1,44.$$

Решая это уравнение относительно k , найдем $k = 10,6 \cdot 10^{-3}$.

в) Для ответа на вопрос п.4в нужно воспользоваться формулой (5.28):

$$S_o = d \sqrt{\left(\frac{k}{d}\right)^2 - 1 + 2 \frac{k}{d}} = 2d,$$

или

$$\left(\frac{k}{d}\right)^2 - 1 + 2 \frac{k}{d} = 4.$$

Решая последнее уравнение, найдем $k = 18,4 \cdot 10^{-3}$.

5.51. Полосовой фильтр состоит из двух одинаковых контуров, связанных индуктивно (см. рис. 5.5).

Параметры контуров: $L_1 = L_2 = 400 \text{ мкГн}$, $C_1 = C_2 = 100 \text{ пф}$, $r_1 = r_2 = 10 \text{ ом}$. Определить наибольшую полосу пропускания фильтра и коэффициент связи, при котором эта полоса обеспечивается. Найти взаимную индуктивность контуров фильтра.

5.52. Система из двух одинаковых индуктивно связанных контуров, настроенных в отдельности на частоту $\omega_0 = 10^6 \text{ сек}^{-1}$, имеет абсолютную полосу пропускания $S_a = 5,38 \cdot 10^3 \text{ гц}$ и взаимную индуктивность $M = 340 \text{ мкГн}$ (см. рис. 5.5). Определить, какова связь между

контурами (слабая, сильная или критическая) при $d = 0,024$ и $d = 0,03$. Найти коэффициент связи, индуктивность и активное сопротивление контуров для этих двух значений d .

Решение. Относительная полоса пропускания

$$S_0 = \frac{S_a}{f_0} = \frac{S_a 2\pi}{\omega_0} = \frac{5,38 \cdot 10^8 \cdot 2\pi}{10^6} = 33,8 \cdot 10^3.$$

Для того чтобы определить, какова связь между контурами, сравним S_0 и d :

$$\frac{S_0}{d} = \frac{0,0338}{0,024} = 1,41 \text{ или } S_0 = 1,41 d,$$

что согласно формуле (5.27) соответствует критической связи. При этом $k = d = 0,024$.

Вычислим индуктивности контуров при $L_1 = L_2 = L$.

Из выражения $k = \frac{M}{\sqrt{L_1 L_2}} = \frac{M}{L}$ находим

$$L = \frac{M}{k} = \frac{340 \cdot 10^{-6}}{0,024} = 14,2 \cdot 10^{-3} \text{ гн} = 14,2 \text{ мгн.}$$

Активные сопротивления контуров

$$r = d\omega_0 L = 0,024 \cdot 10^6 \cdot 14,2 \cdot 10^{-3} = 340 \text{ ом.}$$

Для случая $d = 0,03$ соотношение

$$\frac{S_0}{d} = \frac{0,0388}{0,03} = 1,28.$$

т. е. $S_0 = 1,28d$, что соответствует слабой связи.

Для определения k воспользуемся формулой (5.26), откуда $k/d = 0,78$.

$$k = 0,78d = 0,78 \cdot 0,03 = 23,4 \cdot 10^{-3}.$$

Рассчитаем индуктивности контуров. Из выражения $k = \frac{M}{L}$ на-

ходим

$$L = M/k = \frac{340 \cdot 10^{-6}}{23,4 \cdot 10^{-3}} = 14,5 \text{ мгн.}$$

Активные сопротивления контуров

$$r = d\omega_0 L = 0,03 \cdot 10^6 \cdot 14,5 \cdot 10^{-3} = 435 \text{ ом.}$$

5.53. Параметры двух одинаковых индуктивно связанных контуров: $L_1 = L_2 = L = 0,8 \text{ мгн}$, $C_1 = C_2 = C = 750 \text{ пф}$, $r_1 = r_2 = r = 30 \text{ ом}$, $M = 50 \text{ мкгн}$, Э.д.с. $E = 120 \text{ в}$. Построить резонансную кривую тока во втором контуре при изменении угловой частоты от $0,9 \omega_0$ до $1,1 \omega_0$, где ω_0 — резонансная частота каждого из контуров. Определить частоты связи и полосу пропускания.

Решение. Определим, какова связь между контурами. Для этого вычислим ω_0 , d и k и последние величины сравним между собой:

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} = 1,29 \cdot 10^6 \text{ сек}^{-1};$$

$$k = \frac{M}{L} = 6,25 \cdot 10^{-2};$$

$$d = \frac{r}{\omega_0 L} = 2,9 \cdot 10^{-2}.$$

Отсюда видно, что $k > d$, следовательно, связь сильная и кривая имеет два горба.

В дальнейших расчетах необходимо знать величину добротности Q . Вычислим ее:

$$Q = \frac{\sqrt{L/C}}{r} = \frac{\sqrt{\frac{0,8 \cdot 10^{-8}}{750 \cdot 10^{-12}}}}{30} = 34,4.$$

Таблица 5.1

ω	$\omega 10^{-6}$, сек $^{-1}$	ξ	A	$A^2+1-\xi^2$	$\sqrt{(A^2+1-\xi^2)^2+4\xi^2}$	I_1, a	$I_2/I_{2\max}$ max
0,9 ω_0	1,161	-6,9	1,94	-43	45	0,172	0,086
0,92 ω_0	1,187	-5,5	1,98	-25,3	27,6	0,287	0,143
0,94 ω_0	1,212	-4,13	2,02	-12	14,6	0,552	0,276
0,96 ω_0	1,238	-2,75	2,06	-2,3	5,95	1,382	0,691
ω_I	1,255	-1,87	2,09	1,86	4,18	2,0	1,0
0,98 ω_0	1,264	-1,37	2,11	3,58	4,5	1,87	0,935
ω_0	1,29	0	2,15	5,62	5,62	1,54	0,77
1,02 ω_0	1,316	1,37	2,19	3,92	4,77	1,84	0,92
ω_{II}	1,327	1,97	2,22	2,04	4,44	2,0	1,0
1,04 ω_0	1,342	2,75	2,24	-1,55	5,7	1,572	0,786
1,06 ω_0	1,367	4,13	2,28	-10,9	13,7	0,667	0,333
1,08 ω_0	1,393	5,5	2,32	-23,82	26,3	0,352	0,176
1,1 ω_0	1,419	6,9	2,37	-41	43,2	0,22	0,11

По результатам табл. 5.1 строим кривую рис. 5.35.

Для построения кривой задаемся различными значениями ω , находим соответствующие им величины A и ξ , входящие в формулу (5.22а). Результаты расчетов для удобства сведены в табл. 5.1, в которой $\xi = 2Q \frac{\Delta\omega}{\omega_0}$. При выборе точек кривой в табл. 5.1 включены резонансная частота ω_0 и частоты связи ω_I и ω_{II} , которые определяются по формулам (5.25):

$$\omega_I = \frac{\omega_0}{\sqrt{1 + \sqrt{k^2 - k_{кр}^2}}} = \frac{1,29 \cdot 10^6}{\sqrt{1 + 0,0556}} = 1,255 \cdot 10^6 \text{ сек}^{-1};$$

$$\omega_{11} = \frac{\omega_0}{\sqrt{1 - \sqrt{k^2 - k_{кр}^2}}} = \frac{1,29 \cdot 10^6}{\sqrt{1 - 0,0556}} = 1,327 \cdot 10^6 \text{ сек}^{-1}.$$

Значение тока I_2 при частотах связи определяем по формуле (5.17):

$$I_{2 \max \max} = \frac{E}{2 \sqrt{r_1 r_2}} = \frac{E}{2r} = \frac{120}{2 \cdot 30} = 2a.$$

Для определения полосы пропускания проводим на графике прямую $\frac{I_2}{I_{2 \max \max}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0,707$, которая определит границы полосы пропускания. Из рис. 5.35 находим граничные частоты:

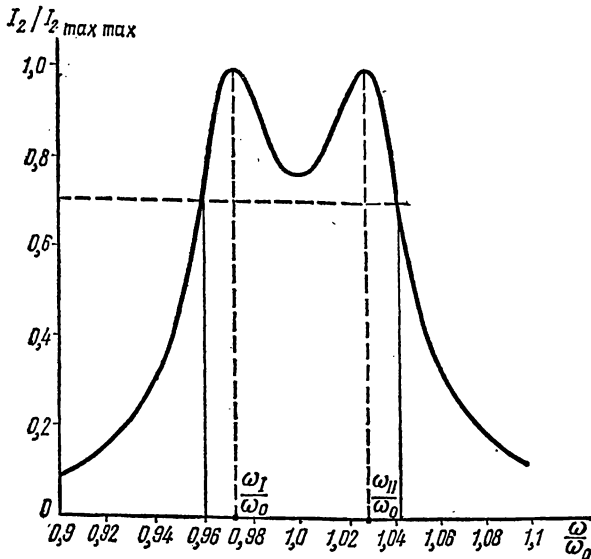


Рис. 5.35

$$\omega_1 = 1,238 \cdot 10^6 \text{ сек}^{-1} \text{ и } \omega_2 = 1,344 \cdot 10^6 \text{ сек}^{-1},$$

а абсолютная полоса пропускания

$$S_a = \omega_2 - \omega_1 = 0,106 \cdot 10^6 \text{ сек}^{-1}.$$

Та же полоса может быть вычислена и аналитически по формуле (5.28)

$$S_a = \omega_0 S_0 = \omega_0 d \sqrt{\left(\frac{k}{d}\right)^2 - 1 + 2\left(\frac{k}{d}\right)^2} = 0,106 \cdot 10^6 \text{ сек}^{-1}.$$

5.54. Два индуктивно связанных контура имеют параметры: $L_1 = 400 \text{ мкГн}$, $C_1 = 500 \text{ пФ}$, $r_1 = 20 \text{ Ом}$, $L_2 = 360 \text{ мкГн}$, $C_2 = 580 \text{ пФ}$, $r_2 = 15 \text{ Ом}$, $M = 40 \text{ мкГн}$.

Амплитуда э.д.с. генератора $E_{1m} = 100$ в, его угловая частота $\omega = 2 \cdot 10^6$ сек⁻¹. Определить мощности P_1 и P_2 , расходуемые в первом и втором контурах, найти к.п.д. при заданной связи.

Определить оптимальную связь, токи в первом и втором контурах, а также значение максимально возможной мощности и к.п.д. во втором контуре при полном резонансе.

Р е ш е н и е. Реактивные сопротивления каждого контура:

$$x_1 = \omega L_1 - \frac{1}{\omega C_1} = -200 \text{ ом}; \quad x_2 = \omega L_2 - \frac{1}{\omega C_2} = -140 \text{ ом}.$$

Эквивалентные активное и реактивное сопротивления соответственно равны:

$$r_{19} = r_1 + r_{вн} = r_1 + \frac{(\omega M)^2}{z_2^2} r_2 = 20 + \frac{(2 \cdot 10^6 \cdot 40 \cdot 10^{-6})^2 \cdot 15}{15^2 + 140^2} = 24,8 \text{ ом};$$

$$x_{19} = x_1 + x_{вн1} = x_1 - \frac{(\omega M)^2}{z_2^2} x_2 = -200 + \frac{(2 \cdot 10^6 \cdot 40 \cdot 10^{-6})^2 \cdot 140}{15^2 + 140^2} = -155 \text{ ом}.$$

Мощность, расходуемая в первом контуре,

$$P_1 = \frac{1}{2} I_{1m}^2 r_1 = \frac{1}{2} \left(\frac{E_{1m}}{z_{19}} \right)^2 r_1 = \frac{1}{2} 0,636^2 \cdot 20 = 4,05 \text{ вт},$$

где

$$z_{19} = |Z_{19}| = |r_{19} + jx_{19}| = |24,8 - j155| = 157 \text{ ом},$$

$$I_{1m} = \frac{E_{1m}}{z_{19}} = 0,636 \text{ а}.$$

Мощность, расходуемая во втором контуре,

$$P_2 = \frac{1}{2} I_{2m}^2 r_2 = \frac{1}{2} I_{1m}^2 r_{вн1} = \frac{1}{2} 0,636^2 \cdot 4,8 = 0,973 \text{ вт},$$

где

$$r_{вн1} = \frac{(\omega M)^2}{z_2^2} r_2 = 4,8 \text{ ом}.$$

К. п. д.

$$\eta = \frac{P_2}{P_1 + P_2} = 0,194 = 19,4 \text{ \%}.$$

Оптимальную связь определим по формуле (5.19):

$$M_{\text{опт}} = \frac{x_{12 \text{ опт}}}{\omega} = \frac{\sqrt{r_1 r_2}}{\omega} = \frac{\sqrt{20 \cdot 15}}{2 \cdot 10^6} = 8,65 \cdot 10^{-6} = 8,65 \text{ мквн}.$$

При оптимальной связи $x_{19} = 0$, тогда

$$z_{19} = r_{19} = r_1 + r_{вн1} = r_1 + \frac{\omega^2 M_{\text{опт}}^2}{r_2} = 2r_1 = 40 \text{ ом}.$$

Токи в контурах:

$$I_{1m \max \max} = \frac{E_{1m}}{2r_1} = 2,5 \text{ а};$$

$$I_{2m \max \max} = \frac{I_{1m \max \max} \omega M_{\text{опт}}}{r_2} = \frac{I_{1m \max \max} \sqrt{r_1 r_2}}{r_2} = 2,16 \text{ а}.$$

Значение максимально возможной мощности определяется из формулы (5.34):

$$P_{2 \max \max} = P_{1 \max \max} = \frac{E_{1m}^2}{8r_1} = 62,5 \text{ вт}, \quad \eta = 0,5 = 50\%.$$

5.55. Пользуясь данными задачи 5.54, определить P_2 и к.п.д., если взаимная индуктивность $M = 10 \text{ мкГн}$, при условии, что оба контура в отдельности настроены в резонанс с частотой генератора.

5.56. В схеме рис. 5.5 известны параметры $L_1 = 350 \text{ мкГн}$, $C_1 = 250 \text{ пф}$, $r_1 = 10 \text{ ом}$, $L_2 = 365 \text{ мкГн}$, $r_2 = 8 \text{ ом}$. Амплитуда э.д.с. генератора равна 200 в . Оба контура в отдельности настроены в резонанс на одну и ту же частоту f_0 .

При каком значении коэффициента связи к.п.д. схемы равен 75% ? Чему при этом равна мощность второго контура P_2 ? На сколько эта мощность меньше максимальной?

Решение. Резонансная частота и затухание каждого из контуров:

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{L_1 C_1}} = 3,4 \cdot 10^6 \text{ сек}^{-1};$$

$$d_1 = \frac{r_1}{\omega_0 L_1} = 0,0084; \quad d_2 = \frac{r_2}{\omega_0 L_2} = 0,00645.$$

Из формулы (5.33) найдем k при $\eta = 75\%$:

$$k = \sqrt{\frac{\eta d_1 d_2}{1 - \eta}} = \sqrt{\frac{0,75 \cdot 8 \cdot 4 \cdot 6,45 \cdot 10^{-6}}{1 - 0,75}} = 0,0128,$$

Взаимная индуктивность

$$M = k \sqrt{L_1 L_2} = 0,0128 \sqrt{350 \cdot 10^{-6} \cdot 365 \cdot 10^{-6}} = 4,58 \text{ мкГн}.$$

Эквивалентное сопротивление:

$$Z_{1\text{э}} = r_{1\text{э}} = r_1 + \frac{(\omega M)^2}{r_2} = 10 + \frac{3,4^2 \cdot 10^{12} \cdot 4,58^2 \cdot 10^{-12}}{8} = 40 \text{ ом}.$$

$$P_1 = \frac{1}{2} I_{1m}^2 r_1 = \frac{1}{2} \left(\frac{E_m}{r_{1\text{э}}} \right)^2 r_1 = \frac{1}{2} \left(\frac{200}{40} \right)^2 10 = 125 \text{ вт}.$$

Из формулы (5.31)

$$P_2 = \frac{\eta P_1}{1 - \eta} = \frac{0,75 \cdot 125}{1 - 0,75} = 375 \text{ вт}.$$

Значение $P_{2 \max \max} = \frac{E_{1m}^2}{8r_1} = \frac{200^2}{8 \cdot 10} = 500 \text{ вт}.$

Глава шестая

ТРЕХФАЗНЫЕ ЦЕПИ

ОСНОВНЫЕ ПОЛОЖЕНИЯ И СООТНОШЕНИЯ

1. Мгновенные значения и комплексы трехфазной симметричной системы напряжений имеют вид:

$$\left. \begin{aligned} u_A &= U_m \sin \omega t; & \dot{U}_A &= U; \\ u_B &= U_m \sin \left(\omega t - \frac{2\pi}{3} \right); & \dot{U}_B &= U e^{-j\frac{2\pi}{3}}; \\ u_C &= U_m \sin \left(\omega t - \frac{4\pi}{3} \right); & \dot{U}_C &= U e^{-j\frac{4\pi}{3}} \end{aligned} \right\} \quad (6.1)$$

2. Соотношения в симметричной трехфазной цепи. В симметричной трехфазной цепи комплексные сопротивления составляющих ее фаз одинаковы.

Для симметричной трехфазной системы при соединении звездой существуют следующие зависимости между линейными и фазными напряжениями и токами:

$$U_l = \sqrt{3} U_\phi; \quad I_l = I_\phi. \quad (6.2)$$

Для симметричной трехфазной системы при соединении треугольником линейные и фазные напряжения и токи связаны соотношениями:

$$U_l = U_\phi; \quad I_l = \sqrt{3} I_\phi. \quad (6.3)$$

Мощность в симметричной трехфазной системе

$$P = \sqrt{3} U_l I_l \cos \varphi_\phi = 3 U_\phi I_\phi \cos \varphi_\phi. \quad (6.4)$$

3. Расчеты несимметричных трехфазных цепей могут быть проведены с помощью законов Кирхгофа или любого метода расчета электрических цепей.

Если к трехфазному генератору, соединенному звездой, подключен приемник энергии, также соединенный звездой, то смещение нейтрали — напряжение \dot{U}_N между нейтральными (нулевыми) точками приемника и генератора — определяется по формуле

$$\dot{U}_N = \frac{\dot{U}_A Y_A + \dot{U}_B Y_B + \dot{U}_C Y_C}{Y_A + Y_B + Y_C + Y_N}, \quad (6.5)$$

где $\dot{U}_A, \dot{U}_B, \dot{U}_C$ — фазные напряжения генератора;
 Y_A, Y_B, Y_C, Y_N — проводимости отдельных фаз и нейтрального (нулевого) провода.

Токи в фазах и нейтральном проводе:

$$\left. \begin{aligned} i_A &= (\dot{U}_A - \dot{U}_N) Y_A; & i_B &= (\dot{U}_B - \dot{U}_N) Y_B; \\ i_C &= (\dot{U}_C - \dot{U}_N) Y_C; & i_N &= \dot{U}_N Y_N = i_A + i_B + i_C. \end{aligned} \right\} (6.6)$$

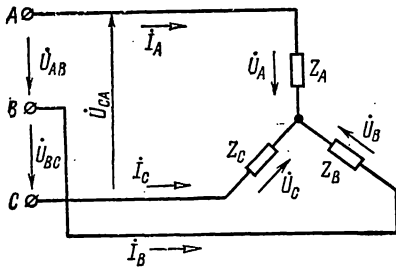


Рис. 6.1

Если нагрузка соединена звездой без нейтрального (нулевого) провода и известны линейные напряжения $\dot{U}_{AB}, \dot{U}_{BC}, \dot{U}_{CA}$, то фазные напряжения $\dot{U}_A, \dot{U}_B, \dot{U}_C$ (рис. 6.1) нагрузки находятся по формулам:

$$\left. \begin{aligned} \dot{U}_A &= \frac{\dot{U}_{AB} Y_B - \dot{U}_{CA} Y_C}{Y_A + Y_B + Y_C}; \\ \dot{U}_B &= \frac{\dot{U}_{BC} Y_C - \dot{U}_{AB} Y_A}{Y_A + Y_B + Y_C}; \\ \dot{U}_C &= \frac{\dot{U}_{CA} Y_A - \dot{U}_{BC} Y_B}{Y_A + Y_B + Y_C}. \end{aligned} \right\} (6.7)$$

где Y_A, Y_B и Y_C — проводимости фаз.

Для любой трехфазной системы сумма комплексных линейных напряжений равна нулю:

$$\dot{U}_{AB} + \dot{U}_{BC} + \dot{U}_{CA} = 0. \quad (6.8)$$

УПРАЖНЕНИЯ И ЗАДАЧИ

А. Симметричная нагрузка и режимы, возникающие при обрывах проводов

6.1. К симметричному трехфазному генератору с фазной э.д.с. $E = 127$ в и внутренним сопротивлением $Z_0 = (0,3 + j0,9)$ ом через линию, сопротивление каждого провода которой $Z_{пр} = (0,5 + j1)$ ом, подключена симметричная нагрузка $Z = (10 + j6)$ ом, соединенная звездой (рис. 6.2, а). Определить ток в каждой фазе, фазное и линейное напряжения генератора, ток, фазное и линейное напряжения

нагрузки, мощность, доставляемую генератором и расходуемую в нагрузке. Построить векторную диаграмму.

Решение. Ввиду полной симметрии системы напряжение между нулевыми точками генератора и нагрузки равно нулю. Каждую фазу можно рассматривать независимо от других фаз. Так, например,

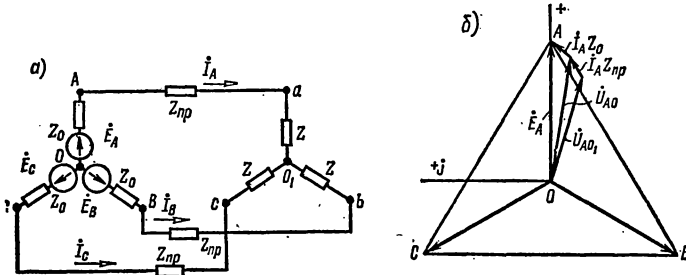


Рис. 6.2

ток в фазе A находится на основании закона Ома (полагаем $\dot{E}_A = 127 \text{ в}$):

$$\dot{I}_A = \frac{E}{Z_0 + Z_{\text{лп}} + Z} = \frac{127}{10,8 + j7,9} = 9,5 e^{-j36^\circ 10'} \text{ а}$$

Фазные напряжения на зажимах генератора и нагрузки

$$\dot{U}_{AO} = \dot{E}_A - \dot{I}_A Z_0 = 127 - 9,5 e^{-j36^\circ 10'} \cdot (0,3 + j0,9) = 119,7 e^{-j2^\circ 30'} \text{ в};$$

$$\dot{U}_{aO_1} = \dot{I}_A Z = 9,5 e^{-j36^\circ 10'} \cdot (10 + j6) = 111 e^{-j5^\circ 10'} \text{ в.}$$

Такие же напряжения в других фазах сдвинуты соответственно на 120° и 240° :

$$\dot{U}_{BO} = 119,7 e^{-j122^\circ 10'} \text{ в}; \quad \dot{U}_{CO} = 119,7 e^{-j242^\circ 30'} \text{ в};$$

$$\dot{U}_{bO_1} = 111 e^{-j125^\circ 10'} \text{ в}; \quad \dot{U}_{cO_1} = 111 e^{-j245^\circ 10'} \text{ в.}$$

Линейные напряжения на зажимах генератора и нагрузки

$$\dot{U}_{AB} = \dot{U}_{AO} - \dot{U}_{BO} = 119,7 e^{-j2^\circ 30'} - 119,7 e^{-j122^\circ 30'} = 208 e^{j27^\circ 30'} \text{ в.}$$

$$\dot{U}_{ab} = \dot{U}_{aO_1} - \dot{U}_{bO_1} = 111 e^{-j5^\circ 10'} - 111 e^{-j125^\circ 10'} = 192 e^{j24^\circ 50'} \text{ в.}$$

Мощность, доставляемая генератором,

$$P_r = 3 \cdot 127 \cdot 9,5 \cos 36^\circ 10' = 2920 \text{ вт.}$$

Мощность в нагрузке $P_n = 3 \cdot 9,5^2 \cdot 10 = 2710 \text{ вт.}$

Векторная диаграмма построена на рис. 6.2, б.

6.2. В трехфазную симметричную сеть, линейное напряжение которой $U_{\text{л}} = 220 \text{ в}$, включены звездой три одинаковых сопротивления $Z_A = Z_B = Z_C = Z_{\phi} = (10 + j10) \text{ ом}$. Определить токи в каждой фазе нагрузки, фазные напряжения и мощность, расходуемую в трехфазной нагрузке.

6.3. Приемник энергии, сопротивления фаз которого одинаковы, потребляет мощность $5,46 \text{ квт}$ при $\cos \varphi_{\phi} = 0,8$ ($\varphi_{\phi} > 0$). Линей-

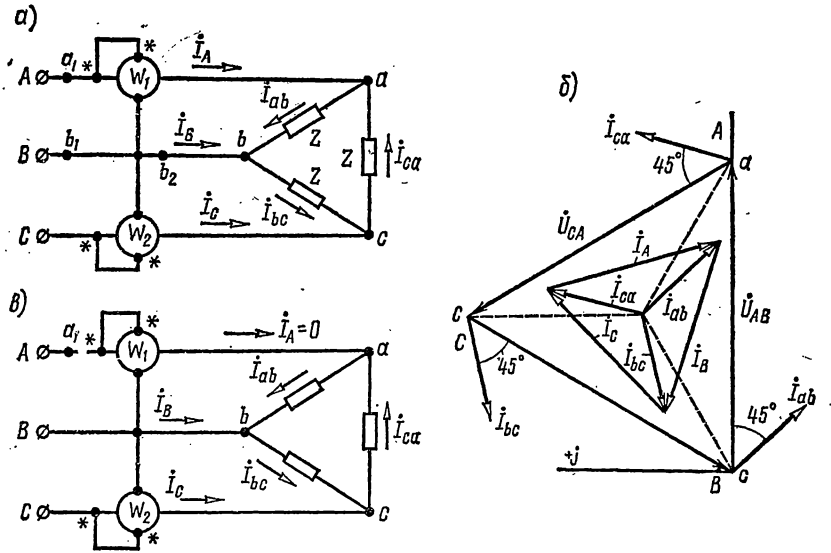


Рис. 6.3

ное напряжение на нагрузке равно 370 в . Чему равна фазная э.д.с. генератора, соединенного звездой, внутреннее сопротивление каждой фазы которого $Z_0 = (0,3 + j0,9) \text{ ом}$, а сопротивление каждого провода линии $Z_{\text{пр}} = (0,4 + j0,8) \text{ ом}$?

6.4. Сопротивления отдельных фаз симметричной нагрузки, соединенной звездой, равны $Z_a = Z_b = Z_c = (20 + j15) \text{ ом}$.

К симметричному генератору с фазной э.д.с. $E_{\phi} = 4500 \text{ в}$ и внутренним сопротивлением каждой фазы $Z_{\phi} = (0,5 + j2) \text{ ом}$ через линию, сопротивление каждого провода которой $Z_{\text{пр}} = (0,5 + j1) \text{ ом}$, подключена указанная нагрузка.

Определить токи каждой фазы генератора и нагрузки, фазные напряжения генератора и нагрузки, мощность, отдаваемую генератором. Построить векторную диаграмму напряжений и токов.

З а м е ч а н и е. Показать, что мощность, отдаваемая генератором, равна сумме мощностей, расходуемых в нагрузке, линии и генераторе.

6.5. К трехфазной линии с симметричными линейными напряжениями $U_{\text{л}} = 220 \text{ в}$ подключен треугольником приемник, сопротивление каждой фазы которого $Z = (10 + j10) \text{ ом}$ (рис. 6.3, а). Найти токи

в каждой фазе нагрузки и линии и показания каждого ваттметра. Найти те же величины в случае обрыва в точке a_1 .

Решение. Решим задачу, пользуясь символическим методом.

Примем, что комплекс напряжения \dot{U}_{AB} веществен. Тогда комплексы линейных напряжений:

$$\dot{U}_{AB} = \dot{U}_{ab} = 220 \text{ в}; \quad \dot{U}_{BC} = \dot{U}_{bc} = 220 e^{-j120^\circ} \text{ в};$$

$$\dot{U}_{CA} = \dot{U}_{ca} = 220 e^{-j240^\circ} \text{ в}.$$

Определим комплексы фазных и линейных токов:

$$\dot{i}_{ab} = \frac{\dot{U}_{ab}}{Z} = \frac{220}{10+j10} = 15,6 e^{-j45^\circ} = (11-j11) \text{ а};$$

$$\dot{i}_{bc} = \frac{\dot{U}_{bc}}{Z} = \frac{220 e^{-j120^\circ}}{10+j10} = 15,6 e^{-j165^\circ} = (-15-j4,03) \text{ а};$$

$$\dot{i}_{ca} = \frac{U_{ca}}{Z} = \frac{220 e^{-j240^\circ}}{10+j10} = 15,6 e^{j75^\circ} = (4,03+j15) \text{ а};$$

$$\dot{I}_A = \dot{i}_{ab} - \dot{i}_{ca} = 6,97 - j26 = 26,9 e^{-j75^\circ} \text{ а};$$

$$\dot{I}_B = \dot{i}_{bc} - \dot{i}_{ab} = -26 + j6,97 = 26,9 e^{j165^\circ} \text{ а};$$

$$\dot{I}_C = \dot{i}_{ca} - \dot{i}_{bc} = 19 + j19 = 26,6 e^{j45^\circ} \text{ а}.$$

Найдем показания ваттметров:

$$P_1 = \text{Re} [\dot{U}_{AB} \dot{I}_A^*] = \text{Re} [220 \cdot 26,9 e^{j75^\circ}] = 220 \cdot 26,9 \cos 75^\circ = 1530 \text{ вт};$$

$$P_2 = \text{Re} [\dot{U}_{CB} \dot{I}_C^*] = \text{Re} [-220 e^{-j120^\circ} \cdot 26,9 e^{-j45^\circ}] = \\ = \text{Re} [220 e^{j60^\circ} \cdot 26,9 e^{-j45^\circ}] = 220 \cdot 26,9 \cos 15^\circ = 5730 \text{ вт}.$$

Активная мощность цепи

$$P = P_1 + P_2 = 1530 + 5730 = 7260 \text{ вт}.$$

Проверка. $P = 3I_\phi^2 r = 3 \cdot 15,56^2 \cdot 10 = 7260 \text{ вт}.$

На рис. 6.3, б построена векторная диаграмма напряжений и токов.

Обрыв в точке a_1 (рис. 6,3 в). Токи в фазах нагрузки:

$$\dot{i}_{bc} = \frac{\dot{U}_{bc}}{Z} = \frac{220 e^{-j120^\circ}}{10+j10} = (-15 - j4,04) \text{ а};$$

$$\dot{i}_{ab} = \dot{I}_{ca} = \frac{\dot{U}_{CB}}{2Z} = -\frac{220 e^{-j120^\circ}}{2(10+j10)} = (7,5 + j2,02) \text{ а}.$$

Вычислим линейные токи:

$$i_A = 0;$$

$$i_C = -i_B = i_{ca} - i_{bc} = 22,5 + j6,05 = 23,3 e^{j15^\circ} \text{ а.}$$

Определим показания ваттметров:

$$P_1 = 0,$$

$$P_2 = \text{Re} [\dot{U}_{CB}^* i_C] = \text{Re} [220 e^{j60^\circ} \cdot 23,3 e^{-j15^\circ}] = \\ = 220 \cdot 23,3 \cos 45^\circ = 3630 \text{ вт.}$$

6.6. Решить задачу 6.5 при одинаковых сопротивлениях всех фаз и равных $Z = (10 - j10) \text{ ом}$.

В дополнение к случаю обрыва в точке a_1 рассмотреть также случаи обрывов в точках b_1 и b_2 (см. рис. 6.3, а).

6.7. К зажимам симметричной трехфазной сети, линейное напряжение которой равно U_Δ , подключены три одинаковых сопротивления Z , соединенные треугольником. Условные знаки A и X соответственно обозначают «начало» и «конец» фазы A ; B и Y — фазы B ; C и Z — фазы C .

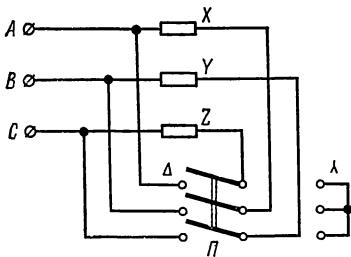


Рис. 6.4

Определить, во сколько раз уменьшится ток в подводящих проводах и потребляемая мощность, если те же сопротивления при помощи переключателя P соединить звездой (рис. 6.4).

З а м е ч а н и е. Результаты данной задачи сравнить с результатами, полученными в задачах 6.2 и 6.5.

6.8. К концу линии, сопротивление каждого провода которой $Z_{np} = (0,5 + j1,5) \text{ ом}$, подключен соединенный треугольником приемник энергии. Сопротивление каждой фазы его $Z_{ab} = Z_{bc} = Z_{ca} = Z = (8,4 + j6,6) \text{ ом}$. Линейные напряжения в начале линии $U_{AB} = U_{BC} = U_{CA} = 230 \text{ в}$ (рис. 6.5). Рассчитать линейные и фазные токи, а также напряжения на фазах нагрузки, соединенной треугольником. Определить потерю напряжения в линии. Построить векторную диаграмму.

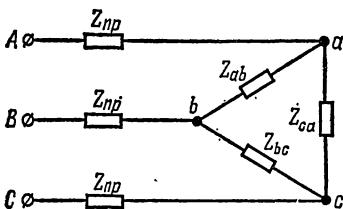


Рис. 6.5

У к а з а н и е. Задачу проще решить при помощи преобразования треугольника сопротивлений нагрузки в эквивалентную звезду.

6.9. Дан симметричный генератор, соединенный треугольником (рис. 6.6). Фазные э.д.с. генератора $E_\phi = 230 \text{ в}$, а внутреннее сопротивление каждой его фазы $Z_\phi = (0,3 + j0,9) \text{ ом}$. Через линию, сопротивление каждого провода которой $Z_{np} = (0,15 + j0,12) \text{ ом}$, гене-

ратор соединен с приемником энергии, соединенным звездой. Сопротивление каждой фазы его $Z = (2 + j1,5) \text{ ом}$. Определить напряжения у зажимов генератора и приемника энергии и токи в фазах генератора и приемника энергии.

6.10. Вычислить все токи и напряжения на фазах симметричной нагрузки, соединенной треугольником, если трехфазный генератор симметричен, его фазная э.д.с. $E_\phi = 230 \text{ в}$, сопротивление каждой фазы генератора $Z_\phi = (0,3 + j0,9) \text{ ом}$, сопротивление каждого провода $Z_{пр} = (0,15 + j0,12) \text{ ом}$, сопротивление каждой фазы нагрузки $Z = (2 + j1,5) \text{ ом}$ (рис. 6.7).

6.11. Для измерения активной мощности трехфазной равномерной нагрузки, имеющей индуктивный характер, соединенной звездой и подключенной к симметричной трехфазной сети, линейное напряжение которой $U_\lambda = 220 \text{ в}$, были включены два ваттметра (рис. 6.8), показания которых $P_1 = 1080 \text{ вт}$ и $P_2 = 1920 \text{ вт}$. Определить фазное напряжение, ток и сдвиг фаз между ними. Чему равна общая мощность, расходуемая в нагрузке? Построить векторную диаграмму напряжений и токов.

6.12. Решить задачу 6.11, если $U_\lambda = 380 \text{ в}$, $P_1 = 0$ и $P_2 = 2,5 \text{ квт}$.

6.13. Для цепи рис. 6.3, а вычислить токи в нагрузке и в линии, сопротивление каждой фазы нагрузки, общую мощность, если нагрузка и линейные напряжения симметричны и равны $U_\lambda = 220 \text{ в}$, а показания ваттметров $P_1 = 1,65 \text{ квт}$, $P_2 = 5,81 \text{ квт}$.

6.14. Чему равно показание ваттметра, включенного в цепь рис. 6.9, и какую мощность он учитывает? Нагрузка фаз симметрична: $r_A = r_B = r_C = 12 \text{ ом}$, $x_A = x_B = x_C = 9 \text{ ом}$. Система линейных напряжений тоже симметрична $U_\lambda = 380 \text{ в}$.

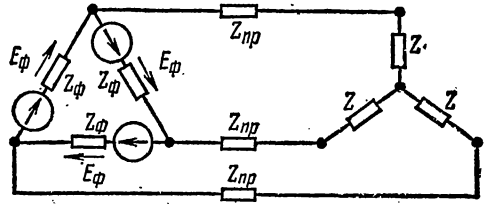


Рис. 6.6

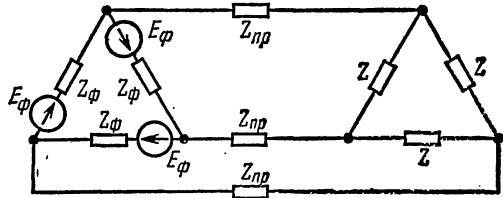


Рис. 6.7

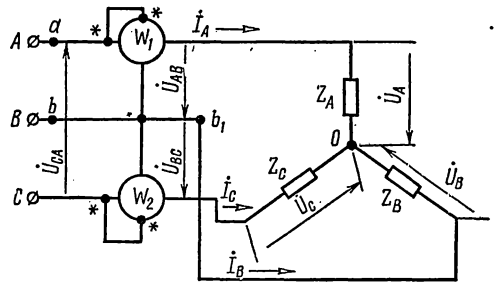


Рис. 6.8

6.15. В цепи рис. 6.10 $r_{AB} = r_{BC} = r_{CA} = 12 \text{ ом}$, $x_{AB} = x_{BC} = x_{CA} = 9 \text{ ом}$. Система линейных напряжений симметрична $U_{\text{л}} = 380 \text{ в}$. Чему равно показание ваттметра и какую мощность он учитывает?

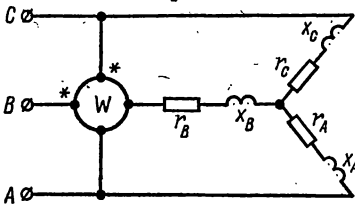


Рис. 6.9

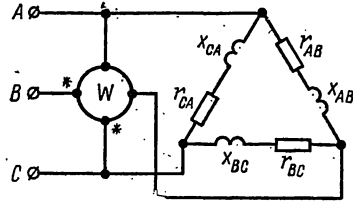


Рис. 6.10

6.16. На расстояние $l = 60 \text{ км}$ нужно передать мощность $P = 3000 \text{ кВт}$ при линейном напряжении у потребителей $U_{\text{л}} = 35000 \text{ в}$ и $\cos \varphi_{\text{ф}} = 0,8$ так, чтобы потеря мощности не превышала 5% от полезной. Определить необходимое для этого количество меди (в тоннах) при: а) трехфазной и б) однофазной системах передачи энергии.

6.17. Симметричный трехфазный трансформатор питает симметричную нагрузку, общая мощность которой $P = 600 \text{ кВт}$, а $\cos \varphi_{\text{ф}} = 0,8$ ($\varphi_{\text{ф}} > 0$). Линейное напряжение на нагрузке $U_{\text{л}} = 6 \text{ кв}$. От трансформатора до потребителя проложена

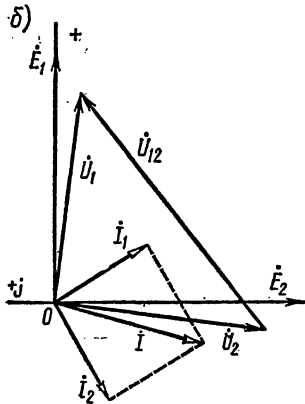
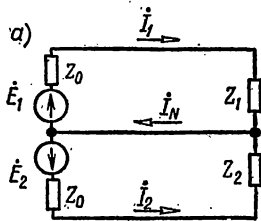


Рис. 6.11

воздушная линия, сечение каждого провода которой $s = 35 \text{ мм}^2$, а длина $l = 2,3 \text{ км}$. Материал проводов линии — медь (удельное сопротивление $\rho = 0,0175 \text{ ом} \cdot \text{мм}^2/\text{м}$). Индуктивное сопротивление каждого километра провода равно $0,4 \text{ ом}$.

Вычислить ток и линейное напряжение в начале линии и построить векторную диаграмму.

6.18. Решить задачу 6.17, полагая, что вместо воздушной линии проложен кабель с тем же сечением медных проводов, индуктивностью которых можно пренебречь. Остальные данные те же, что и в задаче 6.17.

6.19. Дана двухфазная система э.д.с.

(рис. 6.11, а): $E_1 = E_2 = 220 \text{ в}$, $(E_1, E_2) = 90^\circ$. Сопротивление каждой фазы генератора $Z_0 = (0,5 + j1,5) \text{ ом}$. Сопротивление каждой фазы нагрузки $Z_1 = Z_2 = Z = (5,5 + j8) \text{ ом}$. Сопротивление провода, общего для двух фаз, принять равным нулю. Найти токи в проводах, фазные и

линейные напряжения нагрузки. Построить векторную диаграмму.

Решение. Выразим э. д. с. генератора через комплексы. Примем, что $\dot{E}_1 = E_1 = 220$ в, тогда $\dot{E}_2 = E_1 e^{-j90^\circ} = -j220$ в. Применяя закон Ома к каждой фазе, получим:

$$\dot{I}_1 = \frac{\dot{E}_1}{Z_1 + Z_0} = \frac{220}{6 + j9,5} = 10,4 - j16,5 = 19,6 e^{-j57^\circ 47'} \text{ а};$$

$$\dot{I}_2 = \frac{\dot{E}_2}{Z_2 + Z_0} = \frac{-j220}{6 + j9,5} = -16,5 - j10,4 = 19,6 e^{-j147^\circ 47'} \text{ а}.$$

Ток в проводе, общем для двух фаз,

$$\dot{I}_N = \dot{I}_1 = \dot{I}_2 = -6,1 - j26,9 = 27,6 e^{-j102^\circ 35'} \text{ а}.$$

Фазные напряжения:

$$\dot{U}_1 = \dot{I}_1 Z_1 = (10,4 - j16,5)(5,5 + j8) = 190 - j7,5 = 190 e^{-j2^\circ 16'} \text{ в};$$

$$\begin{aligned} \dot{U}_2 = \dot{I}_2 Z_2 &= (-16,5 - j10,4)(5,5 + j8) = \\ &= -(7,5 + j190) = \\ &= 190 e^{-j92^\circ 16'} \text{ в}. \end{aligned}$$

Комплекс линейного напряжения

$$\begin{aligned} \dot{U}_{12} &= \dot{U}_1 - \dot{U}_2 = 197,5 + j182,5 = \\ &= 269 e^{j42^\circ 43'} \text{ в}. \end{aligned}$$

На рис. 6.11, б построена векторная диаграмма.

Б. Несимметричный режим

6.20. К симметричному трехфазному генератору с фазной э.д.с. $E = 230$ в и с внутренним сопротивлением $Z_0 = (0,3 + j0,9)$ ом подключена несимметричная нагрузка, соединенная в звезду с нулевым проводом (рис. 6.12, а). Сопротивления фаз нагрузки: $Z_a = (2 + j4)$ ом, $Z_b = (4 - j8)$ ом, $Z_c = 5$ ом. Сопротивление каждого провода линии $Z_{np} = (0,4 + j0,3)$ ом, а сопротивление нейтрального провода $Z_N = 0,5$ ом. Определить токи и напряжения на каждой фазе нагрузки

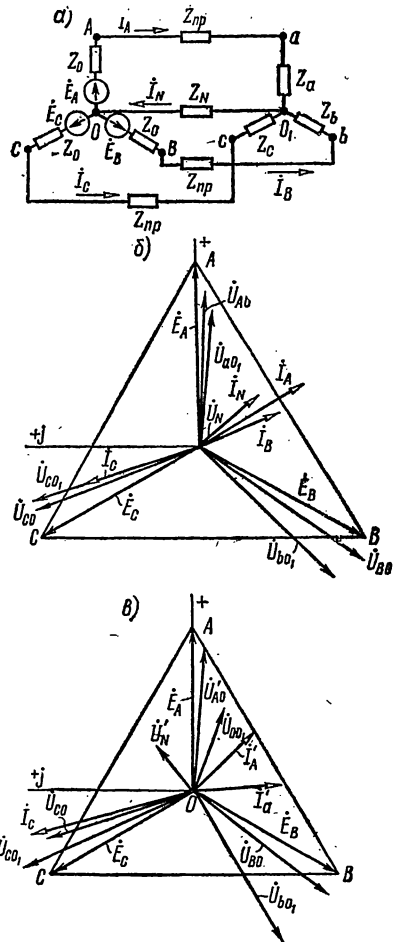


Рис. 6.12

и генераторе при наличии нейтрального провода и при его обрыве. Для каждого случая построить векторную диаграмму.

Решение. Запишем фазные э.д.с. генератора в комплексном

$$\text{виде: } \dot{E}_A = E_A = 230 \text{ в}, \quad \dot{E}_B = 230e^{-j120^\circ} = -115(1+j1,73) \text{ в};$$

$$\dot{E}_C = 230e^{-j240^\circ} = -115(1-j1,73) \text{ в}.$$

Комплексные проводимости фаз:

$$Y_A = \frac{1}{Z_a + Z_0 + Z_{\text{нп}}} = \frac{1}{2,7 + j5,2} = (0,0788 - j0,152) \text{ сим};$$

$$Y_B = \frac{1}{Z_b + Z_0 + Z_{\text{нп}}} = \frac{1}{4,7 - j6,8} = (0,0688 + j0,0995) \text{ сим};$$

$$Y_C = \frac{1}{Z_c + Z_0 + Z_{\text{нп}}} = \frac{1}{5,7 + j1,2} = (0,168 - j0,0354) \text{ сим}.$$

$$Y_N = \frac{1}{Z_N} = \frac{1}{0,5} = 2 \text{ сим}.$$

При наличии нейтрального провода.

По формуле (6.5) найдем напряжение между точками O_1 и O :

$$\begin{aligned} \dot{U}_N &= \frac{230(0,0788 - j0,152) - 115(1 + j1,73)(0,0688 + j0,0995) -}{2,32 - j0,088} \rightarrow \\ &\rightarrow \frac{-115(1 - j1,73)(0,168 - j0,0354)}{2,32 - j0,088} = 8,03 - j9,38 = 12,4 e^{-j49^\circ 25'} \text{ в}, \end{aligned}$$

а по формуле (6.6) все токи:

$$\dot{I}_A = (\dot{E}_A - \dot{U}_N) Y_A = 18,9 - j33 = 37,9 e^{-j60^\circ 10'} \text{ а};$$

$$\dot{I}_B = (\dot{E}_B - \dot{U}_N) Y_B = 10,4 - j25,2 = 27,4 e^{-j67^\circ 40'} \text{ а};$$

$$\dot{I}_C = (\dot{E}_C - \dot{U}_N) Y_C = -13,3 + j39,4 = 41,6 e^{j108^\circ 35'} \text{ а};$$

$$\dot{I}_N = \dot{U}_N Y_N = 16 - j18,8 = 24,8 e^{-j49^\circ 25'} \text{ а}.$$

Проверка показывает, что $\dot{I}_A + \dot{I}_B + \dot{I}_C - \dot{I}_N = 0$.

Напряжения на фазах нагрузки:

$$\dot{U}_{aO_1} = \dot{I}_A Z_a = 170 e^{j3^\circ 15'} \text{ в}; \quad \dot{U}_{bO_1} = \dot{I}_B Z_b = 230 e^{-j134^\circ 20'} \text{ в}.$$

$$\dot{U}_{cO_1} = \dot{I}_C Z_c = 208 e^{j108^\circ 35'} \text{ в}.$$

Напряжения на каждой фазе генератора

$$\dot{U}_{A0} = \dot{E}_A - \dot{I}_A Z_0 = 195 e^{-j2^\circ 5'} \text{ в}; \quad \dot{U}_{B0} = \dot{E}_B - \dot{I}_B Z_0 = 243 e^{-j125^\circ} \text{ в};$$

$$\dot{U}_{C0} = \dot{E}_C - \dot{I}_C Z_0 = 213 e^{j110^\circ 45'} \text{ в}.$$

На рис. 6.12, б построена векторная диаграмма. При обрыве нейтрального провода ($Y_N = 0$).

$$\dot{U}'_N = \frac{\dot{E}_A Y_A + \dot{E}_B Y_B + \dot{E}_C Y_C}{Y_A + Y_B + Y_C} = 70,8 - j51,8 = 87,6e^{-j36^\circ 15'} \text{ в.}$$

Токи:

$$\dot{I}'_A = (\dot{E}_A - \dot{U}'_N) Y_A = 20,4 - j20,1 = 28,6e^{-j44^\circ 40'} \text{ а;}$$

$$\dot{I}'_B = (\dot{E}_B - \dot{U}'_N) Y_B = 1,9 - j28,6 = 28,6e^{-j86^\circ 15'} \text{ а;}$$

$$\dot{I}'_C = (\dot{E}_C - \dot{U}'_N) Y_C = -22,3 + j48,7 = 53,6e^{j114^\circ 40'} \text{ а.}$$

Напряжения на фазах нагрузки:

$$\dot{U}'_{a0_1} = \dot{I}'_A Z_a = 128e^{j18^\circ 45'} \text{ в; } \dot{U}'_{b0_1} = \dot{I}'_B Z_b = 256e^{-j149^\circ 40'} \text{ в;}$$

$$\dot{U}'_{c0_1} = \dot{I}'_C Z_c = 268e^{j114^\circ 35'} \text{ в.}$$

Напряжения на фазах генератора:

$$\dot{U}'_{A0} = \dot{E}_A - \dot{I}'_A Z_0 = 206 - j12,3 = 206e^{-j3^\circ 25'} \text{ в;}$$

$$\dot{U}'_{B0} = \dot{E}_B - \dot{I}'_B Z_0 = -141 - j192 = 239e^{-j125^\circ 20'} \text{ в;}$$

$$\dot{U}'_{C0} = \dot{E}_C - \dot{I}'_C Z_0 = -64,5 + j205 = 215e^{j107^\circ 25'} \text{ в.}$$

На рис. 6.12, в построена векторная диаграмма в случае обрыва нейтрального провода.

6.21. Решить задачу 6.20, если $Z_0 = 0,2 \text{ ом}$.

6.22. В четырехпроводную линию трехфазной симметричной сети с фазным напряжением $U_{A0} = U_{B0} = U_{C0} = U_\phi = 120 \text{ в}$ включены три группы одинаковых ламп (рис. 6.13): I = 30 ламп, II = 25 ламп и III = 20 ламп. Сопротивление каждой лампы считать неизменным и равным 300 ом.

Определить ток в нейтральном проводе. Под каким напряжением окажется каждая группа ламп при обрыве нейтрального провода в точке m ?

6.23. К зажимам трехфазного симметричного источника энергии с линейным напряжением $U_\lambda = 380 \text{ в}$ подключена соединенная звездой несимметричная нагрузка (рис. 6.14, а), сопротивления фаз которой $Z_A = (6 + j8) \text{ ом}$, $Z_B = (24 + j7) \text{ ом}$ и $Z_C = 20 \text{ ом}$.

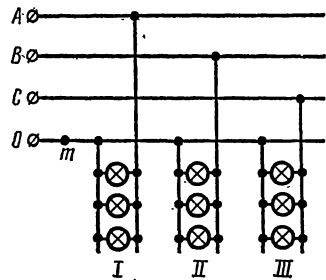


Рис. 6.13

Определить токи и напряжения на каждой фазе, показания каждого ваттметра, мощность, расходуемую в нагрузке. Построить векторную диаграмму токов и напряжений.

Решение. *Способ 1.* Заданная схема может быть заменена новой (рис. 6.14, б), для которой фазные напряжения

$$U_{\phi} = \frac{U_{л}}{\sqrt{3}} = \frac{380}{\sqrt{3}} = 220 \text{ в,}$$

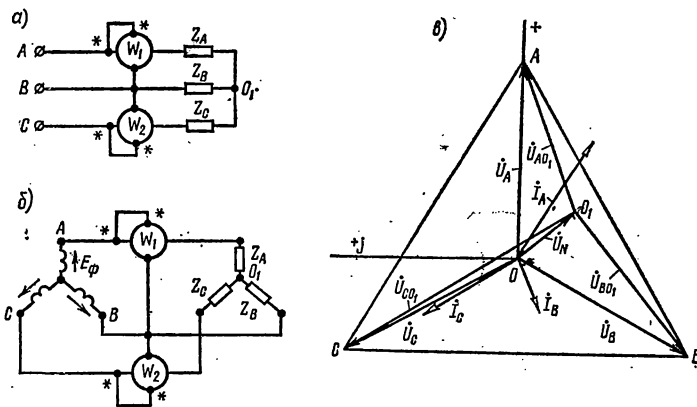


Рис. 6.14

а внутренние сопротивления источников равны нулю.

Проводимости фаз нагрузки:

$$Y_A = \frac{1}{Z_A} = \frac{1}{6 + j8} = (0,06 - j0,08) = 0,1 e^{-j53^{\circ}10'} \text{ сим,}$$

$$Y_B = \frac{1}{Z_B} = \frac{1}{24 + j7} = (0,0384 - j0,0112) = 0,04 e^{-j16^{\circ}16'} \text{ сим,}$$

$$Y_C = \frac{1}{Z_C} = \frac{1}{20} = 0,05 \text{ сим.}$$

Принимая $\dot{U}_A = U_A = 220 \text{ в}$, а следовательно, $\dot{U}_B = 220 e^{-j120^{\circ}} \text{ в}$

и $\dot{U}_C = 220 e^{j120^{\circ}} \text{ в}$, по формуле (6.5) найдем напряжение между нулевыми точками нагрузки и генератора:

$$\dot{U}_N = \frac{1,364 - j14,13}{0,1484 - j0,0912} = 49,0 - j64,9 = 81,2 e^{-j52^{\circ}57'} \text{ в.}$$

Напряжения на фазах нагрузки:

$$\dot{U}_{A0_1} = \dot{U}_A - \dot{U}_N = 171 + j64,9 = 183 e^{j20^{\circ}46'} \text{ в;}$$

$$\dot{U}_{B0_1} = \dot{U}_B - \dot{U}_N = -159 - j126 = 203 e^{-/141^\circ 42'} \text{ в};$$

$$\dot{U}_{C0_1} = \dot{U}_C - \dot{U}_N = -159 + j255 = 301 e^{-/121^\circ 53'} \text{ в};$$

а токи в фазах:

$$\dot{I}_A = \dot{U}_{A0_1} Y_A = 18,3 e^{-/32^\circ 24'} = (15,46 - j9,72) \text{ а};$$

$$\dot{I}_B = \dot{U}_{B0_1} Y_B = 8,12 e^{-/157^\circ 58'} = (-7,51 - j3,04) \text{ а};$$

$$\dot{I}_C = \dot{U}_{C0_1} Y_C = 15,05 e^{/121^\circ 53'} = (-7,95 + j12,76) \text{ а}.$$

В правильности решения можно убедиться проверкой:

$$\dot{I}_A + \dot{I}_B + \dot{I}_C = 15,46 - j9,72 - 7,51 - j3,04 - 7,95 + j12,76 = 0.$$

Способ 2. Напряжения на фазах нагрузки могут быть найдены по формулам (6.7). Для этого предварительно вычислим комплексы линейных напряжений. Так как раньше было принято $\dot{U}_A = 220 \text{ в}$, то

$$\dot{U}_{AB} = \dot{U}_A - \dot{U}_B = 220 - 220 e^{-/120^\circ} = 380 e^{/30^\circ} \text{ в};$$

$$\dot{U}_{BC} = \dot{U}_B - \dot{U}_C = 220 e^{-/120^\circ} - 220 e^{/120^\circ} = 380 e^{-/90^\circ} \text{ в};$$

$$\dot{U}_{CA} = \dot{U}_C - \dot{U}_A = 220 e^{/120^\circ} - 220 = 380 e^{/150^\circ} \text{ в}.$$

Искомые напряжения равны:

$$\dot{U}_{A0_1} = \frac{380 e^{/30^\circ} \cdot 0,04 e^{-/16^\circ 16'} - 380 e^{/150^\circ} \cdot 0,05}{0,1484 - j0,0912} = 183 e^{/20^\circ 45'} \text{ в};$$

$$\dot{U}_{B0_1} = \frac{380 e^{-/90^\circ} \cdot 0,05 - 380 e^{/30^\circ} \cdot 0,1 e^{-/53^\circ 10'}}{0,1484 - j0,0912} = 203 e^{-/141^\circ 45'} \text{ в};$$

$$\dot{U}_{C0_1} = \frac{380 e^{/150^\circ} \cdot 0,1 e^{-/53^\circ 10'} - 380 e^{-/90^\circ} \cdot 0,04 e^{-/16^\circ 16'}}{0,1484 - j0,0912} = 301 e^{/121^\circ 50'} \text{ в}.$$

Определим показания каждого ваттметра:

$$P_1 = \text{Re} \left[\dot{U}_{AB} \dot{I}_A^* \right] = \text{Re} \left[380 e^{/30^\circ} \cdot 18,3 e^{/32^\circ 24'} \right] = 3230 \text{ вт};$$

$$P_2 = \text{Re} \left[\dot{U}_{CB} \dot{I}_C^* \right] = \text{Re} \left[380 e^{/90^\circ} \cdot 15,05 e^{-/121^\circ 53'} \right] = 4870 \text{ вт}.$$

Сумма показаний ваттметров дает мощность, расходуемую в нагрузке,

$$P = P_1 + P_2 = 8100 \text{ вт}.$$

Действительно,

$$P = I_A^2 r_A + I_B^2 r_B + I_C^2 r_C = 18,3^2 \cdot 6 + 8,12^2 \cdot 24 + 15,05^2 \cdot 20 = 2000 + 1580 + 4520 = 8100 \text{ вт.}$$

На рис. 6.14, *в* дана векторная диаграмма напряжений и токов.

6.24. Для цепи рис. 6.8 определить токи и показания ваттметров, если: а) в фазе *A* произошел обрыв в точке *a*; б) в фазе *B* — обрыв в точке *b*; в) в фазе *B* — в точке *b*₁; г) фаза *A* оказалась закороченной; д) короткое замыкание произошло в фазе *B*. Для решения задачи воспользоваться данными задачи 6.23.

6.25. Фазы нагрузки, соединенные звездой, имеют чисто активное сопротивление: $r_A = 9 \text{ ом}$, $r_B = 11 \text{ ом}$ и $r_C = 14 \text{ ом}$. Через линию, активное сопротивление каждого провода которой $r_{\text{пр}} = 1 \text{ ом}$ (индуктивностью проводов линии пренебречь), указанная нагрузка подключается к зажимам симметричного источника трехфазного тока с линейным напряжением $U_{\text{л}} = 380 \text{ в}$. Определить токи и напряжения на фазах нагрузки.

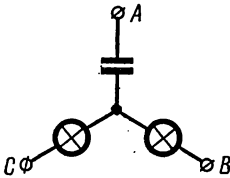


Рис. 6.15

6.26. Для определения порядка чередования фаз применяется схема рис. 6.15, состоящая из трех равных по модулю сопротивлений, соединенных звездой, из которых одно емкостное, а два других — активные (лампы накаливания).

Система линейных напряжений $U_{\text{л}}$ симметрична. Определить фазные напряжения и построить векторную диаграмму.

З а м е ч а н и е. При расчете принять, что к фазе *A* подключается нагрузка, содержащая конденсатор. Тогда получится, что лампа, включенная в фазу *B*, будет находиться под напряжением в 3,71 раза большим, чем та, которая в фазе *C*.

6.27. К симметричной системе линейных напряжений $U_{\text{л}}$ подключены соединенные звездой, равные по численной величине три сопротивления, одно из которых индуктивное x_L , а два других r_1 и r_2 — активные (лампа накаливания). Показать, что если фазу, соединенную с индуктивностью, считать за первую, то лампа, включенная во вторую фазу, будет находиться под напряжением, в 3,71 раза меньшим, чем лампа, включенная в третью фазу, т. е. $U_C/U_B = 3,71$.

6.28. Для цепи рис. 6.3, *а* определить фазные и линейные токи, общую мощность приемника, показание каждого ваттметра и построить векторную диаграмму, если трехфазный источник симметричен $U_{AB} = U_{BC} = U_{CA} = 220 \text{ в}$, а сопротивления отдельных фаз нагрузки, соединенных треугольником, равны:

$$Z_{ab} = 10 \text{ ом}, \quad Z_{bc} = (6 + j8) \text{ ом}, \quad Z_{ca} = -j10 \text{ ом}.$$

6.29. К симметричной трехфазной системе с линейным напряжением $U_{\text{л}} = 220 \text{ в}$ подключена нагрузка, соединенная треугольником (см. рис. 6.5). Сопротивления фаз нагрузок: $Z_{ab} = (12 + j16) \text{ ом}$,

$Z_{bc} = 20 \text{ ом}$ и $Z_{ca} = (16 - j12) \text{ ом}$. Сопротивление каждого провода $Z_{\text{пр}} = (1 + j3) \text{ ом}$. Вычислить фазные и линейные токи, напряжение на фазах нагрузки, мощность, расходуемую в нагрузке.

6.30. В трехфазную симметричную сеть без нулевого провода с линейным напряжением $U_{\text{л}} = 220 \text{ в}$ включены три группы одинаковых ламп (рис. 6.16). В первой группе имеется $n_1 = 17$ ламп, во второй — $n_2 = 23$ лампы и в третьей — $n_3 = 19$ ламп. Сопротивление каждой лампы считать неизменным и равным 590 ом .

а) Определить линейные и фазные токи;
 б) вычислить все токи и напряжения на зажимах каждой группы ламп при перегорании предохранителя на вводе фазы C .

6.31. В трехпроводную систему трехфазного тока, линейные напряжения которой симметричны и равны $U_{\text{л}} = 127 \text{ в}$, включены две лампы, потребляющие мощности $P_1 = 55 \text{ вт}$ и $P_2 = 200 \text{ вт}$ (рис. 6.17). Рассчитать токи, проходящие через каждую лампу и в каждом из проводов линии, и построить векторную диаграмму напряжений и токов. Определить показания ваттметров.

6.32. Вольтметры, подключенные к линейным зажимам трехфазной системы, показали $U_{AB} = 210 \text{ в}$, $U_{BC} = 220 \text{ в}$ и $U_{CA} = 225 \text{ в}$. К указанной системе подключен приемник энергии, соединенный звездой, сопротивления фаз которого $Z_A = 25 \text{ ом}$, $Z_B = (24 + j7) \text{ ом}$, $Z_C = (16 - j12) \text{ ом}$ (см. рис. 6.8). Найти токи и фазные напряжения. Каковы показания ваттметров?

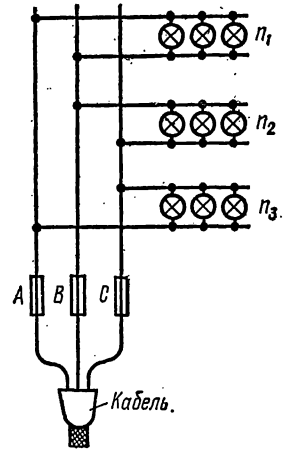


Рис. 6.16

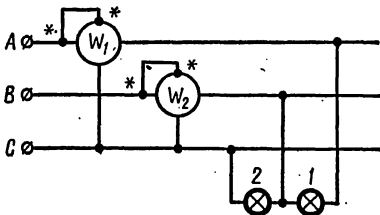


Рис. 6.17

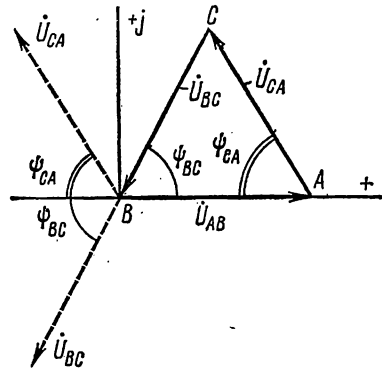


Рис. 6.18

У к а з а н и е. По заданным значениям линейных напряжений следует построить треугольник напряжений ABC (рис. 6.18). Углы векторов \dot{U}_{CA} и \dot{U}_{BC} определяются решением этого треугольника. Например, угол ψ_{BC} опре-

деляется из следующего равенства:

$$\cos \psi_{BC} = \frac{U_{AB}^2 + U_{BC}^2 - U_{CA}^2}{2U_{AB}U_{BC}}$$

6.33. К трехфазной сети, линейные напряжения которой $U_{AB} = 210$ в, $U_{BC} = 220$ в и $U_{CA} = 225$ в, подключена симметричная нагрузка, соединенная звездой, сопротивления каждой из которой равны $Z_A = Z_B = Z_C = (20 + j15)$ ом. Найти напряжения и токи в каждой фазе.

У к а з а н и е. Нагрузки всех фаз одинаковы, поэтому задача может быть решена графически: строится в масштабе треугольник линейных напряжений и находится точка пересечения его медиан. Соединяя ее с вершинами треугольника, получим векторы фазных напряжений $\dot{U}_A, \dot{U}_B, \dot{U}_C$. Векторы токов отстают по фазе от соответствующих фазных напряжений на один и тот же угол.

$$\varphi_{\phi} = \arctg \frac{15}{20} = 36^\circ 50'$$

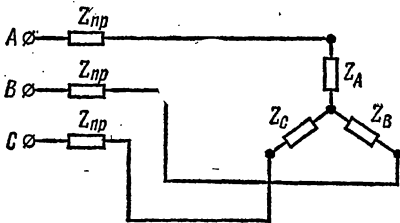


Рис. 6.19

6.34. В цепи схемы рис. 6.19 даны: $Z_{нр} = (1 + j2)$ ом, $Z_A = (8 + j10)$ ом, $Z_B = 14$ ом, $Z_C = (10 - j6)$ ом. Измерения линейных напряжений трехфазной сети дали следующие величины: $U_{AB} = 120$ в, $U_{BC} = 110$ в и $U_{CA} = 125$ в. Найти токи и напряжения на фазах нагрузки.

6.35. Линейные напряжения трехфазной сети: $U_{AB} = 120$ в, $U_{BC} = 110$ в и $U_{CA} = 125$ в. К этой сети подключена нагрузка, соединенная треугольником, сопротивления фаз которой $Z_{AB} = 25$ ом, $Z_{BC} = 20$ ом и $Z_{CA} = (16 + j8)$ ом. Найти линейные и фазные токи.

6.36. Линейные напряжения трехфазной системы: $U_{AB} = 220$ в, $U_{BC} = 215$ в и $U_{CA} = 225$ в. Определить линейные и фазные токи, если $Z_{нр} = (1 + j3)$ ом, а сопротивления фаз нагрузки, соединенной

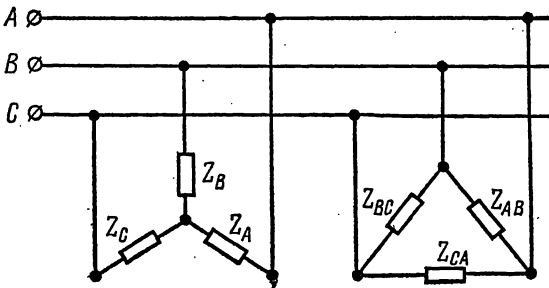


Рис. 6.20

треугольником (см. рис. 6.5), $Z_{ab} = 20 \text{ ом}$, $Z_{bc} = (15 + j5) \text{ ом}$ и $Z_{ca} = (16 - j8) \text{ ом}$.

6.37. Система линейных напряжений симметрична $U_{\text{л}} = 220 \text{ в}$. Сопротивления фаз нагрузки (рис. 6.20): $Z_A = Z_B = 20 \text{ ом}$, $Z_C = (24 - j7) \text{ ом}$, $Z_{AB} = Z_{BC} = (20 + j15) \text{ ом}$ и $Z_{CA} = 20 \text{ ом}$. Вычислить все токи.

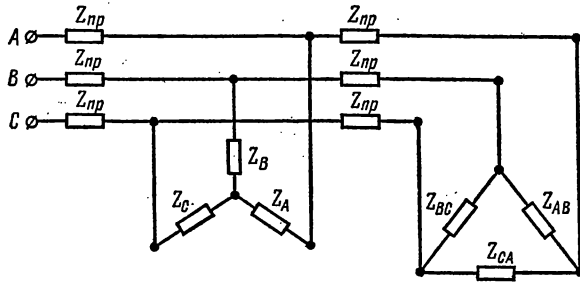


Рис. 6.21

6.38. В цепи рис. 6.21 определить все токи. Даны: $Z_A = Z_B = Z_C = (16 + j12) \text{ ом}$, $Z_{AB} = Z_{BC} = Z_{CA} = r = 30 \text{ ом}$ и $Z_{\text{пр}} = (1 + j3) \text{ ом}$. Рассчитать напряжения на фазах нагрузки и все токи, если $U_{AB} = U_{BC} = 220 \text{ в}$ и $U_{CA} = 210 \text{ в}$.

У к а з а н и е. Треугольник сопротивлений преобразовать в эквивалентную звезду. В дальнейшем схема упрощается, если учесть, что при симметричных нагрузках смещения нейтралей равны нулю.

Глава седьмая
**ЦЕПИ ПЕРИОДИЧЕСКОГО
НЕСИНУСОИДАЛЬНОГО ТОКА**

ОСНОВНЫЕ ПОЛОЖЕНИЯ И СООТНОШЕНИЯ

1. **Разложение периодических кривых в ряд Фурье.** Всякая периодическая функция $f(t)$ с периодом T , удовлетворяющая условиям Дирихле (т. е. ограниченная функция, имеющая за период конечное число разрывов первого рода и конечное число максимумов и минимумов), может быть разложена в тригонометрический ряд.

Разложение периодической функции в тригонометрический ряд может быть записано в двух формах:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n \omega_1 t + b_n \sin n \omega_1 t); \quad (7.1)$$

$$f(t) = \frac{I_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin(n \omega_1 t + \psi_n). \quad (7.2)$$

Коэффициенты ряда (7.1) равны:

$$\left. \begin{aligned} \frac{a_0}{2} &= \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt; & a_n &= \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos n \omega_1 t dt; \\ b_n &= \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin n \omega_1 t dt. \end{aligned} \right\} \quad (7.3)$$

Переход от первой формы ряда (7.1) ко второй форме ряда (7.2) осуществляется с помощью формул:

$$c_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \quad \text{и} \quad \operatorname{tg} \psi_n = \frac{a_n}{b_n}, \quad (7.4)$$

а обратный переход:

$$b_n = c_n \cos \psi_n, \quad a_n = c_n \sin \psi_n. \quad (7.5)$$

Обращаем внимание на то, что при определении угла ψ_n по формулам (7.4) по знакам коэффициентов a_n и b_n надо установить, в какой четверти этот угол находится. Так, если b_n положительно, а a_n отрицательно, то угол ψ_n лежит в четвертой четверти; если $b_n < 0$

и $a_n < 0$, то ψ_n — в третьей четверти, если $b_n < 0$, а $a_n > 0$, то ψ_n — во второй четверти. Проверкой этого служат формулы (7.5).

При использовании первой формы разложения в тригонометрический ряд [см. формулу (7.1)] коэффициенты a_n и b_n зависят от выбора начала отсчета, а при использовании второй формы разложения [см. формулу (7.2)] амплитуды гармоник c_n не зависят от выбора начала отсчета и определяются только видом кривой; аргументы ψ_n зависят от начала отсчета. При сдвиге начала отсчета вдоль оси времени t на $\pm t_c$ амплитуды c_n сохраняются, а фазы ψ_n получают приращение $\pm \omega_n t_c$ (теорема сдвига).

Ряду (7.1) можно придать более компактный вид, если условно ввести отрицательные частоты и перейти к суммированию по n от $-\infty$ до $+\infty$ (в этом случае каждая гармоника, кроме нулевой, входит под знак суммы дважды):

$$f(t) = \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (a_n \cos n \omega_1 t + b_n \sin n \omega_1 t). \quad (7.6)$$

Тригонометрическая форма ряда Фурье может быть преобразована в комплексную:

$$f(t) = \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n e^{jn\omega_1 t}, \quad (7.7)$$

где комплексный коэффициент

$$F_n = a_n - j b_n = F_n e^{-j\psi_n} = F_n e^{j\left(\frac{\pi}{2} - \psi_n\right)}.$$

Для наглядности часто составляющие несинусоидальной периодической функции изображаются в виде линейчатого (дискретного, непрерывного) спектра. Он представляет собой график, на оси абсцисс которого отложены значения частоты (или порядковые номера гармоник) и из этих точек восстановлены перпендикуляры, длины которых соответствуют значениям модулей комплексных амплитуд F_n (или $\frac{1}{2} F_n$, если откладывать отрезки как для положительных, так и для отрицательных частот).

2. Случаи симметрии периодических кривых. Если периодическая кривая обладает тем или иным видом симметрии, то при ее разложении в ряд Фурье отсутствуют некоторые составляющие. В табл. 7.1 дается соответствующая сводка.

3. Разложение в ряд Фурье при различных аналитических выражениях частей периодической кривой. В тех случаях, когда периодическая кривая в пределах периода имеет не одно аналитическое выражение, а разным частям периода соответствуют различные аналитические выражения, например для рис. 7.1, при

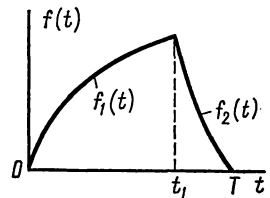


Рис. 7.1

Таблица 7.1

№ пп.	Кривая симметрична относительно	Математическое условие симметрии	Особенности разложения
1	Оси ординат (четная функция) 	$f(t) = f(-t)$	Отсутствуют синусоидальные ($b_k = 0$) гармоники
2	Начала координат (нечетная функция) 	$f(t) = -f(-t)$	Отсутствуют постоянная составляющая и косинусоидальные гармоники ($a_0 = a_k = 0$)
3	Оси абсцисс при совмещении двух полупериодов 	$f(t) = -f\left(t + \frac{T}{2}\right)$	Отсутствуют постоянная составляющая и четные синусоидальные и косинусоидальные гармоники ($a_0 = a_{2n} = b_{2n} = c_{2n} = 0$)
4	Оси ординат и оси абсцисс при совмещении полупериодов 	$f(t) = f(-t) = -f\left(t + \frac{T}{2}\right)$	Отсутствуют постоянная составляющая и все синусоидальные гармоники, а также четные косинусоидальные гармоники ($a_0 = b_k = a_{2n} = b_{2n} = c_{2n} = 0$)
5	Начала координат и оси абсцисс при совмещении двух полупериодов 	$f(t) = -f(-t) = -f\left(t + \frac{T}{2}\right)$	Отсутствуют постоянная составляющая и все косинусоидальные гармоники, а также четные синусоидальные гармоники ($a_0 = a_k = a_{2n} = b_{2n} = c_{2n} = 0$)

расчете коэффициентов ряда интегрирование производится по отдельным частям периода, соответствующим различным аналитическим выражениям (примеры приведены в задачах 7.1 и 7.2).

4. **Графические методы разложения кривых в ряд Фурье.** Если периодическая кривая задана в виде графика (а не аналитически), то ее разложение в ряд производится одним из графо-аналитических методов. Пример приведен в задаче 7.7.

5. Действующее значение периодической величины $f(t)$.

$$F = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T [f(t)]^2 dt}. \quad (7.8)$$

Действующие значения периодических величин, например э.д.с. (или напряжений, токов), не зависят от начальных фаз гармоник и определяются по действующим значениям их гармонических составляющих:

$$E = \sqrt{E_0^2 + E_1^2 + E_2^2 + \dots} = \sqrt{E_0^2 + \frac{E_{1m}^2}{2} + \frac{E_{2m}^2}{2} + \dots}. \quad (7.9)$$

6. **Расчет токов в сложных цепях.** Если периодическое несинусоидальное напряжение подключено к какой угодно разветвленной или неразветвленной линейной цепи, то расчет токов производится для каждой из гармоник в отдельности по методам расчета цепей переменного тока; при этом индуктивные и емкостные сопротивления для k -й гармоники равны соответственно $k\omega_1 L$ и $\frac{1}{k\omega_1 C}$. Расчет постоянной составляющей тока производится по методам расчета цепей постоянного тока. После этого могут быть подсчитаны действующие значения токов, проходящих в отдельных ветвях и действующие значения напряжения на отдельных участках цепи по формуле (7.9).

В простейшем случае неразветвленной r -, L -, C -цепи с сопротивлением для k -й гармоники $Z_k = z_k e^{j\varphi_k} = r + j\left(k\omega_1 L - \frac{1}{k\omega_1 C}\right)$, к которой подключено периодическое напряжение

$$u = U_0 + \sum_{k=1}^{\infty} U_{km} \sin(k\omega_1 t + \varphi_k),$$

в цепи устанавливается периодический ток

$$i = I_0 + \sum_{k=1}^{\infty} I_{km} \sin(k\omega_1 t + \varphi_k - \varphi_k).$$

В цепи будет постоянная составляющая тока I_0 , если нет емкости.

Комплексные амплитуды гармоник тока и напряжения связаны соотношением

$$\dot{I}_{km} = I_{km} e^{j(\varphi_k - \varphi_k)} = \frac{\dot{U}_k}{Z_k}. \quad (7.10)$$

7. Активная P , реактивная Q и полная S мощности вычисляются по формулам:

$$P = \sum_{k=0}^{\infty} U_k I_k \cos \varphi_k; \quad (7.11a)$$

$$Q = \sum_{k=0}^{\infty} U_k I_k \sin \varphi_k; \quad (7.11б)$$

$$S = UI = \sqrt{\sum_{k=0}^{\infty} U_k^2 \sum_{k=0}^{\infty} I_k^2}. \quad (7.11в)$$

8. Характеристики формы периодических несинусоидальных кривых. Коэффициент формы кривой $f(t)$ есть отношение действующего значения F к среднему по модулю значению за период F_{cp} :

$$k_{\Phi} = \frac{F}{F_{cp}} = \frac{\sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T [f(t)]^2 dt}}{\frac{1}{T} \int_0^T |f(t)| dt}. \quad (7.12)$$

Коэффициент амплитуды — отношение максимального значения F к действующему значению функции $f(t)$:

$$k_a = \frac{F_{max}}{F} = \frac{F_{max}}{\sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T [f(t)]^2 dt}}. \quad (7.13)$$

Коэффициент искажения — отношение действующего значения основной гармоники к действующему значению всей функции:

$$k_n = \frac{F_1}{F} = \frac{F_1}{\sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T [f(t)]^2 dt}}. \quad (7.14)$$

Коэффициент гармоник — отношение действующего значения высших гармоник к действующему значению основной гармоники:

$$k_r = \frac{\sqrt{\sum_{k=2}^{\infty} F_k^2}}{F_1}. \quad (7.15)$$

УПРАЖНЕНИЯ И ЗАДАЧИ

А. Аналитический и графо-аналитический методы разложения периодических кривых в ряд Фурье

7.1. Разложить в тригонометрический ряд периодическую функцию напряжения, выражаемую кривой, симметричной относительно точки перехода через нуль (рис. 7.2, а). Расчеты проделать для: 1) $t_1 = T/4$, 2) $t_1 = 0$, $t_1 = T/2$. Для каждого случая на основе разложения в ряд построить линейчатый спектр частот.

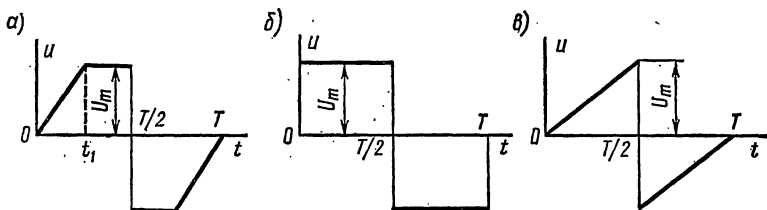


Рис. 7.2

Решение. Уравнения кривой для различных интервалов периода: при изменении t от 0 до t_1 имеет вид

$$u = \frac{U_m}{t_1} t;$$

при изменении t от t_1 до $T/2$

$$u = U_m.$$

По условию симметрии (табл. 7.1 п.2) в разложении кривой содержатся только синусоиды. Для определения коэффициентов b_n ряда по формулам (7.3) разбиваем область интегрирования на два участка от 0 до t_1 и от t_1 до $T/2$ (см. п. 3 основных положений), и так как интегрирование производится не за целый период, а за половину периода, то перед интегралом появляется множитель 2:

$$b_n = 2 \cdot \frac{2}{T} \left[\int_0^{t_1} \frac{U_m}{t_1} t \sin n \omega_1 t dt + \int_{t_1}^{T/2} U_m \sin n \omega_1 t dt \right].$$

Взяв интегралы, получим выражение коэффициентов искомого ряда:

$$b_n = \frac{4}{T} \left[\frac{U_m}{t_1} \left(-\frac{1}{n} t \cos n \omega_1 t + \frac{1}{n^2} \sin n \omega_1 t \right) \right]_{t=0}^{t=t_1} - \frac{U_m}{n} [\cos n \omega_1 t]_{t=T/2}^{t=T/2} = \frac{2U_m}{n \pi} \left(\frac{1}{n \omega_1 t_1} \sin n \omega_1 t_1 - \cos n \pi \right). \quad (1)$$

1) Значение $t_1 = T/4$ (см. кривую на рис. 7.2, а). Формула для b_n примет вид

$$b_n = \frac{2U_m}{n\pi} \left(\frac{2}{n\pi} \sin \frac{n\pi}{2} - \cos n\pi \right).$$

Придавая n значения, равные 1, 2, 3, ..., получим:

$$\begin{aligned} b_1 &= \frac{1}{1} \cdot \frac{2U_m}{\pi} \left(\frac{1}{1} \cdot \frac{2}{\pi} + 1 \right); \\ b_2 &= -\frac{1}{2} \cdot \frac{2U_m}{\pi}; \\ b_3 &= \frac{1}{3} \cdot \frac{2U_m}{\pi} \left(-\frac{1}{3} \cdot \frac{2}{\pi} + 1 \right); \\ b_4 &= -\frac{1}{4} \cdot \frac{2U_m}{\pi}, \dots \end{aligned}$$

Наконец, запишем искомый ряд:

$$\begin{aligned} u &= \frac{2U_m}{\pi} \left[\left(\frac{1}{1} \cdot \frac{2}{\pi} + 1 \right) \sin \omega_1 t - \frac{1}{2} \sin 2\omega_1 t + \right. \\ &\left. + \frac{1}{3} \left(-\frac{1}{3} \cdot \frac{2}{\pi} + 1 \right) \sin 3\omega_1 t - \frac{1}{4} \sin 4\omega_1 t + \dots \right] \text{в.} \end{aligned}$$

2) Значение $t_1 = 0$ (кривая примет вид рис. 7.2, б). При $t_1 = 0$ первое слагаемое в полученном ранее выражении (1) обращается в неопределенность, раскрывая которую, найдем (путем деления производной числителя на производную знаменателя и переходя к пределу при $t_1 \rightarrow 0$), что

$$\left(\frac{\sin n \omega_1 t_1}{n \omega_1 t_1} \right)_{t_1 \rightarrow 0} = 1.$$

Таким образом,

$$b_n = \frac{2U_m}{n\pi} (1 + \cos n\pi) = \frac{4U_m}{n\pi} \sin^2 \frac{n\pi}{2}.$$

Придавая n значения, равные 1, 2, 3, ..., получим:

$$b_1 = \frac{1}{1} \cdot \frac{4U_m}{\pi}; \quad b_2 = 0; \quad b_3 = \frac{1}{3} \cdot \frac{4U_m}{\pi}; \quad b_4 = 0; \quad b_5 = \frac{1}{5} \cdot \frac{4U_m}{\pi}, \dots$$

Искомый ряд

$$u = \frac{4U_m}{\pi} \left(\sin \omega_1 t + \frac{1}{3} \sin 3\omega_1 t + \frac{1}{5} \sin 5\omega_1 t \dots \right) \text{в.}$$

3) Значение $t_1 = T/2$ (кривая примет вид рис. 7.2, в). Ранее полученная для b_n формула (1) примет вид

$$b_n = \frac{2U_m}{n\pi} \left(\frac{1}{n\pi} \sin n\pi - \cos n\pi \right) = -\frac{2U_m}{n\pi} \cos n\pi.$$

При $n = 1, 2, 3, \dots$ коэффициенты ряда:

$$b_1 = \frac{1}{1} \cdot \frac{2U_m}{\pi}; \quad b_2 = -\frac{1}{2} \cdot \frac{2U_m}{\pi}; \quad b_3 = \frac{1}{3} \cdot \frac{2U_m}{\pi};$$

$$b_4 = -\frac{1}{4} \cdot \frac{2U_m}{\pi}, \dots$$

Искомый ряд

$$u = \frac{2U_m}{\pi} \left(\sin \omega_1 t - \frac{1}{2} \sin 2 \omega_1 t + \frac{1}{3} \sin 3 \omega_1 t - \frac{1}{4} \sin 4 \omega_1 t + \dots \right) e.$$

На рис. 7.3 изображены спектры периодических сигналов, соответствующие кривым 7.2, а, б и в. Графическое изображение спектра амплитудной характеристики таково: на оси абсцисс откладывается номер n гармоники, а на оси ординат — вертикальные отрезки, имеющие длины, пропорциональные амплитудам гармоник.

7.2. Разложить в тригонометрический ряд функцию, выражаемую кривой периодических импульсов напряжения постоянной амплитуды U_m длительностью t_n (рис. 7.4, а). Даны: $U_m = 10$ в, $t_n = 0,2$ мсек, $T = 1$ мсек.

Полученную функцию представить также в виде комплексного ряда Фурье. Построить линейчатый спектр частот в зависимости от: а) номера гармоники n и б) угловой частоты ω . Такие же спектры построить, если $T = 2$ мсек, остальные данные те же.

Решение. Уравнение заданной кривой:

в интервале от $t = 0$ до t_n

$$f_1(t) = U_m;$$

в интервале от $t = t_n$ до $t = T$

$$f_2(t) = 0.$$

Разбивая область интегрирования на два участка (см. п. 3 основных положений), с помощью формул (7.3) находим коэффициенты ряда и начальные фазы гармоник:

$$\frac{a_0}{2} = \frac{1}{T} \left[\int_0^{t_n} f_1(t) dt + \int_{t_n}^T f_2(t) dt \right] = \frac{1}{T} \int_0^{t_n} U_m dt = U_m \frac{t_n}{T},$$

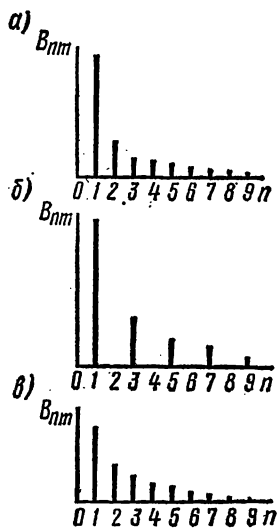


Рис. 7.3

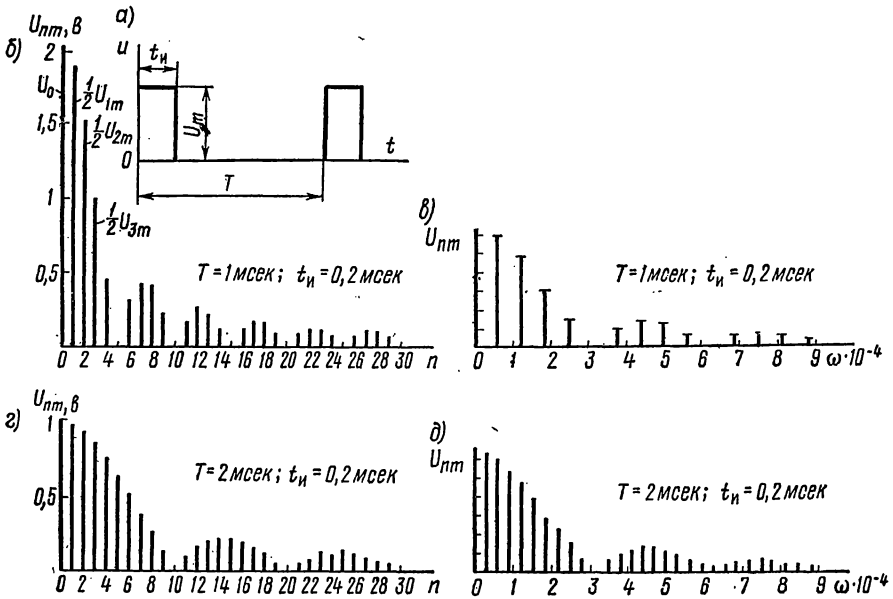


Рис. 7.4

$$\frac{a_0}{2} = 10 \frac{0,2}{1} = 2; \quad (1)$$

$$a_n = \frac{2}{T} \left[\int_0^{t_n} f_1(t) \cos n\omega_1 t dt + \int_{t_n}^T f_2(t) \cos n\omega_1 t dt \right] =$$

$$= \frac{2}{T} \int_0^{t_n} U_m \cos n\omega_1 t dt = \frac{2U_m}{n\omega_1 T} \sin n\omega_1 t_n = \frac{U_m}{\pi n} \sin n\omega_1 t_n; \quad (2)$$

$$b_n = \frac{2}{T} \left[\int_0^{t_n} f_1(t) \sin n\omega_1 t dt + \int_{t_n}^T f_2(t) \sin n\omega_1 t dt \right] =$$

$$= \frac{2}{T} \int_0^{t_n} U_m \sin n\omega_1 t dt = -\frac{2U_m}{n\omega_1 T} [\cos n\omega_1 t]_0^{t_n} = \frac{2U_m}{\pi n} [1 - \cos n\omega_1 t_n]; \quad (3)$$

$$U_{nm} = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} = \frac{U_m}{\pi n} \sqrt{\sin^2 n\omega_1 t_n + [1 - \cos n\omega_1 t_n]^2} =$$

$$= \frac{2U_m}{\pi n} \sin \frac{n\omega_1 t_n}{2}; \quad (4)$$

$$\operatorname{tg} \psi_n = \frac{a_n}{b_n} = \frac{\sin n\omega_1 t_H}{1 - \cos n\omega_1 t_H} = \operatorname{ctg} \frac{n\omega_1 t_H}{2} = \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{2} - \frac{n\omega_1 t_H}{2} \right),$$

$$\psi_n = \frac{\pi}{2} - \frac{n\omega_1 t_H}{2}. \quad (5)$$

Вычисляем коэффициенты ряда и начальные фазы гармоник. При этом имеем в виду, что

$$\omega_1 = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{1 \cdot 10^{-3}} = 2\pi 10^3 \text{ сек}^{-1}; \quad \omega_1 t_H = 2\pi 10^3 \cdot 0,2 \cdot 10^{-3} = 0,4\pi \text{ рад}.$$

Для удобства расчеты сведены в табл. 7.2.

Искомый ряд

$$u = [2 + 3,74 \sin(\omega_1 t + 0,3\pi) + 3,03 \sin(2\omega_1 t + 0,1\pi) + \\ + 2,02 \sin(3\omega_1 t - 0,1\pi) + 0,935 \sin(4\omega_1 t - 0,3\pi) - \\ - 0,624 \sin(6\omega_1 t - 0,7\pi) - 0,866 \sin(7\omega_1 t - 0,9\pi) - \\ - 0,757 \sin(8\omega_1 t - 1,1\pi) - 0,416 \sin(9\omega_1 t - 1,3\pi) + \dots] \text{ в},$$

Таблица 7.2

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\omega_n = n\omega_1$	0	$2\pi 10^3$	$4\pi 10^3$	$6\pi 10^3$	$8\pi 10^3$	$10\pi 10^3$	$12\pi 10^3$	$14\pi 10^3$	$16\pi 10^3$	$18\pi 10^3$	$20\pi 10^3$
$\frac{\omega_n t_H}{2} = \omega_n 10^{-4}$	0	0,2π	0,4π	0,6π	0,8π	π	1,2π	1,4π	1,6π	1,8π	2π
$\sin \frac{n\omega_1 t_H}{2}$	0	0,588	0,951	0,951	0,588	0	-0,588	-0,951	-0,951	-0,588	0
$U_{n, m, \text{ в}}$	2	3,74	3,03	2,02	0,935	0	-0,624	-0,866	-0,757	-0,416	0
$\psi_n, \text{ рад}$	-	0,3π	0,1π	-0,1π	-0,3π	-	-0,7π	-0,9π	-1,1π	-1,3π	-

или, учитывая, что $-\sin(n\omega_1 t - \psi_n) = \sin(n\omega_1 t - \psi_n \pm \pi)$, получим окончательно

$$u = [2 + 3,74 \sin(\omega_1 t + 0,3\pi) + 3,03 \sin(2\omega_1 t + 0,1\pi) + \\ + 2,02 \sin(3\omega_1 t - 0,1\pi) + 0,935 \sin(4\omega_1 t - 0,3\pi) + \\ + 0,624 \sin(6\omega_1 t + 0,3\pi) + 0,866 \sin(7\omega_1 t + 0,1\pi) + \\ + 0,757 \sin(8\omega_1 t - 0,1\pi) + 0,416 \sin(9\omega_1 t - 0,3\pi) + \dots] \text{ в}.$$

Для определения ряда Фурье в комплексной форме [см. формулу (7.7)] находим комплексные амплитуды:

$$\begin{aligned} \dot{F}_n &= a_n - jb_n = \frac{U_m}{\pi n} [\sin n\omega_1 t_n - j(1 - \cos n\omega_1 t_n)] = \\ &= \frac{2U_m}{\pi n} \sin \frac{n\omega_1 t_n}{2} e^{-j \frac{n\omega_1 t_n}{2}}. \end{aligned}$$

Таким образом, комплексная форма ряда Фурье

$$u(t) = \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \frac{2U_m}{\pi n} \sin \frac{n\omega_1 t_n}{2} e^{j\omega_1 n \left(t - \frac{t_n}{2} \right)}.$$

На основе полученных результатов на рис. 7.4, б изображен линейчатый спектр напряжения в зависимости от номера гармоники (расчеты для n от 1 до 10 даны в табл. 7.2; аналогичные расчеты для $n = 11 \div 30$ рекомендуется проделать самостоятельно).

По данным табл. 7.1 на рис. 7.4, в построен линейчатый спектр в зависимости от $\omega_n = n\omega_1$. Для построения графика выбраны масштабы: по оси абсцисс одному делению соответствует $1 \cdot 10^{-4} \text{ сек}^{-1}$; по оси ординат в одном делении $100 \cdot 10^{-6} \text{ в. сек}$ (при построении последнего графика спектральные амплитуды приведены к нормированному масштабу путем деления на $\omega_1 = \frac{2\pi}{T}$).

На рис. 7.4, г построен линейчатый спектр в зависимости от n при $T = 2 \text{ мсек}$, а на рис. 7.4, д спектр изображен в нормированном масштабе в зависимости от ω_n (расчеты рекомендуется проделать самостоятельно).

Из рис. 7.4, в и д видно, что спектральные характеристики импульсов одной и той же длительности t_n зависят от периода T следования импульсов, и чем он больше, тем гуще располагаются спектральные линии, а амплитуды соседних гармоник близки по величине.

На рис. 7.4, б—д отложены значения $\frac{1}{2} U_n$, соответствующие положительным частотам. Полный спектр может быть получен, если построить такой же график симметрично относительно вертикальной оси (т. е. отложить соответствующие отрезки для отрицательных частот).

7.3. Кривая напряжения содержит четыре гармоники:

$$\begin{aligned} u &= (80 \cos \omega_1 t + 60 \cos 2\omega_1 t - 15 \cos 3\omega_1 t - 12 \cos 4\omega_1 t + \\ &+ 100 \sin \omega_1 t - 20 \sin 2\omega_1 t + 30 \sin 3\omega_1 t - 8 \sin 4\omega_1 t) \text{ в.} \end{aligned}$$

Записать эту кривую напряжения в форме ряда (7.1), содержащего только синусоиды с начальными фазами, и в комплексной форме [см. формулу (7.7)]. Начертить линейчатый спектр частот (амплитуд и фаз) в зависимости от номера гармоники.

7.4. Разложить в тригонометрический ряд функцию тока, график которой выражает телеграфные сигналы при периодической передаче точек (рис. 7.5).

7.5. Разложить в тригонометрический ряд функцию напряжения, выражаемую кривой пилообразного напряжения (рис. 7.6). Сравнить полученный результат с разложением в ряд функции, рассмотренной

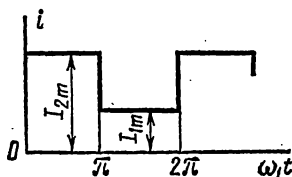


Рис. 7.5

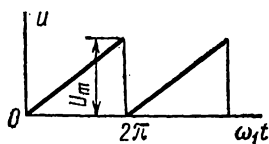


Рис. 7.6

в п. 3 задачи 7.1. По найденному выражению построить кривую, составленную только из постоянной составляющей и первой гармоники разложения функции, и выяснить графически, насколько пилообразная кривая отличается от синтезируемой кривой. То же при добавлении к постоянной составляющей первой и второй гармоники; то же — при добавлении к предыдущему и третьей гармоники.

7.6. Напряжение на сетке лампы имеет вид периодически ломаной линии, изображенной на рис. 7.7. Разложить в тригонометрический ряд функцию напряжения, выражаемую указанной кривой.

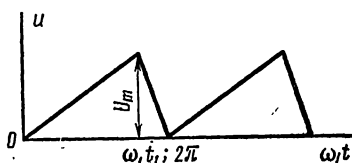


Рис. 7.7

Указание. Уравнение кривой в интервале от 0 до $\omega_1 t_1$

$$u_1 = \frac{U_m}{\omega_1 t_1} \omega_1 t,$$

а в интервале от $\omega_1 t_1$ до 2π

$$u_2 = \frac{U_m}{2\pi - \omega_1 t_1} (2\pi - \omega_1 t).$$

Из общего выражения следует получить частные случаи:

- 1) $\omega_1 t_1 = 2\pi$ сравнить полученные выражения с результатами задачи 7.5);
- 2) $\omega_1 t_1 = \pi$, 3) $\omega_1 t_1 = \frac{3}{2}\pi$.

7.7. Ограничившись тремя гармониками, разложить в ряд Фурье кривую тока i , изображенную на рис. 7.8, а. По результатам разложения построить линейчатый спектр (амплитуд и фаз) кривой тока (рис. 7.8, б).

Решение. Одним из графо-аналитических методов разложения периодической кривой в тригонометрический ряд является следующий: период кривой $f(\omega_1 t) = f(x)$ разбивают на m равных частей, каждая из которых $\Delta(\omega_1 t) = \Delta x = \frac{2\pi}{m}$, и при подсчете коэффициен-

тов ряда по формулам (7.3) вместо интеграла от произведений ординат кривой на ординаты соответствующей синусоиды или косинусоиды берут суммы следующего вида:

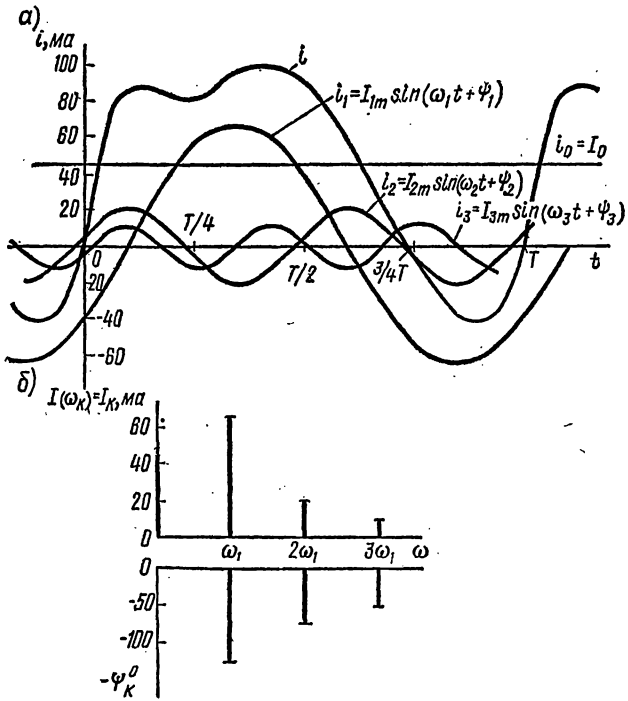


Рис. 7.8

$$\left. \begin{aligned}
 \frac{a_0}{2} &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) dx \approx \frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^m f_k(x) \Delta x = \frac{1}{m} \sum_{k=1}^m f_k(x); \\
 a_n &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos nx dx \approx \frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^m f_k(x) \cos_k nx \Delta x = \\
 &= \frac{2}{m} \sum_{k=1}^m f_k(x) \cos_k nx; \\
 b_n &= \frac{2}{m} \sum_{k=1}^m f_k(x) \sin_k nx,
 \end{aligned} \right\} (1)$$

где k — переменный индекс, принимающий значения от 1 до m ; $f_k(x)$, $\cos_k nx$, $\sin_k nx$ — значения $f(x)$, $\cos nx$, $\sin nx$ при $x = k\Delta x$.

Таблица 7.3

Переменный индекс k	$n = 1$				$n = 2$				$n = 3$				
	$f_k(\omega_1 t)$	$\sin^k \omega_1 t$	$\cos^k \omega_1 t$	$f_k(\omega_1 t) \sin^k \omega_1 t$	$f_k(\omega_1 t) \cos^k \omega_1 t$	$\sin^k 2\omega_1 t$	$\cos^k 2\omega_1 t$	$f_k(\omega_1 t) \sin^k 2\omega_1 t$	$f_k(\omega_1 t) \cos^k 2\omega_1 t$	$\sin^k 3\omega_1 t$	$\cos^k 3\omega_1 t$	$f_k(\omega_1 t) \sin^k 3\omega_1 t$	$f_k(\omega_1 t) \cos^k 3\omega_1 t$
1	52	+0,259	0,966	+13,5	+50,1	30	+0,500	+0,866	+26,0	+45,0	45	+0,707	+36,7
2	84	+0,500	+0,866	+42,0	+72,7	60	+0,866	+0,500	+87,0	+42,0	90	+1,0	+84,0
3	87	+0,707	+0,707	+61,3	+61,3	90	+1,0	0	+87,0	0	135	+0,707	+61,4
4	86	+0,866	+0,500	+74,3	+43,0	120	+0,866	-0,500	+74,4	-43,0	180	-1,0	-86
5	82	+0,966	+0,259	+79,0	+21,3	150	+0,500	+0,866	+41,0	-71,0	225	-0,707	-57,8
6	80	+1,0	0	+80,0	0	180	0	-1,0	0	-80,0	270	-1,0	-80,0
7	85	+0,966	-0,259	+82,0	-22,0	210	-0,500	-0,866	-42,0	-73,5	315	+0,707	+60,0
8	94	+0,866	-0,500	+81,2	-47,0	240	-0,866	+0,500	-81,4	-47,0	360	+1,0	+94,0
9	120	+0,707	+0,707	+69,2	-69,2	270	-1,0	0	-98,0	0	405	+0,707	+69,2
10	98	+0,500	-0,866	+49,0	-84,8	300	-0,866	+0,500	-84,8	+49,0	450	+1,0	+98
11	95	0,259	-0,966	+24,6	-91,8	330	+0,500	+0,866	-47,5	+82,3	495	-0,707	+67,1
12	88	0	-1,0	0	-88,0	360	0	+1,0	0	+88,3	540	-1,0	-88
13	78	-0,259	-0,966	-20,2	-75,2	390	+0,500	-0,866	+39,0	+67,5	585	-0,707	-55,1
14	64	-0,500	-0,866	-32,0	-55,3	420	+0,866	+0,500	+55,4	+32,0	630	-1,0	-64,0
15	43	-0,707	-0,707	-30,4	-30,4	450	+1,0	0	+43,0	0	675	-0,707	-30,4
16	25	-0,866	-0,500	-21,6	-12,5	480	-0,866	-0,500	+21,7	-12,5	720	+1,0	+25,0
17	8	-0,966	-0,259	-7,7	-2,1	510	+0,500	+0,866	+4,0	-6,9	765	+0,707	+5,7
18	-6	-1,0	0	+6,0	0	540	0	-1,0	0	+6,0	810	-1,0	-6,0
19	-20	-0,966	+0,259	+19,3	-5,2	570	-0,500	-0,866	+10,0	+17,3	855	-0,707	-14,1
20	-32	-0,866	+0,500	+27,7	-16,0	600	-0,866	+0,500	+27,7	+16,0	900	-1,0	-32,0
21	-41	-0,707	+0,707	+29,0	-29,0	630	-1,0	0	+41,0	0	945	-0,707	+29,9
22	-41	-0,500	+0,866	+20,5	-35,5	660	-0,866	-0,500	+15,5	-20,5	990	-1,0	+41,0
23	-28	-0,259	+0,966	+7,3	-27,0	690	+0,500	+0,866	+14,0	-24,2	1035	+0,707	+19,8
24	0	0	+1,0	0	0	720	0	+1,0	0	-24,2	1080	+1,0	0
Сумма	+1079		+654	-442,6					+238,1				+145,4
													-38,2

Точность разложения тем больше, чем больше число частей m . Если разлагаемая в ряд кривая обладает симметрией того или иного вида, то заранее известно, какие гармоники содержатся в ее разложении (см. п. 2 основных положений и соотношений), и только эти гармоники следует подсчитывать. В этом случае в зависимости от вида симметрии подсчет средних значений произведений $f_k(x) \cos_k nx$ и $f_k(x) \sin_k nx$ необходимо брать не за целый период, а соответственно за половину или четверть периода, а результат суммирования умножить соответственно на 2 или на 4.

Разделим период кривой на $m = 24$ частей. Значения ординат кривой в точках деления, равные $f_k \omega_1 t$, занесены в табл. 7.3. Там же приводятся значения $\sin_k n \omega_1 t$, $\cos_k n \omega_1 t$ и их произведения на $f_k(\omega_1 t)$ для трех гармоник ($n = 1, 2, 3$). В табл. 7.3 приведены также вычисления сумм по отдельным столбцам, которые используются при расчетах коэффициентов ряда по формулам (1):

$$I_0 = \frac{a_0}{2} = \frac{1}{m} \sum_{k=1}^{24} f_k(\omega_1 t) = \frac{1}{24} 1079 = 45;$$

$$a_1 = \frac{2}{m} \sum_{k=1}^{24} f_k(\omega_1 t) \cos_k \omega_1 t = \frac{2}{24} (-442,6) = -36,9;$$

$$b_1 = \frac{2}{m} \sum_{k=1}^{24} f_k(\omega_1 t) \sin_k \omega_1 t = \frac{2}{24} 654 = 54,5;$$

$$I_{1m} = c_1 = \sqrt{a_1^2 + b_1^2} = 65,6; \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{a_1}{b_1} = -\frac{36,9}{54,5} = -0,677;$$

$$\psi_1 = -34^\circ 10';$$

$$a_2 = \frac{2}{24} 66,8 = 5,6; \quad b_2 = \frac{2}{24} 238,1 = 19,8;$$

$$I_{2m} = c_2 = \sqrt{a_2^2 + b_2^2} = 20,6; \quad \operatorname{tg} \psi_2 = \frac{a_2}{b_2} = \frac{5,6}{19,8} = 0,283;$$

$$\psi_2 = 15^\circ 50';$$

$$a_3 = \frac{2}{24} (-38,2) = -3,2; \quad b_3 = \frac{2}{24} 145,4 = 12,1;$$

$$I_{3m} = c_3 = \sqrt{a_3^2 + b_3^2} = 12,5; \quad \operatorname{tg} \psi_3 = \frac{a_3}{b_3} = -\frac{3,2}{12,1} = -0,264;$$

$$\psi_3 = -14^\circ 50'.$$

Следовательно, заданная кривая выражается уравнением

$$i = [45 + 65,6 \sin(\omega_1 t - 34^\circ 10') + 20,6 \sin(2\omega_1 t + 15^\circ 50') + + 12,5 \sin(3\omega_1 t - 14^\circ 50')] \text{ ма.}$$

На рис. 7.8, а построены постоянная составляющая I_0 и отдельные гармоники i_1 , i_2 и i_3 кривой тока i . При графическом построении отдельных гармоник необходимо помнить, что масштаб по оси абсцисс для разных гармоник неодинаков. Например, для третьей гармоники масштаб абсцисс в три раза мельче, чем для основной гармоники и т. д. Спектральная характеристика построена на рис. 7.8, б.

Б. Расчет цепей, находящихся под воздействием периодических источников

7.8. К зажимам цепи рис. 7.9, параметры которой $r = 30$ ом, $L_1 = 60$ мГн, $r_1 = 18$ ом, приложено напряжение

$$u = [120 + 200 \sin \omega_1 t + 50 \sin (3\omega_1 t + 30^\circ)] \text{ в.}$$

Частота основной гармоники $f = 50$ Гц. Написать выражения мгновенных значений тока i , напряжения u_{ab} на участке ab . Определить показания приборов, если A_1 и V_1 — приборы магнитоэлектрической системы без выпрямления — показывают среднее значение, A_2 и V_2 — приборы индукционной системы — показывают действующее значение переменной составляющей, A_3 и V_3 — приборы тепловой системы — показывают действующее значение тока и напряжения. Вычислить активную мощность, расходуемую в цепи.

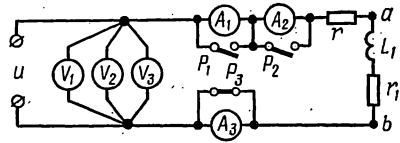


Рис. 7.9.

Примечание. Рубильники P_1 , P_2 и P_3 служат для включения в цепь того или иного амперметра.

Решение. Постоянные составляющие тока и напряжения на участке ab :

$$I_{(0)} = \frac{U_{(0)}}{r + r_1} = \frac{120}{30 + 18} = 2,5 \text{ а;}$$

$$U_{ab(0)} = r_1 I_{(0)} = 45 \text{ в.}$$

Расчет для первой гармоники

$$\dot{i}_{m(1)} = \frac{\dot{U}_{m(1)}}{Z_{(1)}} = \frac{200}{r + r_1 + j\omega_1 L_1} = 3,88 e^{-j21^\circ 25'} \text{ а.}$$

Напряжение на участке ab

$$\begin{aligned} \dot{U}_{abm(1)} &= \dot{i}_{m(1)} Z_{ab(1)} = \dot{i}_{m(1)} (r_1 + j\omega_1 L_1) = 3,88 e^{-j21^\circ 25'} \cdot 26,1 e^{j46^\circ 20'} = \\ &= 101 e^{j24^\circ 55'} \text{ в.} \end{aligned}$$

Расчет для третьей гармоники:

$$\dot{I}_{m(3)} = \frac{U_{m(3)}}{Z_{(3)}} = \frac{50e^{j3\omega t}}{r + r_1 + j3\omega_1 L_1} = 0,674e^{-j19^\circ 40'} \text{ а};$$

$$\dot{U}_{abm(3)} = \dot{I}_{m(3)} Z_{(3)} = \dot{I}_{m(3)} (r_1 + j3\omega_1 L_1) = 40e^{j52^\circ 40'} \text{ в}.$$

Уравнения для i и u_{ab} :

$$i = [2,5 + 3,88 \sin(\omega_1 t - 21^\circ 25') + 0,674 \sin(3\omega_1 t - 19^\circ 40')] \text{ а};$$

$$u_{ab} = [45 + 101 \sin(\omega_1 t + 24^\circ 55') + 40 \sin(3\omega_1 t + 52^\circ 40')] \text{ в}.$$

Наконец, найдем показания приборов:

амперметр A_1 $I_0 = 2,5 \text{ а};$

вольтметр V_1 $U_0 = 120 \text{ в};$

амперметр A_2 $I_2 = \sqrt{\frac{3,88^2}{2} + \frac{0,674^2}{2}} = 2,78 \text{ а};$

вольтметр V_2 $U_2 = \sqrt{\frac{200^2}{2} + \frac{50^2}{2}} = 146 \text{ в};$

амперметр A_3 $I_3 = \sqrt{2,5^2 + \frac{3,88^2}{2} + \frac{0,674^2}{2}} = 3,74 \text{ а};$

вольтметр V_3 $U_3 = \sqrt{120^2 + \frac{200^2}{2} + \frac{50^2}{2}} = 189 \text{ в}.$

Мощность, расходуемая в цепи, определяется по формуле (7.11а)

$$P = U_{(0)} I_{(0)} + U_{(1)} I_1 \cos \varphi_{(1)} + U_{(3)} I_3 \cos \varphi_{(3)} = 120 \cdot 2,5 + \\ + \frac{200}{\sqrt{2}} \cdot \frac{3,88}{\sqrt{2}} \cos 21^\circ 55' + \frac{50}{\sqrt{2}} \cdot \frac{0,674}{\sqrt{2}} \cos 49^\circ 40' = 670 \text{ вт}$$

7.9 Цепь, состоящая из последовательно соединенных активного сопротивления $r=8 \text{ ом}$ и индуктивности $L=15 \text{ мГн}$, подключена к периодическому напряжению с действующим значением 220 в , в разложении которого отсутствуют четные гармоники. Действующие значения гармоник связаны соотношениями $U_3 = 0,4 U_1$, $U_5 = 0,2 U_1$ и $U_2 = 0,05 U_1$.

Гармониками порядка выше седьмого можно пренебречь. Найти действующее значение тока и коэффициент мощности цепи. Частота первой гармоники $f=50 \text{ Гц}$.

7.10. К цепи из последовательно соединенных активного сопротивления и индуктивности подключено напряжение $u = (30 + 60 \sin \omega_1 t) \text{ в}$. Найти действующее значение тока и мощность, расходуемую в цепи, если $r=3 \text{ ом}$ и $\omega_1 L=4 \text{ ом}$. Написать выражения мгновенных значений тока и напряжения на индуктивности. Построить кривые i , u , u_L .

7.11. Цепь, составленная из последовательно соединенных активного сопротивления и конденсатора, находится под действием напряжения

$$u = \left[100 + 200 \sin \omega_1 t + 30 \sin \left(3\omega_1 t - \frac{\pi}{2} \right) \right] \text{ в.}$$

Параметры цепи $r = 5 \text{ ом}$, $\frac{1}{\omega_1 C} = 3 \text{ ом}$.

Выразить ток i и напряжение на зажимах конденсатора u_C как функции времени. Вычислить действующие значения напряжений, тока и мощности, расходуемую в цепи. Определить показание вольтметра, подключенного к конденсатору, если это прибор: а) магнитоэлектрической (без выпрямления) и б) электродинамической систем.

7.12. На рис. 7.10 изображена схема цепи, параметры которой при основной частоте имеют $\omega_1 L = 12 \text{ ом}$ и $\frac{1}{\omega_1 C} = 30 \text{ ом}$, а активные сопротивления: $r_1 = 6 \text{ ом}$, $r_2 = 5 \text{ ом}$, $r_3 = 20 \text{ ом}$. Приложенное к цепи напряжение $u = U_0 + U_{m(1)} \sin \omega_1 t + U_{m(3)} \sin (3\omega_1 t + \psi_3)$, где $U_{(0)} = 30 \text{ в}$, $U_{m(1)} = 100 \text{ в}$, $U_{m(3)} = 40 \text{ в}$, и $\psi_{(3)} = 20^\circ$.

Записать уравнение мгновенного значения тока неразветвленного участка цепи. Определить действующее значение каждого тока. Вычислить мощность, расходуемую в цепи.

Решение. Расчет постоянной составляющей.

Эквивалентное сопротивление цепи и величины постоянного тока в неразветвленной части цепи и в ветвях с сопротивлениями r_2 и r_3 определяются по формулам:

$$r_{s(0)} = r_1 + \frac{r_2 r_3}{r_2 + r_3} = 10 \text{ ом};$$

$$I_{1(0)} = \frac{U_{(0)}}{r_{s(0)}} = \frac{30}{10} = 3 \text{ а};$$

$$I_2(0) = I_{1(0)} \frac{r_3}{r_2 + r_3} = 2,4 \text{ а}; \quad I_3(0) = I_{1(0)} - I_2(0) = 0,6;$$

$$I_4(0) = 0.$$

Расчет для первой гармоники. Определим комплексное сопротивление трех параллельных ветвей:

$$\begin{aligned} \frac{1}{Z_{ab(1)}} &= \frac{1}{Z_2(1)} + \frac{1}{Z_3(1)} + \frac{1}{Z_4(1)} = \frac{1}{5 + j12} + \frac{1}{20} + \frac{1}{-j30} = \\ &= (79,6 - j37,7) 10^{-3} \text{ сим}, \end{aligned}$$

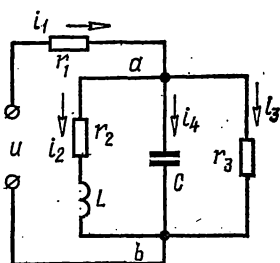


Рис. 7.10

отсюда

$$Z_{ab(1)} = \frac{1}{(79,6 - j37,7) \cdot 10^{-3}} = 11,4e^{j25^{\circ}20'} = (10,25 + j4,83) \text{ ом.}$$

Комплексное сопротивление всей цепи

$$Z_9(1) = r_1 + Z_{ab(1)} = 16,25 + j4,83 = 17e^{j16^{\circ}30'} \text{ ом.}$$

Комплексные (максимальные) токи в неразветвленной части цепи, напряжение на параллельных ветвях и токи в них:

$$\dot{I}_{1m(1)} = \frac{100}{17e^{j16^{\circ}30'}} = 5,88e^{-j16^{\circ}30'} \text{ а;}$$

$$\dot{U}_{abm(1)} = \dot{I}_{1m(1)} Z_{ab(1)} = 5,88e^{-j16^{\circ}30'} \cdot 11,4e^{j25^{\circ}20'} = 67e^{j8^{\circ}50'} \text{ в;}$$

$$\dot{I}_{2m(1)} = \frac{\dot{U}_{abm(1)}}{Z_2(1)} = \frac{67e^{j8^{\circ}50'}}{5 + j12} = 5,15e^{-j58^{\circ}30'} \text{ а;}$$

$$\dot{I}_{3m(1)} = \frac{\dot{U}_{abm(1)}}{Z_3(1)} = \frac{67e^{j8^{\circ}50'}}{20} = 3,35e^{j8^{\circ}50'} \text{ а;}$$

$$\dot{I}_{4m(1)} = \frac{\dot{U}_{abm(1)}}{Z_4(1)} = \frac{67e^{j8^{\circ}50'}}{-j30} = 2,23e^{j98^{\circ}50'} \text{ а.}$$

Расчет для третьей гармоники проводится аналогично:

$$Z_1(3) = 6 \text{ ом; } Z_2(3) = r_2 + j3\omega_1 L = 5 + j36 = 36,5e^{j82^{\circ}10'} \text{ ом;}$$

$$Z_3(3) = 20 \text{ ом; } Z_4(3) = -j \frac{1}{3\omega_1 C} = -j \frac{1}{3} 30 = -j10 \text{ ом;}$$

$$\frac{1}{Z_{ab(3)}} = \frac{1}{5 + j36} + \frac{1}{20} + \frac{1}{-j10} = (53,77 + j72,8) 10^{-3} \text{ сим;}$$

$$Z_{ab(3)} = 6,56 - j8,9 = 11,05e^{-j53^{\circ}35'} \text{ ом;}$$

$$Z_9(3) = Z_1(3) + Z_{ab(3)} = 12,56 - j8,9 = 15,35e^{-j35^{\circ}5'} \text{ ом;}$$

$$\dot{I}_{1m(3)} = \frac{40e^{j20^{\circ}}}{15,35e^{-j35^{\circ}5'}} = 2,6e^{j55^{\circ}5'} \text{ а;}$$

$$\dot{U}_{abm(3)} = 2,6e^{j55^{\circ}5'} \cdot 11,05e^{-j53^{\circ}35'} = 28,7e^{j1^{\circ}30'} \text{ а;}$$

$$\dot{I}_{2m(3)} = \frac{\dot{U}_{abm(3)}}{Z_2(3)} = 0,79e^{-j80^{\circ}40'} \text{ а;}$$

$$\dot{I}_{3m(3)} = \frac{\dot{U}_{abm(3)}}{Z_3(3)} = 1,44e^{j1^{\circ}30'} \text{ а;}$$

$$i_{4m(3)} = \frac{\dot{U}_{abm(3)}}{Z_4(3)} = 2,87e^{j91^\circ 30'} \text{ а.}$$

Уравнение тока в неразветвленной части цепи имеет вид

$$i_1 = [3 + 5,88 \sin(\omega_1 t - 16^\circ 30') + 2,6 \sin(3\omega_1 t + 55^\circ 5')] \text{ а.}$$

Действующее значение каждого тока определяется по формуле (7.9):

$$I_1 = \sqrt{3^2 + \frac{5,88^2 + 2,6^2}{2}} = 5,45 \text{ а;}$$

$$I_2 = \sqrt{2,4^2 + \frac{5,15^2 + 0,79^2}{2}} = 4,4 \text{ а;}$$

$$I_3 = \sqrt{0,6^2 + \frac{3,52^2 + 1,44^2}{2}} = 2,64 \text{ а;}$$

$$I_4 = \sqrt{\frac{2,23^2 + 2,87^2}{2}} = 2,57 \text{ а.}$$

Мощность, расходуемая в цепи, определяется по формуле (7.11, а):

$$P = 30 \cdot 3 + \frac{1}{2} \cdot 100 \cdot 5,88 \cdot \cos 16^\circ 30' + \frac{1}{2} 40 \cdot 2,6 \cos 35^\circ 5' = 415 \text{ вт.}$$

Проверка:

$$P = I_1^2 r_1 + I_2^2 r_2 + I_3^2 r_3 = 5,45^2 \cdot 6 + 4,4^2 \cdot 5 + 2,64^2 \cdot 20 = 178 + 97 + 140 = 415 \text{ вт.}$$

7.13. В схеме рис. 7.11 ток, проходящий по ветви, содержащей индуктивность, имеет постоянную составляющую $I_{2(0)} = 1 \text{ а}$, основную гармонику $I_{2(1)} = 0,8 \text{ а}$ и третью гармонику $I_{2(3)} = 0,3 \text{ а}$. Найти действующее значение приложенного к цепи напряжения и мощность, расходуемую в ней, если $r_1 = 100 \text{ ом}$, $r_2 = 80 \text{ ом}$, $L_2 = 0,02 \text{ гн}$ и $C_3 = 1 \text{ мкф}$. Частота основной гармоники $f = 800 \text{ гц}$.

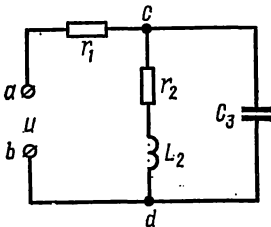


Рис. 7.11

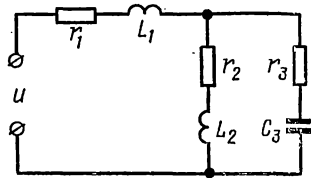


Рис. 7.12

7.14. Найти токи, проходящие в отдельных ветвях (рис. 7.12), если к цепи приложено напряжение $u = (150 + 100 \sin \omega_1 t + 50 \sin 3\omega_1 t) \text{ в}$. Даны: $r_1 = 500 \text{ ом}$, $\omega_1 L_1 = 1000 \text{ ом}$, $r_2 = 1000 \text{ ом}$,

$\omega_1 L_2 = 500 \text{ ом}$, $r_3 = 600 \text{ ом}$ и $\frac{1}{\omega_1 C_3} = 400 \text{ ом}$. Чему равна мощность, расходуемая в цепи?

7.15. Для питания нагрузочного сопротивления $r_2 = 600 \text{ ом}$ от источника двухполупериодного выпрямленного синусоидального напряжения (рис. 7.13, а) применен фильтр, сопротивления элементов которого при частоте ω_1 равны $r_1 = 100 \text{ ом}$, $\omega_1 L_1 = 3000 \text{ ом}$, $\frac{1}{\omega_1 C} = 20 \text{ ом}$.

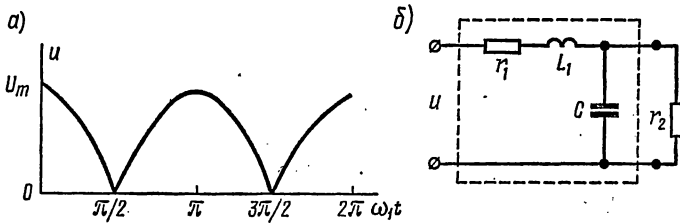


Рис. 7.13

Определить отношение постоянной составляющей тока, проходящего через сопротивление r_2 , к действующему значению всего тока, проходящего через то же сопротивление при подключении нагрузочного сопротивления через фильтр (рис. 7.13, б), и сравнить с отношением тех же величин при непосредственном подключении r_2 к источнику однофазного двухполупериодного выпрямленного напряжения. Разложение в ряд заданной кривой имеет вид

$$u = \frac{4U_m}{\pi} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{1 \cdot 3} \cos 2\omega_1 t - \frac{1}{3 \cdot 5} \cos 4\omega_1 t + \frac{1}{5 \cdot 7} \cos 6\omega_1 t - \dots \right).$$

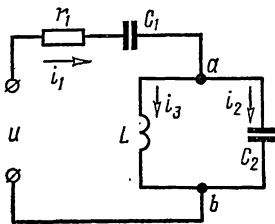


Рис. 7.14

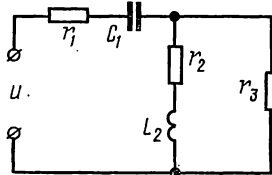


Рис. 7.15

7.16. Подобрать емкости C_1 и C_2 так, чтобы цепь рис. 7.14 была настроена в резонанс напряжений для основной гармоники и не пропускала ток третьей гармоники. Угловая частота тока основной гармоники $\omega_1 = 5000 \text{ сек}^{-1}$. Параметры цепи: $r_1 = 50 \text{ ом}$ и $L = 2 \text{ мГн}$. Написать выражения мгновенных значений токов и напряжения на параллельном участке цепи, если к цепи приложено напряжение

$u = (20 \sin \omega_1 t + 10 \sin 3\omega_1 t) \text{ в}$. Подсчитать действующие значения токов, напряжение на параллельном участке и мощность, расходуемую в цепи.

7.17. К цепи, состоящей из последовательно соединенных $r = 100 \text{ ом}$, $L = 63,7 \text{ мГн}$ и $C = 17,7 \text{ мкФ}$, подведено напряжение $u = (10 \sin \omega_1 t + 5 \sin 3\omega_1 t + 2 \sin 9\omega_1 t) \text{ в}$. Частота основной гармоники $f_1 = 50 \text{ Гц}$. Чему равны активная, реактивная и полная мощности?

7.18. К цепи рис. 7.15 подведено напряжение $u = (50 \sin \omega_1 t + 22 \sin 2\omega_1 t) \text{ в}$. Сопротивления элементов цепи (для основной гармоники) равны: $r_1 = 12 \text{ ом}$, $\frac{1}{\omega_1 C_1} = 10 \text{ ом}$, $r_2 = 12 \text{ ом}$, $\omega_1 L_2 = 8 \text{ ом}$.

Определить сопротивление r_3 и действующее значение тока в каждой ветви, если известно, что на второй гармонике цепь находится в режиме резонанса.

7.19. Напряжение, приложенное к двум индуктивно связанным контурам (рис. 7.16), изменяется по закону $u = (100 + 70,7 \sin \omega_1 t) \text{ в}$. Параметры контуров: $r_1 = 40 \text{ ом}$, $r_2 = 60 \text{ ом}$, $\omega_1 L_1 = 30 \text{ ом}$, $\omega_1 L_2 = 60 \text{ ом}$, $\omega_1 M = 20 \text{ ом}$. Найти выражения мгновенных токов в каждом из контуров.

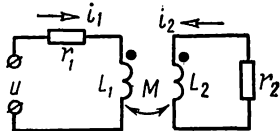


Рис. 7.16

Р е ш е н и е. Все токи по величине и фазе определяются для каждой гармоники в отдельности.

Постоянная составляющая тока, проходящая в первом контуре, во вторичном контуре э.д.с. не наводит.

Уравнения для двух контуров (для основной гармоники) имеют вид:

$$\dot{U}_1 = \dot{I}_1 (r_1 + j\omega_1 L_1) + j\omega_1 M \dot{I}_2;$$

$$\dot{I}_2 (r_2 + j\omega_1 L_2) + j\omega_1 M \dot{I}_1 = 0$$

или

$$(40 + j30) \dot{I}_1 + j20 \dot{I}_2 = \frac{70,7}{\sqrt{2}};$$

$$(60 + j60) \dot{I}_2 + j20 \dot{I}_1 = 0.$$

Решая эти уравнения, получим:

$$\dot{I}_1 = 0,984 e^{-j31^\circ 30'} \text{ а}; \quad \dot{I}_2 = 0,232 e^{-j166^\circ 30'} \text{ а}.$$

Постоянная составляющая тока в первом контуре

$$I_0 = \frac{U_0}{r_1} = \frac{100}{40} = 2,5 \text{ а}.$$

Мгновенный ток в первом контуре

$$i_1 = [2,5 + 0,984 \sqrt{2} \sin(\omega_1 t - 31^\circ 30')] \text{ а}$$

и соответственно во втором

$$i_2 = 0,232 \sqrt{2} \sin(\omega_1 t - 166^\circ 30') \text{ а.}$$

7.20. Найти действующие значения токов для контуров в цепи рис. 7.17, если $u = (20 \sin \omega_1 t + 5 \sin 3\omega_1 t) \text{ в.}$ Параметры цепи:

$$r_1 = 2 \text{ ом}, \omega_1 L_1 = \omega_1 L_2 = 4 \text{ ом}, r_2 = 3 \text{ ом}, \frac{1}{\omega_1 C} = 6 \text{ ом} \text{ и}$$

$$\omega_1 M = 1 \text{ ом.}$$

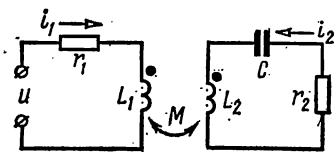


Рис. 7.17

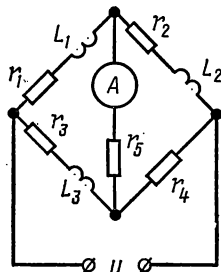


Рис. 7.18

7.21. Определить показание теплового амперметра, включенного в диагональ моста (рис. 7.18), если приложенное напряжение $u = (30 + 60 \sin \omega_1 t + 15 \sin 3\omega_1 t) \text{ в,}$ а сопротивления элементов цепи для основной частоты: $r_1 = 30 \text{ ом}, \omega_1 L_1 = 50 \text{ ом}, r_4 = 30 \text{ ом}, \omega_1 L_2 = 30 \text{ ом}, r_3 = 40 \text{ ом}, \omega_1 L_3 = 10 \text{ ом}, r_4 = 30 \text{ ом}, r_5 = 60 \text{ ом.}$

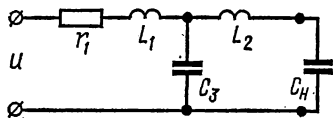


Рис. 7.19

7.22. К цепи рис. 7.19 подводится напряжение $u = (20 \sin \omega_1 t + 10 \sin 3\omega_1 t) \text{ в.}$ Сопротивления элементов цепи для основной частоты: $r_1 = 5 \text{ ом}, \omega_1 L_1 = 10 \text{ ом}, \omega_1 L_2 = 10 \text{ ом}, \frac{1}{\omega_1 C_3} = 15 \text{ ом},$ а сопротивление нагрузки $\frac{1}{\omega_1 C_H} = 24 \text{ ом.}$ Вычислить отношение

действующего значения напряжения на нагрузке к действующему значению приложенного напряжения.

7.23. В схеме рис. 7.20 известны $r_1 = 12 \text{ ом}, \frac{1}{\omega_1 C} = 18 \text{ ом}, r_2 = 14 \text{ ом}, \omega_1 L = 8 \text{ ом.}$ Определить показания вольтметра электродинамической системы, если

$$u = [50 + 80 \cos \omega_1 t - 30 \sin(2\omega_1 t + 60^\circ)] \text{ в.}$$

Считать, что сопротивление вольтметра во много раз превышает сопротивление каждого из элементов схемы. Что покажет амперметр

электродинамической системы, если он включен к тем же зажимам, что и вольтметр?

7.24. В цепи рис. 7.21 на частоте $\omega_1 = 9600 \text{ сек}^{-1}$ имеет место резонанс токов, а на третьей гармонике наступает резонанс напряжений. Определить индуктивности катушек L_1 и L_2 , если $r_1 = 10 \text{ ом}$, $r_2 = 5 \text{ ом}$ и $C = 2,5 \text{ мкф}$.

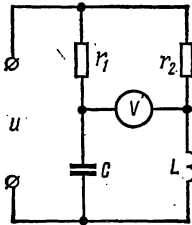


Рис. 7.20

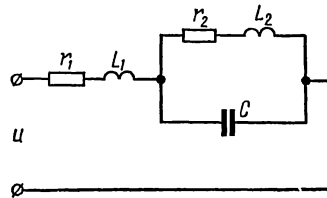


Рис. 7.21

В. Коэффициенты, характеризующие форму периодической несинусоидальной кривой

7.25. Вычислить коэффициенты формы, амплитуды и искажения кривой напряжения, уравнение которой

$$u = U_{1m} \sin \omega_1 t + U_{2m} \sin 2\omega_1 t \quad (U_{1m} = 100 \text{ в} \text{ и } U_{2m} = 30 \text{ в}).$$

Решение. Сначала вычислим действующее значение напряжения по формуле (7.9):

$$U = \sqrt{\frac{100^2}{2} + \frac{30^2}{2}} = 73,8 \text{ в}.$$

Затем найдем среднее по модулю значение напряжения. Ввиду симметрии кривой u и положительности ее значений за половину периода (рис. 7.22) для его определения достаточно ограничиться половиной периода:

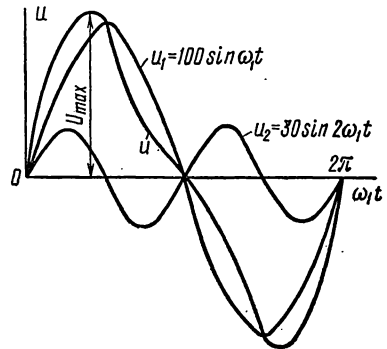


Рис. 7.22

$$\begin{aligned} U_{\text{ср}} &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} (U_{1m} \sin \omega_1 t + U_{2m} \sin 2\omega_1 t) d\omega_1 t = \\ &= -\frac{1}{\pi} \left[U_{1m} \cos \omega_1 t + \frac{U_{2m}}{2} \cos 2\omega_1 t \right]_{\omega_1 t=0}^{\omega_1 t=\pi} = \frac{2U_{1m}}{\pi} = 63,7 \text{ в}. \end{aligned}$$

Теперь определим максимальную ординату кривой u :

$$\frac{du}{d(\omega_1 t)} = U_{1m} \cos \omega_1 t + 2U_m \cos 2\omega_1 t = 0,$$

или, так как $\cos 2\omega t = 2 \cos^2 \omega_1 t - 1$,

то

$$4U_{2m} \cos^2 \omega_1 t + U_{1m} \cos \omega_1 t - 2 = 0,$$

$$120 \cos^2 \omega_1 t + 100 \cos \omega_1 t - 2 = 0,$$

откуда, решая квадратное уравнение, получим:

$$\cos \omega_1 t = 0,404; \quad \omega_1 t = 66^\circ 10'$$

(знак минус перед корнем не годится, так как в этом случае косинус окажется больше единицы), а

$$U_{\max} = [100 \sin \omega_1 t + 30 \sin 2\omega_1 t]_{\omega_1 t = 66^\circ 10'} = 116,7 \text{ в.}$$

Наконец, по формулам (7.12)—(7.14) вычислим искомые коэффициенты:

$$k_\phi = \frac{73,8}{63,7} = 1,16; \quad k_a = \frac{116,7}{73,8} = 1,58;$$

$$k_n = \frac{\sqrt{2}}{73,8} = 0,96.$$

7.26. Найти коэффициенты формы, амплитуды и искажения кривой напряжения $u = U_{1m} \sin \omega_1 t - U_{3m} \sin 3\omega_1 t$ ($U_{1m} = 100$ в; $U_{3m} = 30$ в).

КАТУШКИ И ТРАНСФОРМАТОРЫ С ФЕРРОМАГНИТНЫМИ СЕРДЕЧНИКАМИ

ОСНОВНЫЕ ПОЛОЖЕНИЯ И СООТНОШЕНИЯ

1. Цепи с ферромагнитными сердечниками (цепи «со сталью»). В таких цепях магнитный поток в основном проходит по одному или нескольким сердечникам.

Особенности цепей с ферромагнитными сердечниками:

а) нет прямой пропорциональности между магнитным потоком Φ и током i . Это приводит к искажению форм кривых тока и э.д.с.; индуктивность не является постоянной величиной и зависит от тока.

Уравнение $u = ir + L \frac{di}{dt}$, справедливое для катушек без ферромагнитного сердечника, должно быть заменено уравнением

$$u = ir + \frac{d\Psi}{dt}; \quad (8.1)$$

б) замыкание потока через сердечник связано при переменном токе с затратой энергии, превращаемой в тепло.

2. Потери в сердечнике. Потери мощности на магнитный гистерезис определяются по эмпирической формуле

$$\frac{P}{G} = \alpha B_m \frac{f}{100} + \beta B_m^2 \frac{f}{100}. \quad (8.2)$$

Для определения индукций в пределах от 1 до 1,6 тл (от 10 000 до 16 000 гс) вместо предыдущей формулы можно пользоваться следующей формулой:

$$\frac{P}{G} = \sigma_r B_m^2 \frac{f}{100}. \quad (8.3)$$

Потери на вихревые токи выражаются так:

$$\frac{P}{G} = \sigma_v B_m^2 \left(\frac{f}{100} \right)^2. \quad (8.4)$$

В формулах (8.1)—(8.4):

$\frac{P}{G}$ — удельные потери, отнесенные к 1 кг веса сердечника, *вт*;

f — частота, *гц*;

B_m — амплитуда магнитной индукции, *тл*;

α , β , σ_r , σ_v — коэффициенты, зависящие от марки материала, формы и размеров сердечников. Их значения для листовых сердечников двух распространенных марок магнитных сталей приведены в табл. 8.1.

Таблица 8.1

Сорт стали	Толщина листов, мм	α	β	σ_r	σ_v	Удельные потери при $B_m=1\text{тл}$ (вт/кг)
Э11	1,0	0,9	3,5	4,4	22,4	7,8
	0,5	0,9	3,5	4,4	5,6	3,6
	0,35	0,9	3,8	4,7	3,2	3,15
Э42	0,5	0,4	2,6	3,0	1,2	1,8
	0,35	0,3	2,1	2,4	0,6	1,35

3. В катушке с ферромагнитным сердечником — дросселем (рис. 8.1) различают: Φ_0 — основной магнитный поток линии магнитной индукции которого замыкаются через стальной сердечник; Φ_s — поток рассеяния, линии которого замыкаются через воздух. С основ-

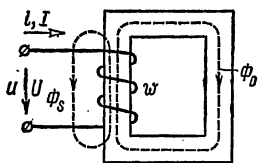


Рис. 8.1

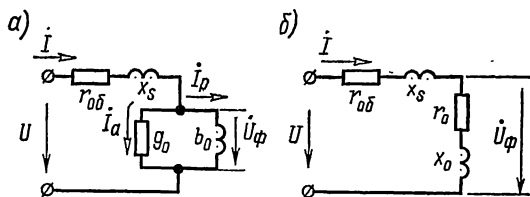


Рис. 8.2

ным магнитным потоком связывают основную индуктивную проводимость b_0 параллельной схемы замещения катушки с ферромагнитным сердечником (рис. 8.2, а) или основное индуктивное сопротивление x_0 последовательной схемы замещения катушки (рис. 8.2, б).

С магнитным потоком рассеяния связывают индуктивность рассеяния L_s и соответствующее индуктивное сопротивление рассеяния x_s . Потери в сердечнике учитываются активной проводимостью g_0 параллельной схемы замещения или активным сопротивлением r_0 последовательной схемы замещения; потери в обмотке катушки (сопротивление провода обмотки) определяются сопротивлением $r_{0б}$.

Напряжение, приложенное к катушке с ферромагнитным сердечником, определяется формулой*

$$\dot{U} = \dot{i}r_{0б} + j\omega L_s \dot{i} + U_{\Phi}. \quad (8.5)$$

* Расчет пп. 3 и 4 проводится в приближении замены несинусоидальных токов, напряжений, индукций, потоков и т. д. эквивалентными синусоидальными функциями.

Здесь напряжение U_Φ связано с изменением основного магнитного потока катушки:

$$U_\Phi = 4,44f\omega\Phi_m = 4,44f\omega SB_m. \quad (8.6)$$

Реактивная составляющая тока I_p и активная составляющая тока I_a схемы замещения (рис. 8.2, а) выражаются формулами:

$$I_p = U_\Phi b_0; \quad I_a = U_\Phi g_0. \quad (8.7)$$

На рис. 8.3 начерчена векторная диаграмма катушки со стальным сердечником.

Потери в сердечнике P_Φ и в обмотке $P_{об}$ рассчитываются по формулам:

$$P_\Phi = U_\Phi^2 g_0 = I^2 r_0; \quad P_{об} = I^2 r_{об}. \quad (8.8)$$

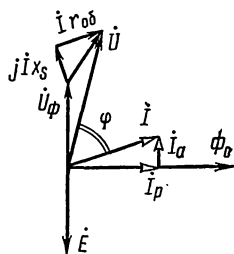


Рис. 8.3

4. Трансформатор. В трансформаторе с ферромагнитным сердечником (рис. 8.4, а) различают основной магнитный поток Φ_0 , замыкающийся по сердечнику и сцепленный как с первой w_1 , так и со второй w_2 обмотками трансформатора, и магнитные потоки рассеяния Φ_{1s} и Φ_{2s} , замыкающиеся по воздуху первой и второй обмоток.

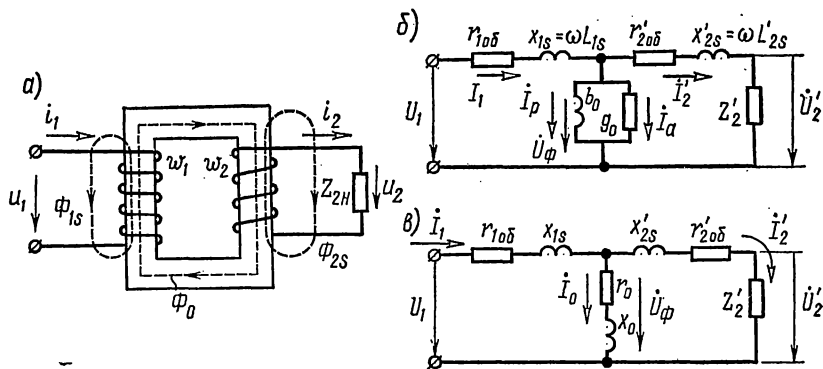


Рис. 8.4

Схема замещения трансформатора с ферромагнитным сердечником, приведенная к первичной обмотке, показана на рис. 8.4, б. Здесь $r_{1об}$ и $r_{2об}$ — сопротивления провода соответственно первой и второй обмоток трансформатора; L_{1s} и L_{2s} — индуктивности рассеяния обмоток; b_0 — основная индуктивная проводимость катушки; g_0 — активная проводимость, учитывающая потери в сердечнике. Последовательный вариант схемы замещения трансформатора с основным индуктивным сопротивлением x_0 и сопротивлением потерь в сердечнике r_0 показан на рис. 8.4, в. Штрихами помечены на схемах замещения величины,

измененные в соответствии с правилами приведения к первичной обмотке:

$$\left. \begin{aligned} \dot{U}'_2 &= \frac{\omega_1}{\omega_2} \dot{U}_1; & \dot{I}'_2 &= \frac{\omega_2}{\omega_1} \dot{I}_2; \\ Z'_2 &= \left(\frac{\omega_1}{\omega_2}\right)^2 Z_2; & r'_2 &= \left(\frac{\omega_1}{\omega_2}\right)^2 r_2; & x'_2 &= \left(\frac{\omega_1}{\omega_2}\right)^2 x_2. \end{aligned} \right\} \quad (8.9)$$

Отношение ω_1/ω_2 называют *коэффициентом трансформации*.

При синусоидальном напряжении уравнения Кирхгофа в символической форме для первичной и вторичной обмоток трансформатора имеют вид:

$$\dot{U}_1 = r_{106} \dot{I}_1 + j\omega L_{1s} \dot{I}_1 + \dot{U}_\Phi; \quad (8.10)$$

$$\left. \begin{aligned} \dot{U}_\Phi &= r'_{206} \dot{I}'_2 + j\omega L'_{2s} \dot{I}'_2 + \dot{U}'_2; \\ \dot{U}'_2 &= \dot{I}'_2 Z'_2. \end{aligned} \right\} \quad (8.11)$$

УПРАЖНЕНИЯ И ЗАДАЧИ

А. Потери в катушке со стальным сердечником; ее эквивалентная схема и векторная диаграмма

8.1. Катушка со стальным сердечником (см. рис. 8.1), предназначенная для работы при нормальном напряжении $U = 100$ в переменного тока промышленной частоты $f = 50$ гц, имеет обмотку с числом витков $\omega = 1000$ и активным сопротивлением $r_{06} = 100$ ом.

Сердечник катушки весом $G = 1,8$ кг набран из пластин стали Э42 толщиной 0,5 мм, кривые удельных потерь которой заданы графиками рис. 8.5. Общее сечение стали сердечника $3,2$ см². Пренебрегая магнитным рассеянием, определить параметры параллельной схемы замещения катушки (см. рис. 8.2, а).

Решение. По условию задачи пренебрегаем

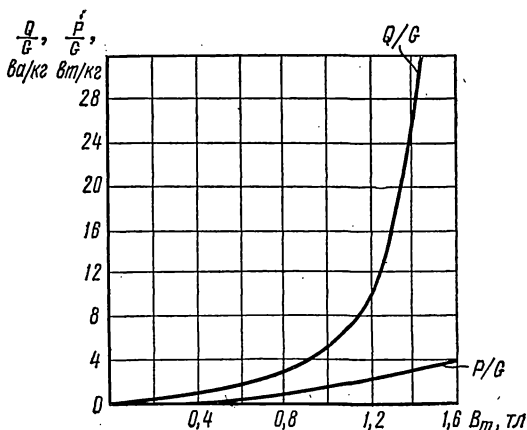


Рис. 8.5

магнитным рассеянием $x_s = 0$.

По схеме замещения (см. рис. 8.2, а) напряжение катушки

$$\dot{U} = \dot{I} r_{06} + \dot{U}_\Phi;$$

В первом приближении полагаем $\dot{U}_\Phi = U = 100$ в. По формуле (8.6) максимальное значение магнитной индукции (в первом приближении)

$$B_m^{(1)} = \frac{U_\Phi}{4,44f\omega S} = \frac{100}{4,44 \cdot 50 \cdot 1000 \cdot 3,2 \cdot 10^{-4}} = 1,4 \text{ тл.}$$

По кривым удельных потерь (см. рис. 8.5) определяем соответствующие значения удельных активной P/G и реактивной Q/G мощностей, связанных с перемагничиванием сердечника, которые в первом приближении составляют $P^{(1)}/G=3$ вт/кг и $Q^{(1)}/G=26$ ва/кг. Умножая на вес сердечника, определяем в рассматриваемом приближении:

$$P_a^{(1)} = 3 \cdot 1,8 = 5,4 \text{ вт}; \quad Q^{(1)} = 26 \cdot 1,8 = 46,8 \text{ ва.}$$

Вычисляем активную I_a и реактивную I_p составляющие тока схемы (см. рис. 8.2, а).

В первом приближении

$$I_a^{(1)} = \frac{P^{(1)}}{U_\Phi^{(1)}} = \frac{5,4}{100} = 0,054 \text{ а}; \quad I_p^{(1)} = \frac{Q^{(1)}}{U_\Phi^{(1)}} = \frac{46,8}{100} = 0,468 \text{ а.}$$

В рассматриваемом приближении ток катушки

$$\dot{I}^{(1)} = I_a^{(1)} + jI_p^{(1)} = (0,054 - j0,468) \text{ а,}$$

а напряжение

$$\dot{U}^{(1)} = (0,054 - j0,468) \cdot 100 + 100 = 115 e^{-j23^\circ 55'} \text{ в}$$

на 15% превосходит по модулю точное значение $\dot{U} = 100$ в.

Для уточнения во втором приближении зададим меньшие значения

$$B_m^{(2)} = 1,3 \text{ тл} \quad \text{и} \quad U_\Phi^{(2)} = 4,44f\omega S B_m = 93 \text{ в.}$$

Повторяя аналогично расчет во втором приближении, определим

$$\frac{P^{(2)}}{G} = 2,5 \text{ вт/кг}; \quad \frac{Q^{(2)}}{G} = 16 \text{ ва/кг}; \quad P^{(2)} = 4,5 \text{ вт}; \quad Q^{(2)} = 28,8 \text{ ва};$$

$$I_a^{(2)} = \frac{P^{(2)}}{U_\Phi^{(2)}} = 0,0484 \text{ а}; \quad I_p^{(2)} = \frac{Q^{(2)}}{U_\Phi^{(2)}} = 0,31 \text{ а};$$

$$\dot{I}^{(2)} = (0,0484 - j0,31) \text{ а};$$

$$\dot{U}^{(2)} = (0,0484 - j0,31) \cdot 100 + 93 = 97,8 - j31 = 102,5 e^{-j17^\circ 35'} \text{ в.}$$

Напряжение отличается от точного значения $\dot{U} = 100$ в на 2,5%.

В последнем приближении параметры схемы замещения (см. рис. 8.2, а) катушки в номинальном режиме:

$$g_0 = \frac{I_a^{(2)}}{U_\Phi^{(2)}} = \frac{0,0484}{93} = 0,52 \cdot 10^{-3} \text{ с.и.м.};$$

$$b_0 = \frac{I_p}{U_\Phi^{(2)}} = \frac{0,31}{93} = 3,33 \cdot 10^{-3} \text{ с.и.м.}$$

8.2. Известно, что при $f_1 = 50$ гц потери в стали $P_{1\text{ст}} = 1,5$ вт/кг, а при $f_2 = 100$ гц $P_{2\text{ст}} = 4$ вт/кг. Разделить потери в стали на потери от вихревых токов и от магнитного гистерезиса, считая, что магнитная индукция остается неизменной.

Решение. Потери в стали на магнитный гистерезис при $B_m = \text{const}$ прямо пропорциональны частоте f [см. формулы (8.2) и (8.3)], а потери на вихревые токи пропорциональны квадрату частоты [см. формулу (8.4)], поэтому

$$P_{1\text{ст}} = af_1 + bf_1^2 = 50a + 2500b = 1,5 \text{ вт/кг};$$

$$P_{2\text{ст}} = af_2 + bf_2^2 = 100a + 10\,000b = 4 \text{ вт/кг},$$

где a и b — постоянные коэффициенты, зависящие от сорта стали и величины магнитной индукции.

Решая эти два уравнения, найдем:

$$a = 0,02 \text{ дж/кг}; \quad b = 2 \cdot 10^{-4} \text{ дж} \cdot \text{сек/кг}.$$

Искомые величины:

при $f_1 = 50$ гц

$$P_{1г} = af_1 = 0,02 \cdot 50 = 1 \text{ вт/кг}; \quad P_{1в} = bf_1^2 = 2 \cdot 10^{-4} \cdot 2500 = 0,5 \text{ вт/кг}$$

при $f_2 = 100$ гц

$$P_{2г} = af_2 = 2 \text{ вт/кг}; \quad P_{2в} = bf_2^2 = 2 \text{ вт/кг}.$$

8.3. Потери в стали трансформатора при некоторой частоте составляют 600 вт. При удвоенной частоте и неизменной амплитуде магнитной индукции потери в стали увеличиваются втрое. Произвести разделение потерь на вихревые токи и на гистерезис.

8.4. При номинальном первичном напряжении потери в стали трансформатора составляют $P_{\text{ст}} = 1$ вт. Определить потери в стали трансформатора при повышении и понижении напряжения на 10%. Частота и форма кривой э.д.с. остаются неизменными. Потери на гистерезис определять по формуле (8.3).

8.5. Катушка со стальным сердечником включена на напряжение $U_1 = 100$ в, и по ней проходит ток $I_1 = 5$ а, отстающий по фазе от напряжения на угол ψ_1 , причем $\cos \psi_1 = 0,7$. Эта же катушка при том же напряжении, но без стального сердечника потребляет ток $I_2 = 10$ а, отстающий от напряжения на угол ψ_2 , причем $\cos \psi_2 = 0,9$. Определить потери в стали и меди и построить векторную диаграмму при наличии стального сердечника. С помощью векторной диаграммы определить r_0 и x_0 в схеме замещения катушки со стальным сердечником.

Решение. При отсутствии сердечника катушка имеет только потери в меди:

$$I_2^2 r = U_1 I_2 \cos \varphi_2.$$

Отсюда активное сопротивление обмотки катушки

$$r = \frac{U_1 \cos \varphi_2}{I_2} = 9 \text{ ом.}$$

При наличии стального сердечника в катушке расходуется мощность

$$P_1 = U_1 I_1 \cos \varphi_1 = 350 \text{ вт.}$$

Часть этой мощности

$$P_{об} = I_1^2 r = 225 \text{ вт}$$

идет на покрытие потерь в меди, а другая часть — на потери в стали

$$P_{ст} = P_1 - P_{об} = 125 \text{ в.}$$

Эквивалентная последовательная схема катушки со сталью, не имеющей рассеяния, дана на рис. 8.6, а.

На рис. 8.6, б начерчена векторная диаграмма катушки со стальным сердечником. Из векторной диаграммы следует, что активная составляющая приложенного напряжения

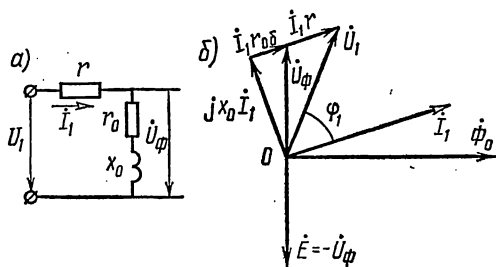


Рис. 8.6

$$U_1 \cos \varphi_1 = I_1 (r + r_0).$$

откуда

$$r_0 = \frac{U_1 \cos \varphi_1}{I_1} - r = \frac{100 \cdot 0,7}{5} - 9 = 5 \text{ ом.}$$

Из диаграммы видно, что

$$U_1 \sin \varphi_1 = I_1 x_0$$

и, следовательно,

$$r_0 = \frac{U_1 \sin \varphi_1}{I_1} = \frac{100 \cdot 0,715}{5} = 14,3 \text{ ом.}$$

Величина э.д.с., наводимой в катушке,

$$E = I \sqrt{r_0^2 + x_0^2} = 75,6 \text{ в.}$$

8.6. Сердечник однофазного трансформатора набран из стали Э11 толщиной листов $d = 0,35 \text{ мм}$, имеет прямоугольное сечение $150 \times$

$\times 100 \text{ мм}^2$ и длину средней линии магнитной индукции 120 см . Изоляция между листами занимает 10% сечения. Первичная обмотка его состоит из $\omega_1 = 1500$ витков и включена на напряжение $U_1 = 6000 \text{ в}$. Определить потери в стали. Частота переменного тока $f = 50 \text{ гц}$.

У к а з а н и е. Воспользовавшись формулой (8.6), определить магнитный поток Φ_m . Зная активное сечение сердечника $S = 0,9 \cdot 15 \cdot 10 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2$, найти магнитную индукцию B_m . Потери в стали найти по формулам (8.3) и (8.4).

8.7. Первичное и вторичное напряжения трансформатора равны $U_1 = 3300 \text{ в}$, $U_2 = 220 \text{ в}$. Сердечник его имеет сечение $S = 100 \text{ см}^2$ и вес $G = 350 \text{ кг}$ и набран из листов электротехнической стали Э11 толщиной $d = 0,35 \text{ мм}$. Максимальная магнитная индукция в сердечнике $B_m = 0,8 \text{ тл}$ (8000 гс). Определить необходимое число витков первичной и вторичной обмоток, ток холостого хода и коэффициент мощности трансформатора при холостом ходе.

Частота переменного тока $f = 50 \text{ гц}$.

Р е ш е н и е. Пренебрегая в опыте холостого хода падением напряжения на сопротивлениях обмоток и индуктивностях рассеяния, из формулы (8,6) найдем:

$$\omega_1 = \frac{U_1}{4,44\Phi_m f} = 1860 \text{ витков} \quad \text{и} \quad \omega_2 = \omega_1 \frac{U_2}{U_1} = 124 \text{ витка.}$$

Средняя длина магнитопровода, равная длине средней линии магнитной индукции, определяется из формулы $G = Sld$, где плотность стали $d = 7,6 \text{ г/см}^3$. Отсюда $l = 4,6 \text{ м}$.

По кривой намагничивания для стали Э11 (см. приложение 1) найдем, что при $B_m = 0,8 \text{ тл}$, $H = 318 \text{ а/м}$.

Намагничивающая сила (амплитудное значение)

$$\Sigma a\omega = Hl = 318 \cdot 4,6 = 1460 \text{ а,}$$

и так как

$$\Sigma a\omega = \omega_1 I_{1m} = 1460 \text{ а,}$$

то ток намагничивания

$$I_1 = \frac{\Sigma a\omega}{\sqrt{2}\omega_1} = \frac{1460}{2 \cdot 1860} = 0,555 \text{ а.}$$

Потери в стали определяем по формулам (8.2) и (8.4):

$$\begin{aligned} P_{\text{ст}} &= (0,9 \cdot 0,5 \cdot 0,8 + 3,8 \cdot 0,5 \cdot 0,64 + 3,2 \cdot 0,25 \cdot 0,64) \cdot 350 = \\ &= 2,09 \cdot 350 = 730 \text{ вт.} \end{aligned}$$

Так как $P_{\text{ст}} = U_1 I_a$, то

$$I_a = \frac{730}{3300} = 0,22 \text{ а} \quad \cos \varphi_0 = \frac{I_a}{I_1} = \frac{0,22}{0,555} = 0,397.$$

На рис. 8.7 приведена векторная диаграмма холостого хода трансформатора.

8.8. В катушке со стальным сердечником расходуется мощность $P = 0,2 \text{ кВт}$ при напряжении $U = 100 \text{ в}$ и токе $I = 10 \text{ а}$. Активное сопротивление обмотки $r_{об} = 0,5 \text{ ом}$ и реактивное сопротивление рассеяния $x_s = 1 \text{ ом}$. Частота тока $f = 50 \text{ гц}$.

Определить из векторной диаграммы ток I_p параллельной схемы замещения (см. рис. 8.2, а), сопротивления r_0 и x_0 последовательной схемы замещения (см. рис. 8.2, б) и составляющую приложенного на-

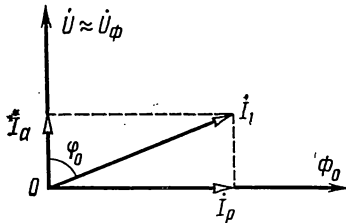


Рис. 8.7

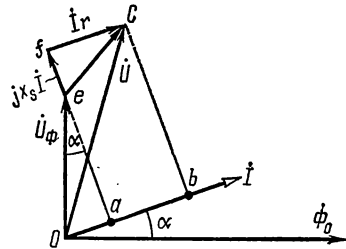


Рис. 8.8

пряжения U_ϕ , уравновешивающую э.д.с., которая индуцируется в обмотке катушки основным магнитным потоком, пронизывающим сердечник. При построении диаграммы предполагать, что ток изменяется по гармоническому закону.

Решение. Построение векторной диаграммы показано на рис. 8.8.

Из соотношения $P = UI \cos \varphi$ найдем, что $\cos \varphi = 0,2$.

Отрезок $Ob = I(r + r_0) = U \cos \varphi$,

отсюда

$$r_0 = \frac{U \cos \varphi}{I} - r = 1,5 \text{ ом}$$

Отрезок $bc = U \sin \varphi = 97,9$ или $bc = ae + ef = Ix_0 + Ix_s$, отсюда $x_0 = 8,79 \text{ ом}$.

Теперь найдем

$$U_\phi = \sqrt{(0a)^2 + (ae)^2} = I \sqrt{r_0^2 + x_0^2} = 88,5 \text{ в.}$$

Реактивный ток

$$I_p = I \cos \alpha = 10 \frac{87,9}{88,5} = 9,94 \text{ а.}$$

8.9. Однофазный трансформатор с коэффициентом трансформации $k = \omega_1 : \omega_2 = 2$ с разомкнутой вторичной обмоткой подключен к сети с напряжением $U = 220 \text{ в}$. Полагая, что трансформатор изготовлен из стали марки Э11 (удельный вес $7,8 \text{ в/см}$), толщина листов которой $d = 0,5 \text{ мм}$, определить потери в стали, величину тока в обмотке и построить векторную диаграмму. Поток рассеяния пренебречь.

Число витков первичной обмотки $w_1 = 74$, активное сечение сердечника $S = 100 \text{ см}^2$, средняя длина сердечника $l_{cp} = 150 \text{ см}$. Частота $f = 50 \text{ гц}$.

У к а з а н и е. При определении магнитной индукции в стали трансформатора, в первом приближении можно считать напряжение на зажимах равным э. д. с. обмотки трансформатора. Для определения намагничивающего тока I_1 необходимо при расчете магнитной цепи воспользоваться кривой намагничивания для листовой стали Э11, приведенной в приложении 1.

Б. Трансформатор со стальным сердечником

8.10. Однофазный трансформатор $U_1/U_2 = 6600/220 \text{ в}$ с номинальной мощностью $P = 50 \text{ ква}$ имеет потери холостого хода $P_{x.x} = 380 \text{ вт}$ и к.п.д. при полной нагрузке $\eta = 96,15\%$ с $\cos \varphi = 0,8$. Определить активное сопротивление первичной и вторичной обмоток, считая, что первичные и вторичные потери в меди одинаковы.

Р е ш е н и е. Известно, что ток холостого хода имеет незначительную величину по сравнению с номинальным током. Поэтому при холостом ходе можно пренебречь потерями в обмотке (потерями в меди) и считать, что потери холостого хода приблизительно равны потерям в стали: $P_{x.x} \approx P_{ст} \approx 380 \text{ вт}$.

Общие потери мощности при нагрузке трансформатора

$$P_{об} + P_{ст} = \frac{(1 - \eta P \cos \varphi_2)}{100} = 1540 \text{ вт.}$$

Отсюда

$$P_{об} = 1540 - 380 = 1160 \text{ в;} \quad P_{1об} = P_{2об} = \frac{1160}{2} = 580 \text{ вт.}$$

Номинальный ток в первичной цепи при нагрузке

$$I_1 = \frac{P}{U_1} = 7,6 \text{ а;}$$

активное сопротивление первичной обмотки

$$r_{1об} = \frac{P_{1об}}{I_1^2} = 10,1 \text{ ом.}$$

Так как, по условию, активное сопротивление первичной обмотки равно приведенному сопротивлению вторичной:

$$r_{1об} = r'_{2об} = r_{2об} k^2,$$

где

$$k = \frac{w_1}{w_2} = \frac{6600}{220} = 30,$$

то

$$r_{2об} = \frac{10,1}{30^2} = 0,011 \text{ ом.}$$

8.11. Опыты холостого хода и короткого замыкания однофазного трансформатора дали следующие результаты:

$$U_{1x.x} = 400 \text{ в}; I_{1x.x} = 0,4 \text{ а}; P_{1x.x} = 20 \text{ вт}; U_{1к.з} = 32 \text{ вт};$$

$$I_{1к.з} = 5 \text{ в}; P_{1к.з} = 80 \text{ в.}$$

Данный трансформатор — повышающий и имеет коэффициент трансформации $k = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{1}{15}$.

Предполагая, что активное и реактивное сопротивления рассеяния первичной обмотки равны соответственным приведенным сопротивлениям вторичной обмотки ($r_{10б} = r'_{20б}$, $x_{1s} = x'_{2s} = x_2$), определить их величины.

При холостом ходе можно пренебречь падением напряжения в первичной обмотке. При коротком замыкании можно пренебречь намагничивающей составляющей первичного тока.

Решение 8.4, в изображена эквивалентная схема трансформатора.

Из опыта холостого хода, пренебрегая падением напряжения в первичной обмотке, имеем:

$$z_{x.x} = \frac{U_{1x.x}}{I_{1x.x}} = 1000 \text{ ом};$$

$$\cos \varphi_{x.x} = \frac{P_{1x.x}}{U_{1x.x} I_{1x.x}} = 0,125 \text{ ом};$$

$$x_{x.x} = z_{x.x} \sin \varphi_{x.x} = 992 \text{ ом};$$

$$r_{x.x} = z_{x.x} \cos \varphi_{x.x} = 125 \text{ ом}.$$

Если пренебречь составляющей тока I_0 , эквивалентная схема трансформатора при коротком замыкании примет вид, изображенный на рис 8.9, и тогда:

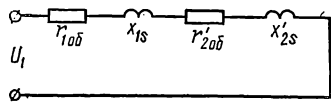


Рис. 8.9

$$z_{к.з} = \frac{U_{1к.з}}{I_{1к.з}} = 6,4 \text{ ом}; \quad \cos \varphi_{1к.з} = \frac{P_{1к.з}}{U_{1к.з} I_{1к.з}} = 0,5,$$

$$r_{10б} + r'_{20б} = z_{к.з} \cos \varphi_{1к.з} = 3,2 \text{ ом};$$

$$x_{1s} + x'_{2s} = z_{к.з} \sin \varphi_{1к.з} = 5,54 \text{ ом}.$$

Так как

$$r_{10б} = r'_{20б}; \quad x_{1s} = x'_{2s},$$

ТО

$$r_{106} = 1,6 \text{ ом}; \quad r_{206} = \frac{r_2'}{k^2} = 360 \text{ ом};$$

$$x_{1s} = 2,77 \text{ ом}; \quad x_{2s} = \frac{x_{2s}'}{k^2} = 623 \text{ ом}.$$

8.12. Ко вторичным зажимам трансформатора предыдущей задачи подключен приемник энергии, имеющий $\cos \varphi_2 = 0,92$ ($\varphi_2 > 0$), при этом напряжение на вторичных зажимах $U_2 = 6000$ в, ток во вторичной цепи $I_2 = 0,25$ а. Найти напряжение U_1 на первичных зажимах, ток I_1 в первичной обмотке, к.п.д. η и коэффициент мощности $\cos \varphi_1$. Найти потери в стали и меди при нагрузке трансформатора.

Р е ш е н и е. Задачу проще всего решить, если применить символический метод к эквивалентной схеме трансформатора (см. рис. 8.4, в).

Приведенные величины вторичного напряжения, тока и сопротивлений:

$$U_2' = U_2 k = 400 \text{ в}; \quad I_2' = \frac{I_2}{k^2} = 3,75 \text{ а};$$

$$z_{2H}' = \frac{U_2'}{I_2'} = 106,6 \text{ ом}; \quad r_{2H}' = z_{2H}' \cos \varphi_2 = 98 \text{ ом};$$

$$x_{2H}' = z_{2H}' \sin \varphi_2 = 41,6 \text{ ом}.$$

На параллельных ветвях напряжение

$$U_\Phi = \dot{I}_2' [(r_{2H}' + r_2') + j(x_{2H}' + x_{2s}')] = (374 + j167) \text{ в},$$

где \dot{I}_2' направлено по вещественной оси, и, следовательно,

$$\dot{I}_2' = I_2' = 3,75 \text{ а};$$

$$\dot{I}_0 = \frac{U_\Phi}{Z_0} = \frac{374 + j167}{125 + j992} = 0,41e^{-j58^\circ 50'} = (0,21 - j0,35) \text{ а};$$

$$\dot{I}_1 = \dot{I}_2' + \dot{I}_0 = 3,96 - j0,35 = 3,96e^{-j5^\circ 5'} \text{ а}.$$

Приложенное напряжение

$$\dot{U}_1 = \dot{I}_1 Z_1 + \dot{U}_\Phi = 383,5 + j175 = 420e^{-j24^\circ 15'} \text{ в}.$$

Сдвиг фаз между напряжением на входе трансформатора и первичным током

$$\varphi_1 = 24^\circ 15' - (-5^\circ 5') = 29^\circ 20'.$$

Мощность, подводимая к трансформатору,

$$P_1 = U_1 I_1 \cos \varphi_1 = 1450 \text{ вт}.$$

Мощность, расходуемая в приемнике энергии,

$$P_2 = U_2 I_2 \cos \varphi_2 = 1380 \text{ вт.}$$

К. п. д. трансформатора

$$\eta = \frac{P_2}{P_1} = 0,95.$$

Потери в стали при нагрузке трансформатора

$$P_{\text{ст}} = I_0^2 r_0 = 21 \text{ вт.}$$

Потери в меди при нагрузке трансформатора

$$P_{\text{об}} = P_1 - P_2 - P_{\text{ст}} = 49 \text{ вт.}$$

8.13. К трансформатору, рассмотренному в задаче 8.12, приложено напряжение $U_1 = 420 \text{ в}$. Найти величину напряжения U_2 на вторичных зажимах при холостом ходе, пренебрегая при этом падением напряжения в первичной обмотке. Показать возможность такого пренебрежения.

Решение. При холостом ходе можно положить $U_1 \approx U_{\Phi} = 420 \text{ в}$. Тогда

$$U_2 = U_1/k = 6300 \text{ в.}$$

Пренебречь падением напряжения в первичной обмотке можно, так как $\frac{I_0 z_1}{U_1} = \frac{0,41 \cdot 3,2}{420} = 0,003 = 0,3\%$, т. е. падение напряжения в первичной обмотке составляет всего 0,3% от приложенного напряжения.

КЛАССИЧЕСКИЙ МЕТОД РАСЧЕТА ПЕРЕХОДНЫХ ПРОЦЕССОВ В ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЯХ С СОСРЕДОТОЧЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

ОСНОВНЫЕ ПОЛОЖЕНИЯ И СООТНОШЕНИЯ *

Классический метод решения задач на переходные процессы в разветвленных цепях с постоянными параметрами, в которых осуществляется коммутация (включение, выключение, переключение, изменение параметров цепи и т. п.), сводится к следующему.

1. **Составление уравнений по законам Кирхгофа.** Для каждой ветви схемы, получающейся после коммутации, следует задаться положительным направлением тока и на основании законов Кирхгофа составить систему уравнений для мгновенных значений напряжений и токов переходного режима.

Так как

$$e_L = -L \frac{di}{dt} \text{ и } u_C = \frac{1}{C} \int_0^t i dt,$$

то в общем случае это будет система неоднородных линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами (от интегралов можно освободиться, продифференцировав все члены по t , получив $\frac{du_C}{dt} = \frac{i}{C}$).

2. **Решение уравнений Кирхгофа.** Эта система уравнений может быть решена относительно одного из токов или напряжения на одном из элементов цепи (u_C , u_L , u_r). В результате получим неоднородное линейное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами n -го порядка, где n равно или меньше количества индуктивных катушек и емкостей в схеме. В соответствии с порядком дифференциального уравнения, составленного для схемы после коммутации, схема после коммутации имеет порядок n .

3. **Общее решение полученного неоднородного линейного дифференциального уравнения** представляет собой сумму двух величин: частного решения неоднородного уравнения, выражающего принужденный режим, задаваемый источниками, и решения однородного дифференциального уравнения, выражающего свободный режим. В соответствии с этим для тока (или напряжения на емкости) в некоторой ветви получим $i = i_{пр} + i_{св}$ (или $u_C = u_{Cпр} + u_{Cсв}$). Здесь $i_{пр}$

* В задачах глав 9, 10 и 11 приняты обозначения: $i(0_-)$, $u(0_-)$ —значения соответствующих величин в момент, непосредственно предшествующий коммутации, а $i(0_+)$ и $u(0_+)$ —в первый момент после коммутации.

(или $u_{C_{\text{пр}}}$) — составляющая тока (или напряжения на емкости) принужденного режима, или, более кратко, принужденный ток или принужденное напряжение (при постоянном или синусоидальном напряжении могут быть найдены обычными методами расчета установившегося процесса в цепи после коммутации); $i_{\text{св}}$ (или $u_{C_{\text{св}}}$) — составляющая тока (или напряжения) свободного режима (или, более кратко, свободный ток или напряжение).

Вид функций $i_{\text{пр}} = F_1(t)$ [или $u_{C_{\text{пр}}} = F_1(t)$] зависит как от формы действующих в цепи источников напряжения и тока, так и от характера самой цепи. Вид функции $i_{\text{св}} = F_2(t)$ [или $u_{C_{\text{св}}} = F_2(t)$] зависит только от характера самой цепи.

4. **Свободный ток** $i_{\text{св}} = F_2(t)$ схемы порядка n имеет n линейно независимых составляющих (собственных функций) $i_k(t)$: $i_{\text{св}} = \sum_{k=1}^n i_k(t)$.

Вид собственных функций определяется видом корней p_k ($k = 1, 2, \dots, n$) характеристического уравнения схемы. Каждому корню соответствует собственная функция (в рассматриваемой записи — собственный ток) вида $i_k(t) = A_k e^{p_k t}$.

Если корни характеристического уравнения $p_l = p_{l+1} = p_{l+2} = \dots = p_{l+m-1}$ равны между собой (т. е. корень p_l имеет кратность m), то соответствующие им собственные функции имеют вид:

$$i_l(t) = A_l e^{p_l t}; \quad i_{l+1}(t) = t A_{l+1} e^{p_l t}, \quad \dots, \quad i_{l+m-1}(t) = t^{m-1} A_{l+m-1} e^{p_l t}$$

Пример дан в задаче 9.44 (случай 2).

Если имеется пара комплексно сопряженных корней $p_{k,k+1} = \pm a_k \pm j\omega_k$ (a_k — собственное затухание, ω_k — собственная частота), то соответствующая ей собственная функция (с двумя постоянными интегрирования A_k и ψ_k) может быть найдена в виде

$$i_k(t) + i_{k+1}(t) = A_k e^{-a_k t} \sin(\omega_k t + \psi_k),$$

где ψ_k, A_k, A_l, \dots — постоянные интегрирования, число которых равно порядку n дифференциального уравнения; их значения определяются из начальных условий.

Примеры приведены в задачах 9.44 (случай 3) и 9.45.

5. **Определение начальных условий из законов коммутации.** В качестве независимых начальных условий используются величины токов $i_L(0_-)$, проходящих через каждую индуктивную катушку, и напряжений $u_C(0_-)$ на емкостях к моменту коммутации. Если коммутация происходит мгновенно в момент $t = 0$ и если мощность обмена энергией между отдельными элементами цепи остается конечной, то имеет место непрерывное изменение всех величин, значения которых определяют энергию, содержащуюся в реактивных элементах цепи. В этом случае выполняются следующие *законы коммутации*: токи катушек индуктивности и напряжения на емкостях в момент начала коммутации не изменяются скачками (внезапно), т. е. они являются

непрерывными функциями времени. После коммутации $i_{Lk}(0_+) = i_{Lk}(0_-)$, $u_{Ck}(0_+) = u_{Ck}(0_-)$ *

Начальные значения токов в ветвях, не содержащих индуктивностей, или напряжений на элементах, не являющихся емкостями, могут в момент коммутации изменяться скачком. Эти начальные значения токов и напряжений (зависимые начальные значения) определяются по законам Кирхгофа с применением законов коммутации.

Примеры даны в задачах 9.19, 9.44 и 9.45.

6. Характеристическое уравнение. При составлении характеристического уравнения в соответствующей однородной системе уравнений для схемы символы дифференцирования заменяют множителем p , а символы интегрирования — множителем $1/p$ и приравняют нулю соответствующий (характеристический) определитель системы.

При составлении характеристического уравнения часто бывает легче составить характеристическое входное сопротивление схемы, при этом индуктивностям L приписывают сопротивления pL , а емкостям C — сопротивления $1/pC$, и приравнять характеристическое входное сопротивление нулю.

Примеры даны в задачах 9.38, 9.44 и 9.45.

УПРАЖНЕНИЯ И ЗАДАЧИ

А. Расчет цепей, содержащих r, L - или r, C -элементы

9.1. Катушка, индуктивность которой $0,12 \text{ гн}$ и сопротивление 1 ом , включается на постоянное напряжение 30 в . Чему равна постоянная времени этой катушки? С какой скоростью нарастает ток в начальный момент? Чему равно установившееся значение тока?

9.2. Цепь, содержащая последовательно соединенные активное сопротивление r и индуктивность L , включается на постоянное напряжение $U = 120 \text{ в}$. Определить, через какой промежуток времени ток станет равным 99% тока установившегося режима, если $r = 100 \text{ ом}$ и $L = 0,2 \text{ гн}$. Найти закон изменения э.д.с. самоиндукции, наводимой при включении, и вычислить, через какой промежуток времени после включения скорость нарастания энергии (т. е. мощность p_M) в магнитном поле будет максимальна.

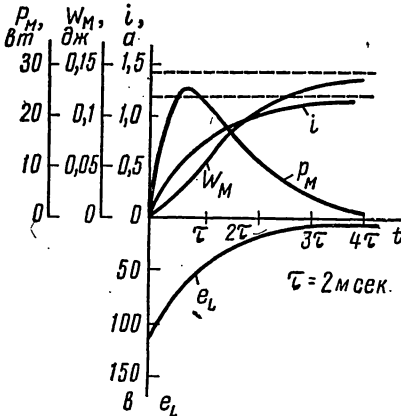


Рис. 9.1

З а м е ч а н и е. На рис. 9.1 изображены кривые, построенные по результатам решений.

* Случай, когда токи в индуктивностях и напряжения на емкостях изменяются скачком рассмотрены в задачах 9.58—9.61.

9.3. Сопротивление катушки равно $1,2 \text{ ом}$, индуктивность 9 гн . В момент, когда через катушку проходит ток 50 а , она замыкается накоротко. С какой скоростью начнет убывать ток в катушке? Чему равна скорость убывания тока в момент, когда ток равен 25 а ?

9.4. Катушка с $r = 50 \text{ ом}$ и $L = 125 \text{ мгн}$ находится под постоянным напряжением $U = 150 \text{ в}$. После практически полного установления тока катушка посредством ключа с переходным контактом быстро

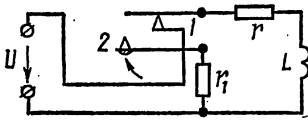


Рис. 9.2

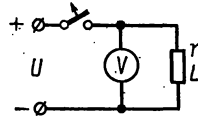


Рис. 9.3

отключается от источника электрической энергии и замыкается на сопротивление $r_1 = 12,5 \text{ ом}$. Найти закон изменения тока в катушке (рис. 9.2). Показать, что энергия, выделившаяся в цепи после переключения в виде тепла, равна первоначальному запасу энергии магнитного поля.

9.5. Цепь с весьма большой индуктивностью (обмотка возбуждения генератора постоянного тока) отключается от источника постоянного тока с напряжением $U = 120 \text{ в}$ (рис. 9.3). Определить, во сколько раз повысится напряжение на зажимах вольтметра, а также найти энергию, которая выделится в вольтметре после размыкания, если $r = 40 \text{ ом}$, $L = 100 \text{ гн}$. Сопротивление вольтметра равно 5000 ом . Его индуктивностью можно пренебречь.

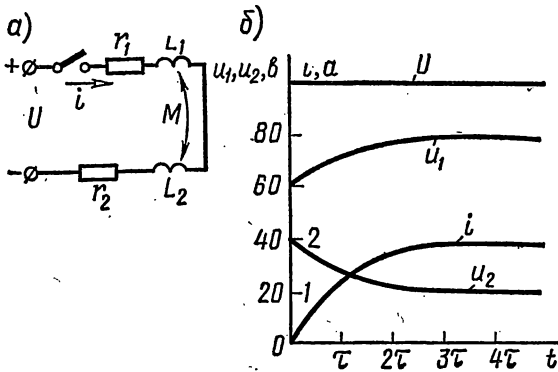


Рис. 9.4

9.6. Определить законы изменения тока и напряжения в каждой из двух последовательно соединенных индуктивно связанных реактивных катушек, параметры которых $r = 40 \text{ ом}$, $L_1 = 0,2 \text{ гн}$, $r = 10 \text{ ом}$, $L_2 = 0,1 \text{ гн}$, а взаимная индуктивность $M = 0,1 \text{ гн}$, при включении их на постоянное напряжение $U = 100 \text{ в}$ (рис. 9.4, а). Задачу решить для согласного и встречного соединений катушек.

У к а з а н и е. Составить уравнение второго закона Кирхгофа

$$(L_1 + L_2 \pm 2M) \frac{di}{dt} + (r_1 + r_2)i = U.$$

Знак плюс соответствует согласному включению катушек, а знак минус — встречному.

Характеристическое уравнение, согласно п. 6 основных положений и соотношений, равно

$$(L_1 + L_2 \pm 2M) p + (r_1 + r_2) = 0$$

Корни этого уравнения:

$$p = -\frac{r_1 + r_2}{L_1 + L_2 \pm 2M}; \quad p_1 = -100 \text{ сек}^{-2}; \quad p_2 = -500 \text{ сек}^{-1}.$$

В результате решения должно быть получено для: согласного включения

$$i = 2(1 - e^{-100t});$$

$$u_1 = (80 - 20e^{-100t}) \text{ в}; \quad u_2 = (20 + 20e^{-100t}) \text{ в};$$

встречного включения

$$i = 2(1 - e^{-500t}) \text{ а};$$

$$u_1 = (80 + 20e^{-500t}) \text{ в}; \quad u_2 = (20 - 20e^{-500t}) \text{ в}.$$

На рис. 9.4, б даны кривые тока и напряжений для согласного включения.

9.7. При замыкании рубильника P_1 и разомкнутом рубильнике P_2 к источнику постоянного напряжения подключается реактивная катушка r, L , последовательно с которой соединен реостат с сопротивлением r_1 (рис. 9.5, а). Через t_1 сек после замыкания рубильника P_1

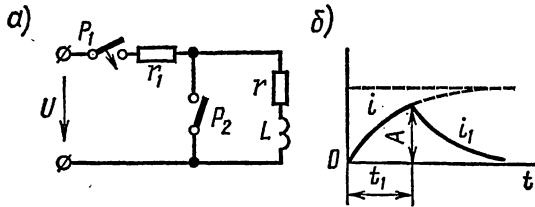


Рис. 9.5

замыкается рубильник P_2 , который остается в таком состоянии на продолжительное время.

Построить кривую изменения тока в катушке с момента включения рубильника P_1 до момента практически полного затухания тока в катушке (например, до 1% от максимального значения тока).

Р е ш е н и е. При замыкании рубильника P_1 и разомкнутом рубильнике P_2 переходный ток в катушке

$$i = \frac{U}{r_1 + r} \left(1 - e^{\frac{-r_1 + r}{L} t} \right). \quad (1)$$

К моменту включения рубильника P_2 ток в катушке достигнет величины

$$i_{t=t_1} = \frac{U}{r_1 + r} \left(1 - e^{-\frac{r_1 + r}{L} t_1} \right) = A. \quad (2)$$

Второй закон Кирхгофа для контура катушки, замкнутой рубильником P_2 (при $t \geq t_1$), будет

$$L \frac{di_1}{dt} + i_1 r = 0.$$

Решение этого уравнения дает

$$i_1 = A e^{-\frac{r}{L}(t-t_1)}. \quad (3)$$

Постоянная интегрирования A найдется из начального условия, согласно которому для момента $t = t_1$ ток $i = i_1$. Ток по формуле (3)

$$i_1 = \frac{U}{r_1 + r} \left(1 - e^{-\frac{r_1 + r}{L} t_1} \right) e^{-\frac{r}{L}(t-t_1)}.$$

На рис. 9.5, б построены кривые изменения тока.

9.8. Цепь постоянного тока состоит из индуктивности $L = 0,1$ гн и двух сопротивлений $r = 10$ ом и $r_1 = 30$ ом (рис. 9.6). Приложенное напряжение $U = 120$ в.

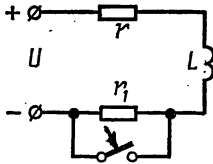


Рис. 9.6

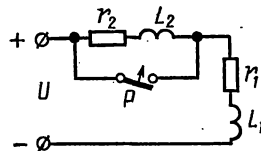


Рис. 9.7

Сопротивление r_1 внезапно замыкается накоротко. Найти уравнение тока в катушке после замыкания ключа; начертить график изменения тока по времени.

9.9. В цепи рис. 9.6 ключ замкнут. Найти закон изменения тока после внезапного размыкания ключа, вводящего в цепь добавочное сопротивление r_1 . Цифровые данные те же, что и в задаче 9.8.

9.10. В цепи постоянного тока (рис. 9.7) реактивная катушка L_2 , r_2 замыкается накоротко рубильником P .

Определить законы изменения токов в обеих катушках и в рубильнике спустя 0,05 сек после его замыкания, если $r_1 = 6$ ом,

$$L_1 = 0,3 \text{ гн}, \quad r_2 = 4 \text{ ом}, \quad L_2 = 0,8 \text{ гн}, \quad U = 120 \text{ в}.$$

9.11. Телеграфная цепь состоит из батареи, э.д.с. которой 10 в и внутреннее сопротивление 2 ом, линии, имеющей чисто активное

сопротивление $51,6 \text{ ом}$, и реле, активное сопротивление которого $21,4 \text{ ом}$ и индуктивность $1,25 \text{ гн}$. Если якорь реле не притягивается до тех пор, пока ток не станет равным $0,05 \text{ а}$, то сколько времени пройдет после замыкания цепи до начала работы реле?

9.12. Цепь рис. 9.8 включается под действие постоянного напряжения $U = 120 \text{ в}$. Найти выражения для токов i_1 , i_2 и i_3 и изобразить их графически; $r_1 = 20 \text{ ом}$, $r_2 = 30 \text{ ом}$, $L = 0,3 \text{ гн}$.

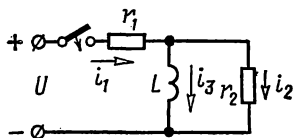


Рис. 9.8

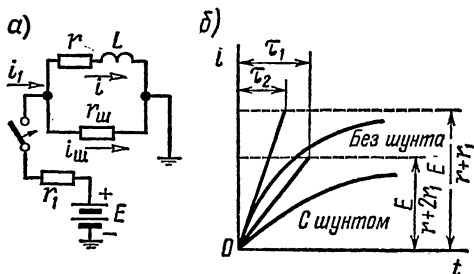


Рис. 9.9

9.13. Для замедления скорости нарастания тока в электромагните r , L его шунтируют активным сопротивлением $r_{ш}$ (рис. 9.9, а). Найти ток i в электромагните и сравнить скорость его нарастания со скоростью нарастания тока электромагнита в случае отсутствия шунта. Для упрощения положить $r = r_{ш}$.

Решение. Уравнения Кирхгофа в данном случае имеют вид:

$$E = i_1 r_1 + i_{ш} r_{ш}; \quad (1)$$

$$i_{ш} r_{ш} = i r + L \frac{di}{dt}; \quad (2)$$

$$i_1 = i + i_{ш}. \quad (3)$$

Подставив значение i_1 из уравнения (3) в (1), получим

$$i_{ш} = \frac{E - i r_1}{r_{ш} + r_1}.$$

Подставляя это значение в уравнение (2), найдем

$$\frac{di}{dt} + \frac{r r_1 + r r_{ш} + r_1 r_{ш}}{L (r_1 + r_{ш})} i = \frac{E r_{ш}}{L (r_1 + r_{ш})}. \quad (4)$$

Полагаем

$$i = i_{пр} + i_{св}, \quad (5)$$

где $i_{пр}$ — ток принужденного режима в катушке, который может быть подсчитан по формулам для цепей постоянного тока (в этом случае

индуктивность никакой роли не играет, т. е. она как бы закорочена) Так как при установившемся режиме $\frac{di_{np}}{dt} = 0$ (в этом случае $i = i_{np} = \text{const}$), то

$$i_{np} = \frac{Er_{ш}}{rr_1 + rr_{ш} + r_1r_{ш}}. \quad (6)$$

Свободный ток найдется из решения уравнения (4) без правой части

$$i_{св} = Ae^{-\frac{t}{\tau}} \quad (7)$$

где приняли

$$\tau = \frac{L(r_1 + r_{ш})}{rr_1 + rr_{ш} + r_1r_{ш}}. \quad (8)$$

Таким образом, подставляя (6) и (7) в (5), получим

$$i = Ae^{-\frac{t}{\tau}} + \frac{Er_{ш}}{rr_1 + rr_{ш} + r_1r_{ш}}.$$

Постоянная A найдется из начального условия, согласно которому при $t = 0$ ток $i = 0$, т. е.

$$A + \frac{Er_{ш}}{rr_1 + rr_{ш} + r_1r_{ш}} = 0,$$

или

$$A = -\frac{Er_{ш}}{rr_1 + rr_{ш} + r_1r_{ш}} = 0,$$

Окончательно ток

$$i = \frac{Er_{ш}}{rr_1 + rr_{ш} + r_1r_{ш}} \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right). \quad (9)$$

В частном случае при $r_{ш} = r$ ток

$$i = \frac{E}{r + 2r_1} \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau_1}}\right), \quad (10)$$

где

$$\tau_1 = \frac{L(r + r_1)}{r(r + 2r_1)} = \frac{L}{r + \frac{r_1}{1 + \frac{r_1}{r}}}. \quad (11)$$

Если же шунт снять, то, полагая $r_{ш} = \infty$ в уравнении (9),

$$i = \frac{E}{r + r_1} \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau_2}}\right), \quad (12)$$

где

$$\tau_2 = \frac{L}{r + r_1}. \quad (13)$$

Сравнивая выражения (11) и (13), устанавливаем, что $\tau_1 > \tau_2$, т. е. постоянная времени при наличии шунта больше, чем без него.

Вычислим начальную скорость нарастания тока. При наличии шунта из формулы (10) имеем

$$\left. \frac{di}{dt} \right|_{t=0_+} = \frac{E}{\tau_1 (r + 2r_1)}, \quad (14)$$

а без шунта из формулы (12) получим

$$\left. \frac{di}{dt} \right|_{t=0_+} = \frac{E}{\tau_2 (r + r_1)}. \quad (15)$$

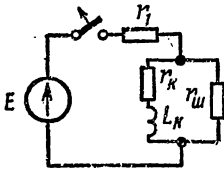


Рис. 9.10

Сравнивая выражения (14) и (15), устанавливаем, что при наличии шунта скорость нарастания тока меньше, чем без него. На рис. 9.9, б по уравнениям (10) и (12) построены кривые токов.

9.14. Электрическая цепь состоит из активного сопротивления $r_1 = 120$ ом, последовательно с которым соединено электромагнитное реле $r_k = 50$ ом, $L_k = 0,75$ гн, шунтированное сопротивлением $r_{ш} = 200$ ом (рис. 9.10). Написать уравнения тока, проходящего через реле при его внезапном отключении от источника напряжения $U = 80$ в. Пренебрегая прелетным временем якоря электромагнита, определить также время срабатывания реле, приняв, что ток его срабатывания равен половине тока, проходящего через реле при установившемся режиме.

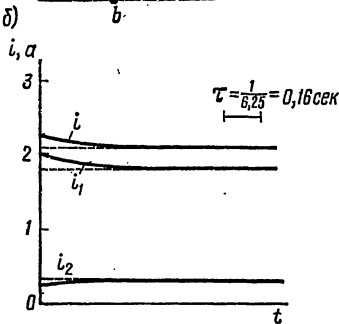
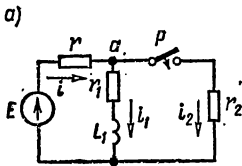


Рис. 9.11

9.15. В цепи рис. 9.11, а даны: постоянная э. д. с. $E = 30$ в, сопротивления: $r = 10$ ом, $r_1 = 5$ ом, $r_2 = 30$ ом и индуктивность $L_1 = 2$ гн. Найти законы изменения во времени всех токов и напряжения на параллельном участке цепи после замыкания рубильника (до коммутации в цепи был установившийся режим). Построить кривые изменения этих величин.

Решение. На основании законов Кирхгофа:

$$i = i_1 + i_2; \quad (1)$$

$$E = ir + i_1 r_1 + L_1 \frac{di_1}{dt}; \quad (2)$$

$$i_1 r_1 + L_1 \frac{di_1}{dt} = i_2 r_2. \quad (3)$$

Эту систему уравнений решим совместно относительно одного из токов. Обычно предпочтительнее выбирать тот ток, для которого наиболее очевидны начальные условия; в данном случае это ток в ветви с индуктивностью.

Подставив в уравнение (2) значение i из (1) и значение $i_2 = \frac{r_1}{r_2} i_1 + \frac{L_1}{r_2} \cdot \frac{di_1}{dt}$ из уравнения (3), после простых преобразований и подстановки числовых значений получим:

$$\frac{di_1}{dt} + \frac{r r_1 + r r_2 + r_1 r_2}{L_1 (r + r_2)} i_1 = \frac{E r_2}{L_1 (r + r_2)}; \quad (4a)$$

$$\frac{di_1}{dt} + 6,25 i_1 = 11,25. \quad (4б)$$

Общее решение этого уравнения

$$i_1 = i_{1\text{np}} + i_{1\text{св}}, \quad (5)$$

где $i_{1\text{np}}$ — установившийся ток, который может быть определен из уравнения (4), учитывая, что при установившемся режиме $\frac{di_{\text{np}}}{dt} = 0$:

$$i_{\text{np}} = \frac{11,25}{6,25} = 1,8 \text{ а}. \quad (6)$$

Свободный ток $i_{1\text{св}}$ найдется как интеграл уравнения (4б), когда в его правой части будет нуль:

$$\frac{di_{1\text{св}}}{dt} + 6,25 i_{1\text{св}} = 0; \quad (7)$$

отсюда

$$i_{1\text{св}} = A e^{-\frac{t}{\tau}}$$

где

$$\tau = \frac{L_1 (r + r_2)}{r r_1 + r r_2 + r_1 r_2} = 0,16 \text{ сек}; \quad \frac{1}{\tau} = 6,25 \text{ сек}^{-1}.$$

Подставляя $i_{1\text{np}}$ и $i_{1\text{св}}$ в уравнение (5), получим

$$i_1 = 1,8 + A e^{-6,25t}. \quad (8)$$

Постоянная A определяется из начального условия

$$i_1 \Big|_{t=0+} = \frac{U}{r + r_1} = 2a, \text{ или } (1,8 + A e^{-6,25t}) \Big|_{t=0} = 2.$$

отсюда

$$A = 2.$$

Окончательно

$$i_1 = (1,8 + 0,2 e^{-6,25t}) \text{ а.} \quad (9)$$

Подставляя это значение i_1 в уравнение (3), найдем ток

$$i_2 = \frac{r_1}{r_2} i_1 + \frac{L_1}{r_2} \cdot \frac{di_1}{dt} = (0,3 - 0,05 e^{-6,25t}) \quad (10)$$

Подставляя найденные в уравнениях (9) и (10) значения токов i_1 и i_2 в уравнение (1), получим

$$i = (2,1 + 0,15e^{-6,25t}) \text{ а.} \quad (11)$$

Отметим, что по окончании переходного процесса ($t = \infty$) токи i , i_1 и i_2 , как это следует из выражений (9), (10) и (11), обратятся соответственно в 2,1; 1,8 и 0,3 а. Нетрудно проверить, что те же значения полу-

чатся, если токи в данной цепи рассчитать любым методом расчета установившихся процессов в цепях постоянного тока.

Что же касается начала переходного процесса ($t = 0$), то в этот момент времени ток i_1 остается таким же, т. е. 2 а, каким он был до момента замыкания ключа; это объясняется наличием индуктивности. Токи i и i_2 при замыкании ключа изменяются скачкообразно, сразу принимая значения $i = 2,25$ а и $i_2 = 0,25$ а.

Ветви, по которым проходят эти токи, содержат только активные сопротивления; скачкообразное изменение тока в этих ветвях не связано с внезапным изменением запаса электромагнитной энергии и становится поэтому физически осуществимым.

На рис. 9.11, б построены кривые токов.

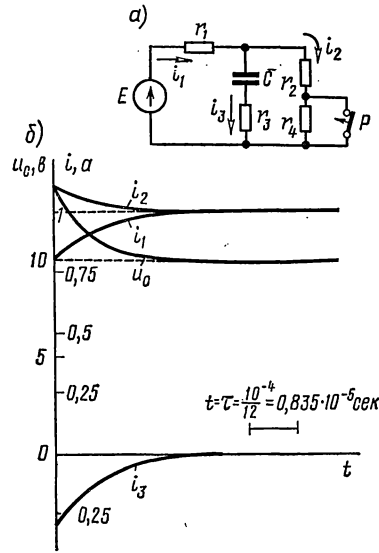


Рис. 9.12

9.16. Цепь рис. 9.12, а, параметры которой $r_1 = 5 \text{ ом}$, $r_2 = 10 \text{ ом}$, $r_3 = 5 \text{ ом}$, $r_4 = 15 \text{ ом}$, $C = 1 \text{ мкф}$, при разомкнутом рубильнике P находится в установившемся режиме под воздействием постоянной э.д.с. $E = 15 \text{ в}$.

Требуется после включения рубильника определить: 1) начальные значения переходных (полных) токов и напряжения на конденсаторе, а также начальные значения их принужденных и свободных составляющих и производную свободной составляющей напряжения на конденсаторе в момент начала переходного процесса; 2) законы изменения во времени всех токов и напряжения на конденсаторе.

Решение. 1. Расчет режима до коммутации (рубильник разомкнут). Токи в ветвях и напряжение на конденсаторе равны:

$$i_1 = i_2 = \frac{E}{r_1 + r_2 + r_4} = 0,5 \text{ а}; i_3 = 0;$$

$$u_c = (r_2 + r_4) i_2 = 25 \cdot 0,5 = 12,5 \text{ в}$$

Расчет принужденного режима после коммутации (рубильник замкнут). Токи и напряжение на конденсаторе

$$i_{1\text{пр}} = i_{2\text{пр}} = \frac{E}{r_1 + r_2} = 1 \text{ а}; i_{3\text{пр}} = 0;$$

$$u_{\text{спр}} = r_2 i_{2\text{пр}} = 10 \cdot 1 = 10 \text{ в.}$$

Расчет переходных токов и напряжения на конденсаторе для момента $t = 0_+$. По законам Кирхгофа составляем уравнения для схемы после коммутации:

$$i_1 = i_2 + i_3; \quad (1)$$

$$r_1 i_1 + r_3 i_3 + u_c = E; \quad (2)$$

$$r_2 i_2 = r_3 i_3 + u_c. \quad (3)$$

По закону коммутации напряжение на конденсаторе не может измениться скачком, поэтому

$$u_c(0_+) = u_c(0_-) = 12,5 \text{ в.}$$

Используя уравнения (1) — (3) для момента $t = 0_+$, с учетом того, что $u_c(0_+) = 12,5 \text{ в}$, имеем:

$$i_1(0_+) = i_2(0_+) + i_3(0_+);$$

$$r_1 i_1(0_+) + r_3 i_3(0_+) + 12,5 = 15;$$

$$r_2 i_2(0_+) = r_3 i_3(0_+) + 12,5.$$

Решая их, находим:

$$i_1(0_+) = 0,8 \text{ а}; i_2(0_+) = 1,1 \text{ а}; i_3(0_+) = -0,3 \text{ а.}$$

Рассчитаем начальные значения свободных составляющих токов и напряжения на конденсаторе. Для этого каждый переходный ток и напряжение на конденсаторе представим в виде суммы принужденной (после коммутационной) и свободной составляющих, например для первого тока

$$i_1(0_+) = i_{1\text{пр}}(0_+) + i_{1\text{св}}(0_+),$$

отсюда

$$i_{1\text{св}}(0_+) = i_1(0_+) - i_{1\text{пр}}(0_+) = 0,8 - 1 = -0,2 \text{ а} = A_1.$$

Аналогично:

$$i_{2\text{св}}(0_+) = i_2(0_+) - i_{2\text{пр}}(0_+) = 1,1 - 1 = 0,1 \text{ а} = A_2;$$

$$i_{3\text{св}}(0_+) = i_3(0_+) - i_{3\text{пр}}(0_+) = -0,3 - 0 = -0,3 \text{ а} = A_3;$$

$$u_{\text{св}}(0_+) = u_{\text{с}}(0_+) - u_{\text{сп}}(0_+) = 12,5 - 10 = 2,5 \text{ в} = B.$$

2. Определение законов изменения во времени искомых величин. Для этого составляем характеристическое уравнение в виде характеристического входного сопротивления послекоммутационной схемы (см. основные положения и соотношения, п. 7), которое приравняем нулю:

$$Z(p) = r_1 + \frac{r_2 \left(r_3 + \frac{1}{pC} \right)}{r_2 + r_3 + \frac{1}{pC}} = \frac{pC (r_1 r_2 + r_1 r_3 + r_2 r_3) + r_1 + r_2}{pC (r_2 + r_3) + 1} = 0.$$

Единственный корень этого уравнения

$$p = p_1 = - \frac{r_1 + r_2}{C (r_1 r_2 + r_1 r_3 + r_2 r_3)} = - 12 \cdot 10^4 \text{ сек}^{-1}.$$

Так как характеристическое сопротивление имеет только один корень, свободная составляющая каждой искомой величины имеет вид $Ae^{p_1 t}$. Итак, переходные токи и напряжение на конденсаторе:

$$i_1 = i_{1\text{нр}} + i_{1\text{св}} = \frac{E}{r_1 + r_2} + A_1 e^{p_1 t} = (1 - 0,2 e^{-12 \cdot 10^4 t}) \text{ а};$$

$$i_2 = i_{2\text{нр}} + i_{2\text{св}} = \frac{E}{r_1 + r_2} + A_2 e^{p_1 t} = (1 + 0,1 e^{-12 \cdot 10^4 t}) \text{ а};$$

$$i_3 = i_{3\text{нр}} + i_{3\text{св}} = 0 + A_3 e^{p_1 t} = - 0,3 e^{-12 \cdot 10^4 t} \text{ а};$$

$$u_{\text{с}} = u_{\text{сп}} + u_{\text{св}} = r_2 i_{2\text{нр}} + B e^{p_1 t} = (10 + 2,5 e^{-12 \cdot 10^4 t}) \text{ в}.$$

Графики найденных величин изображены на рис. 9.12, б.

9.17. В схеме рис. 9.13 до коммутации (рубильник замкнут) был установившийся режим. Даны: $r_1 = 50 \text{ ом}$, $r_2 = 30 \text{ ом}$, $r_3 = 20 \text{ ом}$, $C = 10 \text{ мкф}$, $U = 80 \text{ в}$. Определить после выключения рубильника: 1) начальные значения переходных токов и напряжения на конденсаторе и их принужденные и свободные составляющие; 2) законы изменения во времени всех токов и напряжения на конденсаторе.

9.18. В схеме рис. 9.14 до замыкания рубильника был установившийся режим. Даны: $r_1 = 8 \text{ ом}$, $r_1' = 10 \text{ ом}$, $r_2 = 10 \text{ ом}$, $L = 25 \text{ мГн}$, $r_3 = 30 \text{ ом}$, $E = 60 \text{ в}$.

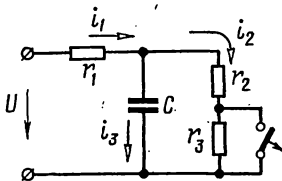


Рис. 9.13

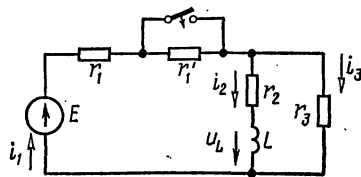


Рис. 9.14

Требуется: 1. Найти свободные составляющие $i_{1св}(0_+)$, $i_{2св}(0_+)$, $i_{3св}(0_+)$, $u_{Lсв}(0_+)$, $\left. \frac{du_{Lсв}}{dt} \right|_{t=0_+}$; 2. Определить законы изменения всех токов в цепи после замыкания рубильника.

9.19. Цепь рис. 9.15, а включается под действие постоянного напряжения $U = 48$ в. Найти законы изменения токов i_1 , i_2 и i_3 во времени и изобразить их графически, если $r_1 = 160$ ом, $L_1 = 100$ мГн, $r_3 = 90$ ом, $L_2 = 36$ мГн.

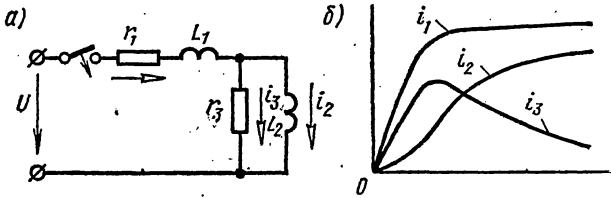


Рис. 9.15

Решение. Способ 1. Уравнения Кирхгофа имеют вид:

$$i_1 = i_2 + i_3; \quad (1)$$

$$U = i_1 r_1 + L_1 \frac{di_1}{dt} + i_3 r_3; \quad (2)$$

$$L_2 \frac{di_2}{dt} = i_3 r_3. \quad (3)$$

Полученную систему уравнений решим относительно одного из токов.

Подставив значение $i_3 = \frac{L_2}{r_3} \cdot \frac{di_2}{dt}$ из уравнения (3) в уравнения (1) и (2), получим:

$$i_1 = i_2 + \frac{L_2}{r_3} \cdot \frac{di_2}{dt}; \quad (4)$$

$$U = i_1 r_1 + L_1 \frac{di_1}{dt} + L_2 \frac{di_2}{dt}. \quad (5)$$

Наконец, подставив i_1 из (4) в (5), получим дифференциальное уравнение относительно тока i_2 :

$$\frac{d^2 i_2}{dt^2} + \left(\frac{r_1}{L_1} + \frac{r_3}{L_2} + \frac{r_3}{L_1} \right) \frac{di_2}{dt} + \frac{r_1 r_3}{L_1 L_2} i_2 = \frac{U r_3}{L_1 L_2}; \quad (6)$$

$$i_2 = i_{2нп} + i_{2св}. \quad (7)$$

Для нахождения $i_{2нп}$ воспользуемся тем, что при установившемся режиме $i_{2нп} = \text{const}$, а $\frac{di_{2нп}}{dt} = 0$, тогда из уравнения (6)

$$i_{2нп} = \frac{U}{r_1} \quad (8)$$

Этот результат можно было получить непосредственно из схемы рис. 9.15, а, в которой параллельный участок закорочен катушкой индуктивности, не имеющей активного сопротивления.

Теперь найдем выражение для свободного тока $i_{2\text{св}}$. Оно может быть получено из уравнения (6), в правой части которого следует поставить нуль. Это решение имеет вид

$$i_{2\text{св}} = A_1 e^{\rho_1 t} + A_2 e^{\rho_2 t}, \quad (9)$$

где A_1 и A_2 — постоянные интегрирования;
 ρ и ρ_2 — корни характеристического уравнения

$$\rho^2 + \left(\frac{r_1}{L_1} + \frac{r_3}{L_2} + \frac{r_3}{L_1} \right) \rho + \frac{r_1 r_3}{L_1 L_2} = 0, \quad (10)$$

или

$$\rho^2 + 5000\rho + 4 \cdot 10^6 = 0,$$

откуда

$$\rho_1 = -1000 \text{ сек}^{-1}, \quad \rho_2 = -4000 \text{ сек}^{-1}.$$

Подставляя $i_{2\text{нр}}$ из (8) и $i_{2\text{св}}$ из (9) в уравнение (7), получим

$$i_2 = A_1 e^{\rho_1 t} + A_2 e^{\rho_2 t} + \frac{U}{r_1}. \quad (11)$$

Для определения A_1 и A_2 воспользуемся начальными условиями: $i_1(0_+) = i_1(0_-) = 0$ (I) и $i_2(0_+) = i_2(0_-) = 0$ (II).

Следовательно, согласно (1) ток $i_3(0_+) = 0$.

Из выражения (11)

$$i_2(0_+) = A_1 + A_2 + \frac{U}{r_1} = 0; \quad (12)$$

из уравнения (3)

$$i_3(0_+) = \frac{L_2}{r_3} \cdot \frac{di_2}{dt} \Big|_{t=0_+} = \frac{L_2}{r_3} (A_1 \rho_1 e^{\rho_1 t} + A_2 \rho_2 e^{\rho_2 t}) \Big|_{t=0} = A_1 \rho_1 + A_2 \rho_2 = 0. \quad (13)$$

Решая уравнения (12) и (13), находим:

$$A_1 = \frac{U \rho_2}{r_1 (\rho_1 - \rho_2)}; \quad A_2 = \frac{U \rho_1}{r_1 (\rho_2 - \rho_1)}. \quad (14)$$

Подставляя эти значения A_1 и A_2 в уравнение (11), найдем i_2 , а затем из уравнения (3) — ток i_3 и из уравнения (1) — ток i_1 .

Таким образом, окончательные выражения токов:

$$\left. \begin{aligned} i_2 &= \frac{U}{r_1} \left(1 - \frac{\rho_2}{\rho_2 - \rho_1} e^{\rho_1 t} + \frac{\rho_1}{\rho_2 - \rho_1} e^{\rho_2 t} \right); \\ i_3 &= \frac{U}{r_1} \cdot \frac{L_2 \rho_1 \rho_2}{r_3 (\rho_2 - \rho_1)} (e^{\rho_2 t} - e^{\rho_1 t}). \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

Так как произведение корней квадратного уравнения равно свободному члену, т.е. $p_1 p_2 = \frac{r_1 r_3}{L_1 L_2}$, ток

$$i_3 = \frac{U}{L_1 (p_2 - p_1)} (e^{p_2 t} - e^{p_1 t}); \quad (16)$$

$$i_1 = i_2 + i_3. \quad (17)$$

Подставляя в (15) и (17) числовые значения, получим:

$$i_2 = (0,3 - 0,4 e^{-1000t} + 0,1 e^{-4000t}) a;$$

$$i_3 = 0,16 (e^{-1000t} - e^{-4000t}) a;$$

$$i_1 = (0,3 - 0,24 e^{-1000t} - 0,06 e^{-4000t}) a.$$

На рис. 9.15, б даны кривые токов.

Способ 2. Решим задачу, не выписывая дифференциальных уравнений системы, а приравняв нулю характеристическое входное сопротивление цепи (см. основные положения и соотношения, п. б):

$$Z(p) = r_1 + pL_1 + \frac{pL_2 r_3}{pL_2 + r_3} = \frac{p^2 L_1 L_2 + (r_1 L_2 + r_3 L_1 + r_3 L_2)p + r_1 r_3}{pL_2 + r_3} = 0.$$

Подставляя сюда числовые значения, находим два корня p :

$$p_1 = -10^3 \text{ сек}^{-1}; \quad p_2 = -4 \cdot 10^3 \text{ сек}^{-1}. \quad (1)$$

Так как характеристическое уравнение имеет два корня, то свободную составляющую каждого из токов определяем в виде $i_{\text{св}} = A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t}$, а его производная равна $i'_{\text{св}} = p_1 A_1 e^{p_1 t} + p_2 A_2 e^{p_2 t}$.

Входящие в эти уравнения постоянные интегрирования A_1 и A_2 найдем по начальным значениям каждого переходного тока и его производной.

Запишем, например, выражения переходного тока i_1 и его первой производной:

$$i_1 = i_{1\text{нп}} + i_{1\text{св}} = i_{1\text{нп}} + A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t}; \quad (2)$$

$$\frac{di_1}{dt} = \frac{di_{1\text{нп}}}{dt} + p_1 A_1 e^{p_1 t} + p_2 A_2 e^{p_2 t}. \quad (3)$$

Для начального момента времени $t = 0_+$ после коммутации:

$$i_1(0_+) = i_{1\text{нп}}(0_+) + A_1 + A_2; \quad (4)$$

$$\left. \frac{di_1}{dt} \right|_{t=0_+} = \left. \frac{di_{1\text{нп}}}{dt} \right|_{t=0_+} + p_1 A_1 + p_2 A_2 = \frac{di_{1\text{нп}}}{dt} - 10^3 A_1 - 4 \cdot 10^3 A_2. \quad (5)$$

До коммутации все токи равны нулю.

Рассчитаем принужденный режим после коммутации. Индуктивности L_1 и L_2 не оказывают сопротивления постоянному току, поэтому

для этого режима сопротивление r_3 шунтировано коротко, токи в ветвях:

$$i_{1np} = i_{2np} = \frac{U}{r_1} = 0,3 \text{ а}; \quad i_{3np} = 0.$$

Определим начальные значения токов для момента $t = 0_+$. Для этого составляем уравнения по законам Кирхгофа:

$$U = r_1 i_1 + L_1 \frac{di_1}{dt} + r_3 i_3; \quad (6)$$

$$r_3 i_3 = L_2 \frac{di_2}{dt}; \quad (7)$$

$$i_1 = i_2 + i_3. \quad (8)$$

По закону коммутации токи i_1 и i_2 не могут измениться скачком, т. е. $i_1(0_-) = i_1(0_+) = 0$, $i_2(0_-) = i_2(0_+) = 0$. Подставляя эти значения в уравнения (6)–(8), находим зависимые начальные значения $i_3(0_+) = 0$, $\left. \frac{di_1}{dt} \right|_{t=0_+} = \frac{U}{L_1} = 480 \text{ а/сек}$. Подставляя найденные значения $i_{1np} = 0,3 \text{ а}$, $\left. \frac{di_{1np}}{dt} \right|_{t=0_+} = \frac{d}{dt} 0,3 = 0$, $i_1(0_+) = 0$ и $\left. \frac{di_1}{dt} \right|_{t=0_+} = 480 \text{ а/сек}$ в уравнения (4)–(5), вычислим постоянные интегрирования $A_1 = -0,24$; $A_2 = -0,06$. Следовательно, согласно уравнению (2), ток $i_1 = (0,3 - 0,24 e^{-1000t} - 0,06 e^{-4000t}) \text{ а}$.

Аналогично, ток

$$i_2 = i_{2np} + i_{2св} = 0,3 + B_1 e^{p_1 t} + B_2 e^{p_2 t}$$

и его производная

$$\left. \frac{di_2}{dt} \right|_{t=0_+} = p_1 B_1 + p_2 B_2.$$

Эти выражения при $t = 0_+$ с учетом найденных принужденного и начального значений тока i_2 имеют вид:

$$i_2(0_+) = 0 = 0,3 + B_1 + B_2;$$

$$\left. \frac{di_2}{dt} \right|_{t=0_+} = 0 = -1000 B_1 - 4000 B_2.$$

Совместное решение этих уравнений дает $B_1 = -0,4 \text{ а}$, $B_2 = 0,1 \text{ а}$. Тогда

$$i_2 = (0,3 - 0,4 e^{-1000t} + 0,1 e^{-4000t}) \text{ а}.$$

Ток i_3 находим из уравнения (8):

$$i_3 = i_1 - i_2 = 0,16 (e^{-1000t} - e^{-4000t}) \text{ а}.$$

9.20. При полном разряде конденсатора емкостью $C = 200 \text{ мкф}$ на активном сопротивлении выделяется в виде тепловой энергии 1 Дж . Спустя $0,06 \text{ сек}$ после начала разряда напряжение на обкладках конденсатора равнялось 5 в . а) До какого напряжения был заряжен

конденсатор и какова величина сопротивления, через которое он разряжается? б) Через какой промежуток времени после начала разряда напряжение конденсатора упадет до 0,001% своего первоначального значения?

9.21. Конденсатор емкостью 45 мкф заряжается через сопротивление 10 ом от источника энергии с напряжением 500 в. Чему равен заряд конденсатора, когда ток составляет половину своей начальной величины? С какой скоростью нарастает заряд в этот момент? Чему равна ошибка в процентах, если принять, что конденсатор зарядится полностью в конце десятой секунды?

9.22. Между точками *a* и *b* включены последовательно соединенные активное сопротивление 1000 ом и конденсатор емкостью 50 мкф, а между точками *b* и *c* включены последовательно соединенные конденсатор емкостью 25 мкф и активное сопротивление 500 ом. Чему равны начальные и конечные напряжения между *a* и *b*, *b* и *c* после того, как к зажимам *a* и *c* будет подведено постоянное напряжение 120 в?

9.23. К цепи, состоящей из активного сопротивления 1000 ом, соединенного последовательно с двумя параллельными ветвями, подводится постоянное напряжение 120 в. В первой ветви включено активное сопротивление 1000 ом, а во второй — последовательно соединенные активное сопротивление 5000 ом и конденсатор емкостью 50 мкф. Чему равны начальные и конечные значения токов в параллельных ветвях?

9.24. Последовательно с активным сопротивлением $r_1 = 30$ ом включены две параллельные ветви. Одна из них содержит последовательно соединенные активное сопротивление $r_2 = 50$ ом и конденсатор $C = 2$ мкф, вторая — последовательно соединенные активное сопротивление $r_3 = 70$ ом и катушку индуктивности $L = 0,4$ гн. Указанная цепь подключается к источнику постоянного напряжения $U = 120$ в. Определить начальные и конечные токи и напряжения на сопротивлении r_1 и на параллельном участке.

9.25. Конденсатор емкостью C , предварительно заряженный до напряжения U_0 , подключается через сопротивление к источнику постоянного напряжения U (рис. 9.16). Найти законы изменения напряжения на обкладках конденсатора и тока, проходящего в цепи при замыкании рубильника.

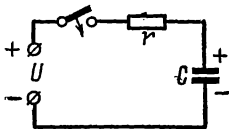


Рис. 9.16

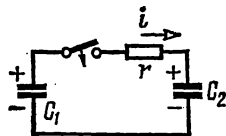


Рис. 9.17

9.26. Конденсатор $C_1 = 10$ мкф, заряженный до напряжения $U_1 = 100$ в, замыкается на цепь, состоящую из последовательно соединенных активного сопротивления $r = 125$ ом и заряженного до напряжения $U_2 = 20$ в конденсатора $C_2 = 40$ мкф (рис. 9.17). Найти

как функцию времени ток в цепи и напряжение на обкладках каждого конденсатора, а также построить графики найденных функций. Найти величину энергии электрического поля до замыкания рубильника и по окончании переходного процесса.

9.27. Решить задачу 9.26, если полярность заряда конденсатора C_2 противоположна той, которая изображена на рис. 9.17. Цифровые данные те же, что и в предыдущей задаче.

9.28. Конденсатор $C_1 = 20 \text{ мкф}$, заряженный до напряжения $U_0 = 25 \text{ в}$, замыкается на цепь, состоящую из последовательно соединенных активного сопротивления $r = 125 \text{ ом}$ и незаряженного конденсатора $C_2 = 5 \text{ мкф}$. Найти как функцию времени ток в цепи и напряжения на обкладках каждого конденсатора, а также построить графики найденных функций.

9.29. Цепь рис. 9.18 включается на постоянное напряжение. Найти токи и начертить кривые изменения их во времени. Данные цепи: $U = 10 \text{ в}$, $r_1 = 40 \text{ ом}$, $r_2 = 10 \text{ ом}$, $C = 25 \text{ пф}$.

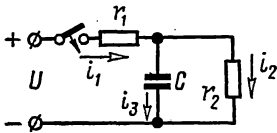


Рис. 9.18

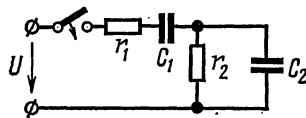


Рис. 9.19

9.30. Цепь рис. 9.19 включается на постоянное напряжение $U = 100 \text{ в}$. Найти выражение для напряжения на конденсаторе C_2 , если $C_1 = 100 \text{ мкф}$, $C_2 = 20 \text{ мкф}$, $r_1 = 10 \text{ ом}$, $r_2 = 100 \text{ ом}$.

9.31. Конденсатор с утечкой, параметры которого $C = 2 \text{ мкф}$ и $r = 50 \text{ ком}$, отключается от источника постоянного тока с напряжением $U = 120 \text{ в}$ (рис. 9.20). Определить напряжение на конденсаторе через $t_1 = 0,1 \text{ сек}$ после отключения.

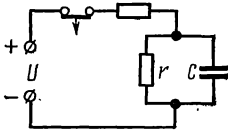


Рис. 9.20

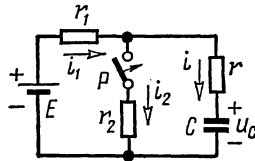


Рис. 9.21

9.32. Определить законы изменения напряжения на конденсаторе и всех токов при замыкании рубильника P (рис. 9.21) и построить их кривые. Даны: $E = 24 \text{ в}$, $r = 20 \text{ ом}$, $r_1 = 50 \text{ ом}$, $r_2 = 100 \text{ ом}$, $C = 3 \text{ мкф}$.

9.33. Реактивная катушка с активным сопротивлением $r = 10 \text{ ом}$ и индуктивностью $L = 364 \text{ мГн}$ включается в момент $t = 0$ под действие синусоидального напряжения $u = 160 \sin \left(\omega t + \frac{\pi}{3} \right) \text{ в}$.

Определить значение тока через два периода после момента включения. Частота переменного тока $f = 50$ гц.

9.34. К переменному напряжению, действующее значение которого $U = 220$ в, подсоединена цепь рис. 9.22, а, состоящая из двух последовательно соединенных приемников энергии с: $r_1 = 2$ ом, $L_1 = 40$ мгн и $r_2 = 6$ ом, $L_2 = 9,8$ мгн.

Включением рубильника P приемник r_1 , L_1 закорачивается в момент, когда мгновенное значение приложенного напряжения равно действующему значению и $\frac{du}{dt} > 0$. Найти выражение тока, проходящего через вторую катушку (r_2 , L_2), и построить его график. Частота переменного тока $f = 50$ гц.

Решение. Пусть приложенное к цепи напряжение $u = U_m \sin(\omega t + \psi)$, где ψ — угол включения, определяемый из условия задачи при $t = 0$, т. е.

$$u = U_m \sin \psi = \frac{U_m}{\sqrt{2}},$$

откуда

$$\sin \psi = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

и одно из возможных значений угла $\psi = 45^\circ$.

До включения рубильника в цепи проходил ток

$$i = I_m \sin(\omega t + \psi - \varphi),$$

где

$$I_m = \frac{U_m}{\sqrt{(r_1 + r_2)^2 + (\omega L_1 + \omega L_2)^2}} = \frac{220 \sqrt{2}}{\sqrt{8^2 + 15,7^2}} = 17,7 \text{ а}$$

и

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\omega L_1 + \omega L_2}{r_1 + r_2} = \frac{15,7}{8} = 1,962; \varphi = 63^\circ.$$

После включения рубильника

$$U = i_2 r_2 + L_2 \frac{di_2}{dt}.$$

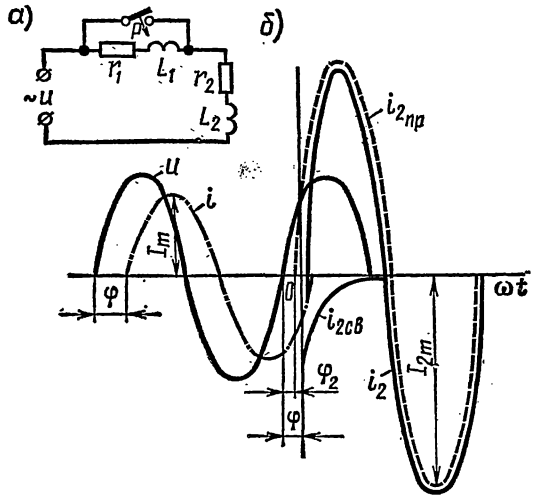


Рис. 9.22

Принужденный (установившийся) ток

$$i_{2np} = I_{2m} \sin(\omega t + \psi - \varphi_2),$$

где

$$I_{2m} = \frac{U_m}{\sqrt{r_2^2 + (\omega L_2)^2}} = \frac{220 \sqrt{2}}{\sqrt{6^2 + 3,06^2}} = 46 \text{ а};$$

$$\varphi_2 = \arctg \frac{\omega L_2}{r_2} = \arctg 0,51 = 27^\circ.$$

Свободный ток

$$i_{2св} = A e^{-\frac{r_2}{L_2} t},$$

и общий ток

$$i_2 = I_{2m} \sin(\omega t + \psi - \varphi_2) + A e^{-\frac{r_2}{L_2} t}.$$

Начальным условием является непрерывность тока, проходящего в катушке r_2, L_2 в момент включения, т. е. при $t = 0_+, i = i_2$ или

$$I_{2m} \sin(\psi - \varphi_2) + A = I_m \sin(\psi - \varphi),$$

отсюда

$$A = I_m \sin(\psi - \varphi) - I_{2m} \sin(\psi - \varphi_2).$$

Таким образом,

$$i_2 = I_{2m} \sin(\omega t + \psi - \varphi_2) + [I_m \sin(\psi - \varphi) - I_{2m} \sin(\psi - \varphi_2)] \times \\ \times e^{-\frac{r_2}{L_2} t} = [46 \sin(\omega t + 18^\circ) - 19,7 e^{-613t}] \text{ а}.$$

На рис. 9.22, б изображен график тока i_2 .

9.35. К зажимам цепи рис. 9.23 приложено синусоидальное напряжение $u = U_m \sin(\omega t + \psi)$, $U_m = 10 \text{ в}$, $\omega = 5000 \text{ сек}^{-1}$. Параметры цепи: $r_1 = 3 \text{ ом}$, $r_2 = 4 \text{ ом}$, $L_1 = 0,8 \text{ мГн}$ и $L_2 = 4 \text{ мГн}$. В момент прохождения тока через положительный максимум включается рубильник P . Найти уравнения токов i_1 и i_2 и построить их кривые.

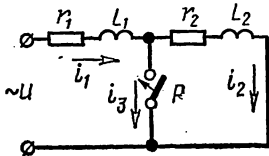


Рис. 9.23

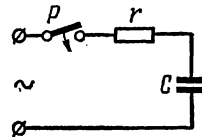


Рис. 9.24

9.36. Цепь рис. 9.24 включается на синусоидальное напряжение. Построить кривую тока, когда включение производится в момент прохождения тока установившегося режима через нулевое значение при $\frac{di}{dt} > 0$. Даны: $r = 20 \text{ ом}$, $C = 400 \text{ мкФ}$, $f = 50 \text{ Гц}$ и $U_m = 141 \text{ в}$.

9.37. К цепи рис. 9.24 приложено синусоидальное напряжение, действующее значение которого равно U . Чему должно быть равно мгновенное значение напряжения u в момент включения, чтобы не было свободного тока, и каково при этом начальное значение установившегося тока?

9.38. В схеме рис. 9.25, а до замыкания рубильника был установившийся режим. Даны: $r'_1 = r_1 = 20$ ом, $r_2 = 16$ ом, $C = 11,1$ мкф, $\omega = 5000$ сек⁻¹, $e(t) = 25 \sin(\omega t - 30^\circ)$ в. Найти законы изменения тока в неразветвленной части цепи и напряжения на конденсаторе после замыкания рубильника P .

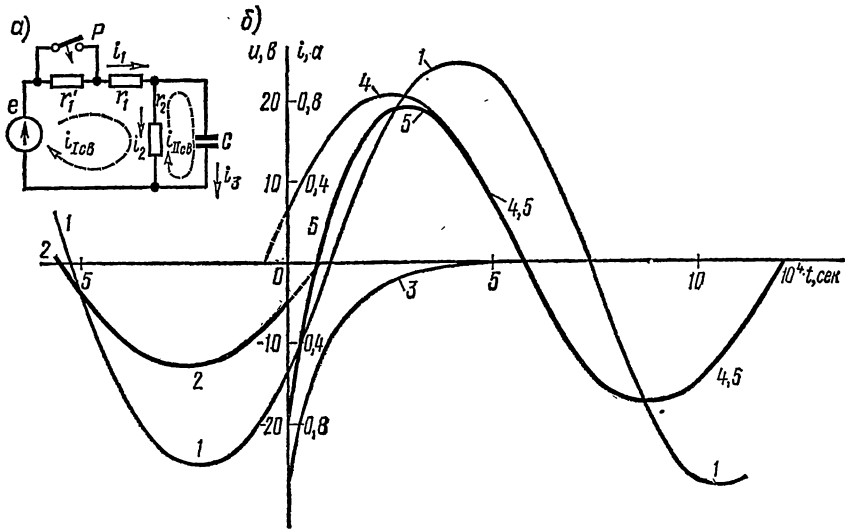


Рис. 9.25

Решение. Расчет режима до коммутации. Сначала найдем комплексные значения тока \dot{I}_1 и напряжения на конденсаторе \dot{U}_C :

$$\dot{I}_1 = \frac{\dot{E}}{r'_1 + r_1 + \frac{1}{\omega C} r_2} = \frac{\frac{25}{\sqrt{2}} e^{-j30^\circ}}{40 - j \frac{16 \cdot 18}{16 - j 18}} = 0,356 e^{-j20^\circ 45'} \text{ а;}$$

$$r'_1 + r_1 = \frac{1}{r_2 - j \frac{1}{\omega C}}$$

$$\dot{U}_C = \dot{E} - (r'_1 + r_1) = 4,26 e^{-j62^\circ 5'} \text{ в.}$$

Соответствующие мгновенные значения:

$$i_1 = 0,504 \sin(\omega t - 20^\circ 45') \text{ а;}$$

$$u_C = 6,02 \sin(\omega t - 62^\circ 5') \text{ в.}$$

К моменту начала коммутации ток и напряжение имели значения:
 $i_1(0_-) = -0,504 \sin 20^\circ 45' = -0,175 \text{ а};$
 $u_C(0_-) = -6,02 \sin 62^\circ 5' = -5,32 \text{ в}.$

Расчет тока и напряжения на конденсаторе в принужденном режиме после коммутации. Найдем комплексное выражение тока:

$$\dot{I}_{\text{нр}} = \frac{\dot{E}}{r_1 - \frac{1}{r_2 - j \frac{1}{\omega C}}} = 0,59 e^{j15^\circ 20'};$$

$$\dot{U}_{\text{нр}} = E - r_1 \dot{I}_{\text{нр}} = 6,95 e^{j55^\circ 40'} \text{ в};$$

$$i_{\text{нр}} = 0,84 \sin(\omega t + 15^\circ 20') \text{ а};$$

$$u_{\text{нр}} = 9,8 \sin(\omega t - 55^\circ 40') \text{ в}.$$

Расчет переходных токов и напряжения на конденсаторе. Выбрав для послекоммутационной схемы направления контурных токов, как показано на рис. 9.25, а, составим уравнения свободных контурных токов:

$$(r_1 + r_2) i_{\text{I св}} - r_2 i_{\text{II св}} = 0;$$

$$-r_2 i_{\text{I св}} - r_2 i_{\text{II св}} + \frac{1}{C} \int i_{\text{II св}} dt = 0.$$

Подставляя числа и заменяя символ интегрирования множителем $1/p$ (см. основные положения и соотношения, п. 6), получаем характеристическую систему:

$$36i_{\text{I св}} - 16i_{\text{II св}} = 0;$$

$$-16i_{\text{I св}} + \left(16 + \frac{1}{11,1 \cdot 10^{-6} p}\right) = 0.$$

Составим характеристический определитель этой системы и приравняем его нулю, это и будет характеристическое уравнение

$$\Delta(p) = \begin{vmatrix} 36 & -16 \\ -16 & 16 + \frac{1}{11,1 \cdot 10^{-6} p} \end{vmatrix} = 0.$$

Его единственный корень

$$p = p_1 = -1,01 \cdot 10^4 \text{ сек}^{-1}.$$

Свободный ток и напряжение на конденсаторе

$$i_{\text{I св}} = A e^{p_1 t} = A e^{-1,01 \cdot 10^4 t};$$

$$u_{\text{C св}} = B e^{p_1 t} = B e^{-1,01 \cdot 10^4 t}.$$

Переходный ток

$$i_1 = i_{1np} + i_{1cb} = 0,84 \sin(\omega t + 15^\circ 20') + A e^{-1,01 \cdot 10^4 t} \text{ а}$$

и напряжение на конденсаторе

$$u_C = u_{Cnp} + u_{Ccb} = 9,8 \sin(\omega t - 55^\circ 40') + B e^{-1,01 \cdot 10^4 t} \text{ в.}$$

Для определения постоянных интегрирования надо использовать начальное условие. Независимое начальное условие состоит в том, что напряжение на конденсаторе не может измениться скачком, т. е.

$$u_C(0_+) = u_C(0_-), \text{ или } [9,8 \sin(\omega t - 55^\circ 40') + B e^{-1,01 \cdot 10^4 t}]_{t=0} = -5,32,$$

отсюда

$$B = 2,8 \text{ в.}$$

Для нахождения постоянной интегрирования A необходимо знать начальный ток $i_1(0_+)$. Он может быть рассчитан по уравнению Кирхгофа.

$$e_1(t) = r_1 i_1 + u_C(t),$$

из которого при $t = 0_+$ получим

$$i_1(0_+) = \frac{e_1(0_+) - u_C(0_+)}{r_1} = \frac{-25 \sin 30^\circ - 5,32}{20} = -0,891 \text{ а.}$$

Из выражения для переходного тока i_1 для момента $t = 0_+$ найдем A :

$$i_1(0_+) = 0,84 \sin 15^\circ 20' + A = -0,891,$$

отсюда.

$$A = -1,11 \text{ а.}$$

Наконец, запишем искомые величины:

$$i_1 = 0,84 \sin(5000t + 15^\circ 20') - 1,11 e^{-1,01 \cdot 10^4 t} \text{ а;}$$

$$u_C = 9,8 \sin(5000t - 55^\circ 40') + 2,8 e^{-1,01 \cdot 10^4 t} \text{ в.}$$

На рис. 9.25, б изображены кривые: 1 — э.д.с. $e(t)$; 2 — ток i_1 до коммутации; 3 — ток i_{1cb} ; 4 — ток i_{1np} ; 5 — переходный ток i_1 .

9.39. К цепи рис. 9.26 подключается синусоидальное напряжение $u = U_m \sin(\omega t + \psi)$. Включение происходит в момент, когда приложенное напряжение имеет положительный максимум. Найти закон изменения напряжения между обкладками конденсатора, если

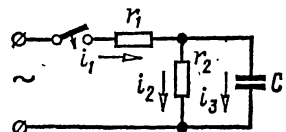


Рис. 9.26

$$= 65 \text{ мв, } r_1 = 12 \text{ ом, } r_2 = 3 \text{ ом, } \frac{1}{\omega C} = 1 \text{ ом и } \omega = 2 \cdot 10^5 \text{ сек}^{-1}.$$

Б. Расчет цепей, содержащих элементы r , L , C

9.40. Конденсатор $C = 50$ мкф, заряженный предварительно до напряжения $U = 500$ в, разряжается через цепь, активное сопротивление которой $r = 100$ ом и индуктивность $L = 10$ мГн. Определить, через какой промежуток времени, считая от начального момента разряда, ток в цепи достигнет максимального значения и какова величина последнего. Вычислить, в какой момент времени в индуктивной катушке наведется максимальная э.д.с.; найти ее величину.

9.41. Ответить на вопросы предыдущей задачи, если

$$r = 2 \sqrt{\frac{L}{C}} \quad (L = 10 \text{ мГн и } C = 50 \text{ мкф}), \quad U = 500 \text{ в.}$$

9.42. Подсчитать частоту ω_0' собственных незатухающих колебаний и частоту ω_0 затухающих колебаний контура, изображенного на рис. 9.27, если $L = 25$ мГн, $C = 2500$ пф и $r = 4000$ ом.

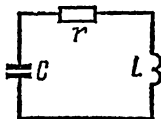


Рис. 9.27

9.43. Сколько потребуется полных колебаний, чтобы в контуре, имеющем логарифмический декремент затухания $\delta = 0,02$, амплитуда тока уменьшилась до 1% от своей первоначальной величины?

9.44. Цепь рис. 9.28, а включается на постоянное напряжение $U = 125$ в.

Найти выражение мгновенного значения напряжения u_C на конденсаторе для трех случаев: 1) $r = 250$ ом, $L = 667$ мГн, $C = 2$ мкф; 2) $r = 100$ ом, $L = 40$ мГн, $C = 1$ мкф; 3) $r = 100$ ом, $L = 40$ мГн, $C = 5$ мкф.

Решение. Наметим план решения задачи. Напряжение на конденсаторе будем находить в виде суммы принужденного и свободного значений:

$$u_C = u_{Cпр} + u_{Cсв}. \quad (1)$$

Принужденное значение напряжения на конденсаторе равно нулю ($u_{Cпр} = 0$), так как установившееся значение тока $i_{2пр}$ неизменно, и, следовательно, оно не создает падения напряжения на индуктивности $u_{Lпр} = u_{Cпр} = L \frac{di_{2пр}}{dt} = 0$ (при установившемся режиме конденсатор шунтирован индуктивностью катушки накоротко).

Для нахождения вида решения свободной составляющей составим характеристическое входное сопротивление цепи и приравняем его нулю (см. основные положения и соотношения, п. 6):

$$Z(p) = r + \frac{pL \frac{1}{pC}}{pL + \frac{1}{pC}}. \quad (2)$$

В полученном характеристическом уравнении освободимся от знаменателя, приведя его к виду

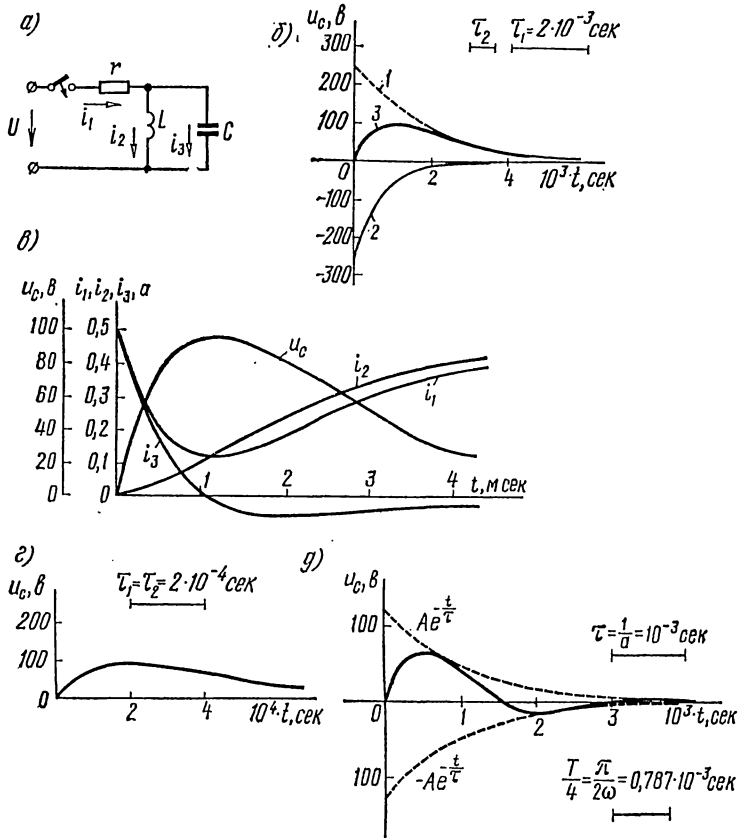


Рис. 9.28

$$rLCp^2 + Lp + r = 0. \quad (3)$$

Это уравнение второго порядка и, следовательно, оно имеет два корня:

$$\rho_{1,2} = -\frac{1}{2rC} \pm \sqrt{\frac{1}{4r^2C^2} - \frac{1}{LC}}. \quad (4)$$

Для каждого из трех заданных случаев по уравнению (4) определим вид корней (действительные разные, действительные кратные и комплексно-сопряженные) и в соответствии с ним находим свободное решение $u_{cсв}$ по одной из формул, указанной в п. 4 основных положений. Заметим, что свободная составляющая напряжения на конденсаторе содержит две постоянные интегрирования.

Для определения постоянных интегрирования поступим так. Составим уравнения по законам Кирхгофа:

$$\left. \begin{aligned} i_1 &= i_2 + i_3, \\ U &= r_1 i_1 + u_c. \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Запишем независимые начальные условия:

$$u_C(0_-) = u_C(0_+) = 0, \quad (I) \quad i_2(0_-) = i_2(0_+) = 0. \quad (II)$$

Подставим их в уравнения (5) для начального момента времени (после коммутации) и получим:

$$\left. \begin{aligned} i_1(0_+) &= i_2(0_+) + i_3(0_+), \\ U &= r i_1(0_+) + u_C(0_+). \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Решив их, находим $i_3(0_+)$. Затем, используя зависимость $i_3 = C \frac{du_C}{dt}$ для момента $t = 0_+$, получим

$$i_3(0_+) = C \left. \frac{du_C}{dt} \right|_{t=0_+}. \quad (7)$$

Наконец, определим две неизвестные постоянные интегрирования из уравнения (1), в которое подставляем найденные u_{Cnp} и u_{Ccb} , и из уравнения (7).

Конкретное применение указанной методики расчета рассмотрим для каждого из трех заданных случаев.

1. Подставим в уравнение (4) числовые значения первого случая:

$$\begin{aligned} p_{1,2} &= -\frac{1}{2 \cdot 250 \cdot 2 \cdot 10^{-6}} \sqrt{\left(\frac{1}{2 \cdot 250 \cdot 2 \cdot 10^{-6}}\right)^2 - \frac{1}{667 \cdot 10^{-3} \cdot 2 \cdot 10^{-6}}} = \\ &= (-1000 \pm 500) \text{ сек}^{-1} \end{aligned}$$

т. е.

$$p_1 = -500 \text{ сек}^{-1}; \quad p_2 = -1500 \text{ сек}^{-1}.$$

Получены корни действительные и различные, следовательно, свободная составляющая напряжения на конденсаторе

$$u_{Ccb} = A_1 e^{-500t} + A_2 e^{-1500t}. \quad (8)$$

Далее из уравнений (6) с учетом начальных условий (I) и (II) получим:

$$\begin{aligned} i_1(0_+) &= i_2(0_+) + i_3(0_+) = 0 + i_3(0_+) = i(0_+); \\ U &= r i_1(0_+) + u_C(0_+) = 250 i(0_+) + 0 = 125. \end{aligned}$$

Решая эту систему уравнений, находим $i_3(0_+) = 0,5 \text{ а}$. Подставив в равенство (1) и в выражение тока i_3 уравнение (8), получим:

$$\begin{aligned} u_C &= u_{Cnp} + u_{Ccb} = 0 + A_1 e^{-500t} + A_2 e^{-1500t}; \\ i_3 &= C \frac{du_C}{dt} = 2 \cdot 10^{-6} (-500 A_1 e^{-500t} - 1500 A_2 e^{-1500t}). \end{aligned}$$

Перепишем эти уравнения для момента $t = 0_+$ и затем, подставляя в них $u_C(0_+) = 0$ и $i_3(0_+) = 0,5$ а, получим:

$$\begin{aligned} 0 &= A_1 + A_2; \\ 0,5 &= -10^{-3}A_1 - 3 \cdot 10^{-3}A_2. \end{aligned}$$

Отсюда $A_1 = A_2 = 250$ в. Таким образом, согласно (1) и (8), искомое напряжение

$$u_C(t) = u_{Ccb} = (250 e^{-500t} - 250 e^{-1500t}) \text{ в.}$$

График отдельных составляющих решения и суммарного значения напряжения на конденсаторе построен на рис. 9.28, б: на нем кривая 1 — $250 e^{-500t}$; 2 — $250 e^{-1500t}$; 3 — $u_C(t) = u_{Ccb}(t)$.

В целях упражнения вычислим также все токи и построим их графики:

$$\begin{aligned} i_3 &= C \frac{du_C}{dt} = 2 \cdot 10^{-6} \frac{d}{dt} (250 e^{-500t} - 250 e^{-1500t}) = \\ &= 0,75 e^{-500t} - 0,25 e^{-500t} \text{ а}; \\ i_1 &= \frac{U - u_C}{r} = \frac{125 - (250 e^{-500t} - 250 e^{-1500t})}{250} = (0,5 - e^{-500t} + e^{-1500t}) \text{ а}; \\ i_2 &= i_1 - i_3 = (0,5 - 0,75 e^{-500t} + 0,25 e^{-1500t}) \text{ а}. \end{aligned}$$

Графики токов и напряжения u_C даны на рис. 9.28, в.

2. Подставим в формулу (4) численные значения второго случая:

$$\begin{aligned} p_{1,2} &= -\frac{1}{2 \cdot 100 \cdot 1 \cdot 10^{-6}} \pm \sqrt{\left(\frac{1}{2 \cdot 100 \cdot 1 \cdot 10^{-6}}\right)^2 - \frac{1}{40 \cdot 10^{-3} \cdot 1 \cdot 10^{-6}}} = \\ &= -5 \cdot 10^3 \text{ сек}^{-1}. \end{aligned}$$

Корень — двукратный, следовательно, решение ищем в виде (см. п. 4 основных положений)

$$u_{Ccb} = B_1 e^{-5000t} + B_2 t e^{-5000t}. \quad (9)$$

Далее, как и в первом случае, из уравнений (6) с учетом начальных условий (I) и (II) найдем $i_3(0_+) = 1,25$ а.

Подставив в уравнение (1) и в выражение i_3 уравнение (9), получим:

$$\begin{aligned} u_C &= u_{Cnp} + u_{Ccb} = 0 + B e_1 e^{-5000t} + B_2 t e^{-5000t}; \\ i_3 &= C \frac{du_C}{dt} = 10^{-6} (B_2 - 5000 B_1 - 5000 B_2 t) e^{-5000t}. \end{aligned}$$

Переписывая эти уравнения для момента $t = 0_+$ и подставляя в них $u_C(0_+) = 0$ и $i_3(0_+) = 1,25$ а, получим

$$0 = B_1; 1,25 = 10^{-6} (B_2 - 5000 B_1).$$

Следовательно, $B_1 = 0$, $B_2 = 1,25 \cdot 10^6$ в/сек. Таким образом, искомое напряжение согласно (1) и (9)

$$u_C(t) = u_{C\text{св}} = 1,25 \cdot 10^6 t e^{-5000t} \text{ в.}$$

График напряжения u_C построен на рис. 9.28, г.

3. Наконец, рассмотрим третий случай численных значений параметров схемы рис. 9.28, а.

Подставляя эти значения в уравнение (4), находим

$$\begin{aligned} p_{1,2} &= \frac{1}{2 \cdot 100 \cdot 5 \cdot 10^{-6}} \pm \sqrt{\left(\frac{1}{2 \cdot 100 \cdot 5 \cdot 10^{-6}}\right)^2 - \frac{1}{40 \cdot 10^{-6} \cdot 5 \cdot 10^{-6}}} = \\ &= (-1000 \pm j 2000) \text{ сек}^{-1}. \end{aligned}$$

Корни характеристического уравнения образуют комплексно сопряженную пару чисел ($p_{1,2} = -a \pm j\omega$), следовательно, свободную составляющую напряжения на конденсаторе следует искать в виде (см. п. 4 основных положений)

$$u_{C\text{св}} = A e^{-at} \sin(\omega t + \psi) = A e^{-1000t} \sin(2000t + \psi). \quad (10)$$

По аналогии с предыдущими случаями из уравнений (6) с учетом начальных условий (I) и (II) получим $i_3(0_+) = 1,25$ а.

Подставив в (1) и в выражение i_3 уравнение (10), получим:

$$u_C = u_{C\text{пр}} + u_{C\text{св}} = 0 + A e^{-1000t} \sin(2000t + \psi);$$

$$\begin{aligned} i_3 &= C \frac{du_C}{dt} = 5 \cdot 10^{-6} A [2000 \cos(2000t + \psi) - \\ &- 1000 \sin(2000t + \psi)] e^{-1000t}. \end{aligned}$$

Переписывая эти уравнения для момента $t = 0_+$ и подставляя в них $u_C(0_+) = 0$ и $i_3(0_+) = 1,25$ а, имеем:

$$0 = 5 \cdot 10^{-6} A \sin \psi;$$

$$1,25 = 5 \cdot 10^{-6} (2000A \cos \psi - 1000A \sin \psi).$$

Решая их, находим $\psi = 0$, $A = 125$ в. Таким образом, согласно (1) и (10), искомое напряжение

$$u_C(t) = 125 e^{-1000t} \sin 2000t \text{ в.}$$

График напряжения построен на рис. 9.28, д.

9.45. Цепь рис. 9.28, а включается на постоянное напряжение $U = 100$ в. Параметры цепи: $r = 100$ ом, $L = 40$ мГн, $C = 5$ мкФ. Определить ток i_2 в индуктивности.

Р е ш е н и е. Ищем решение в виде суммы принужденного и свободного значений:

$$i_2 = i_{2\text{пр}} + i_{2\text{св}}.$$

Рассчитав установившийся режим схемы (после коммутации), найдем принужденное значение:

$$i_{3np} = 0; i_{2np} = i_{1np} = \frac{U}{r} = \frac{100}{100} = 1a. \quad (2)$$

Для определения свободной составляющей тока напомним характеристическое входное сопротивление цепи и приравняем его нулю:

$$Z(p) = r + \frac{\rho L \frac{1}{pC}}{\rho L + \frac{1}{pC}} = 0.$$

После упрощения оно примет вид

$$\rho^2 L C r + \rho L + r = 0.$$

Корни характеристического уравнения

$$\rho_{1,2} = -\frac{1}{2Cr} \pm \sqrt{\left(-\frac{1}{2Cr}\right)^2 - \frac{1}{LC}} = (-1000 \pm j2000) \text{сек}^{-1}$$

образуют комплексно сопряженную пару ($\rho_{1,2} = -a \pm j\omega$). Поэтому свободная составляющая решения имеет вид

$$i_{2св} = Ae^{-at} \sin(\omega t + \psi) = Ae^{-1000t} \sin(2000t + \psi). \quad (3)$$

Для определения постоянных интегрирования A и ψ запишем для начального момента времени (после коммутации) выражение тока i_2 согласно уравнению (1):

$$i_2(0_+) = i_{2np}(0_+) + i_{2св}(0_+) = 1 + A \sin \psi \quad (4)$$

и его производную (с учетом уравнения (3))

$$\left. \frac{di_2}{dt} \right|_{t=0_+} = \left. \frac{di_{2np}}{dt} \right|_{t=0_+} + \left. \frac{di_{2св}}{dt} \right|_{t=0_+} = 0 - 1000A \sin \psi + 2000A \cos \psi. \quad (5)$$

Начальные значения определим с помощью независимых начальных условий: $u_C(0_+) = u_C(0_-) = 0$ и $i_2(0_+) = i_2(0_-) = 0$.

По закону Кирхгофа для рассматриваемой схемы рис. 9.28, a

$$u_L(0_+) = L \left. \frac{di_2}{dt} \right|_{t=0_+} = u_C(0_+) = 0$$

и, следовательно, отсюда производная тока в начальный момент имеет вид

$$\left. \frac{di_2}{dt} \right|_{t=0_+} = 0.$$

Подставив найденные начальные значения в уравнения (4) и (5), получим:

$$0 = 1 + A \sin \psi \text{ или } -1 = A \sin \psi, \quad (6)$$

$$0 = -1000A \sin \psi + 2000A \cos \psi. \quad (7)$$

Для решения уравнений (6) и (7) разделим порознь левую и правую части уравнения (7) соответственно на левую и правую части уравнения (6). В результате получим

$$0 = -1000 + 2000 \frac{\cos \psi}{\sin \psi} = -1000 + 2000 \operatorname{ctg} \psi.$$

Отсюда $\operatorname{ctg} \psi = 0,5$; $\psi = 63^\circ 30'$; $\sin \psi = 0,895$, а из уравнения (6) $A = -\frac{1}{\sin \psi} = -1,12 \text{ а}$.

Окончательно после коммутации по формуле (1) определяем искомый ток

$$i_2 = 1 - 1,12e^{-1000t} \sin(2000t + 63^\circ 30') \text{ а}. \quad (8)$$

График тока i_2 построен на рис. 9.29.

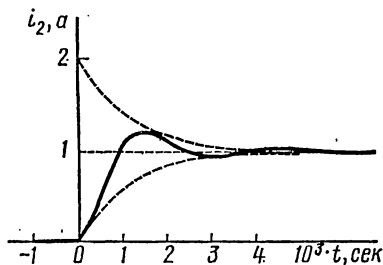


Рис. 9.29

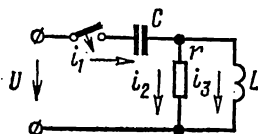


Рис. 9.30

9.46. Цепь рис. 9.30 включается на постоянное напряжение $U = 30 \text{ в}$. Найти законы изменения во времени всех токов и напряжения между обкладками конденсатора, если $C = 16 \text{ мкф}$, $r = 100 \text{ ом}$ и $L = 1 \text{ гн}$. Построить кривые токов и напряжения на конденсаторе. Выяснить предельное значение сопротивления, при котором процесс сохраняет еще колебательный характер.

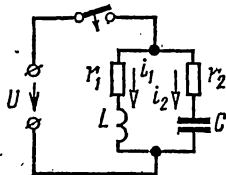


Рис. 9.31

9.47. Цепь рис. 9.31 включается на постоянное напряжение $U = 120 \text{ в}$. Сопротивления ветвей $r_1 = r_2 = r = 40 \text{ ом}$, индуктивность $L = 0,08 \text{ гн}$. Показать, что если емкость $C = L/r^2$, то ток i в неразветвленной части цепи в любой момент времени имеет постоянное значение, равное U/r .

З а м е ч а н и е. При заданном выборе параметров данная цепь имеет резонанс токов при любой частоте.

9.48. Схема рис. 9.31 включается под действие синусоидальной э.д.с. $e = E_m \sin(\omega t + \psi)$. Полагая, что $r_1 = r_2 = r = 40 \text{ ом}$, $L = 0,08 \text{ мн}$, $C = L/r^2$, $E = 120 \text{ в}$, $\omega = 314 \text{ сек}^{-1}$ и $\psi = \pi/6$, определить законы изменения токов i_1 , i_2 и i во времени.

9.49. Цепь, состоящая из последовательно соединенных r , L и C , конденсатор которой закорочен, включена на постоянное напряжение $U = 120 \text{ в}$. При установившемся режиме внезапным размыканием рубильника P конденсатор вводится в цепь (рис. 9.32). Найти напряжение на обкладках конденсатора и ток, проходящий в цепи, в двух случаях: 1) $r = 100 \text{ ом}$, $L = 40 \text{ мнн}$, $C = 25 \text{ мкф}$; 2) $r = 80 \text{ ом}$, $L = 40 \text{ мнн}$, $C = 20 \text{ мкф}$. Начертить кривые u_C и i .

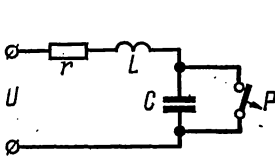


Рис. 9.32

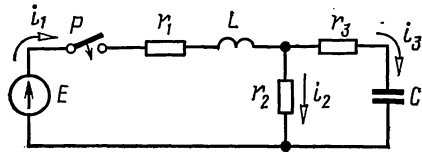


Рис. 9.33

9.50. Найти токи в цепи рис. 9.33 после включения рубильника P , если известны $r_1 = 20 \text{ ом}$, $L = 0,4 \text{ мнн}$, $r_2 = 10 \text{ ом}$, $r_3 = 20 \text{ ом}$, $C = 1 \text{ мкф}$, $E = 60 \text{ в}$.

9.51. До замыкания рубильника P в цепи (рис. 9.34) имел место установившийся режим постоянного тока. Конденсатор разряжен. В момент $t = 0$ рубильник P замыкается. Определить начальные значения тока в индуктивности, напряжения на конденсаторе и их первые производные. Найти уравнение тока i_2 и напряжения на конденсаторе и их первые производные. Найти уравнение тока i_2 и напряжения на конденсаторе (после коммутации). Даны: $E = 60 \text{ в}$, $r_1 = 20 \text{ ом}$, $L = 1 \text{ мнн}$, $r_2 = 10 \text{ ом}$, $r_3 = 20 \text{ ом}$, $C = 1 \text{ мкф}$.

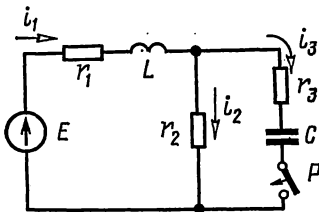


Рис. 9.34

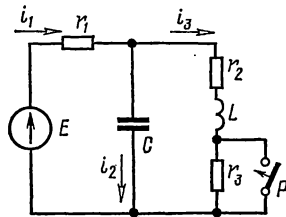


Рис. 9.35

9.52. В цепи рис. 9.35 до замыкания рубильника P был установившийся режим постоянного тока. Найти уравнение напряжения на конденсаторе после замыкания рубильника, если $E = 60 \text{ в}$, $r_1 = 20 \text{ ом}$, $r_2 = 40 \text{ ом}$, $r_3 = 40 \text{ ом}$, $L = 0,2 \text{ мнн}$ и $C = 1 \text{ мкф}$.

9.53. До замыкания рубильника Р в цепи рис. 9.36 имеет место установившийся режим постоянного тока. Определить: 1) напряжения на r_2 , на L и на C для $t = 0_+$ и $t = \infty$; 2) первые производные напряжений на r_2 , на L и на C по времени для $t = 0_+$. Даны: $C = 1$ мкф, $L = 10$ мГн, $r_1 = r_2 = r_4 = 100$ ом, $r_3 = r_5 = 200$ ом и $E = 120$ в.

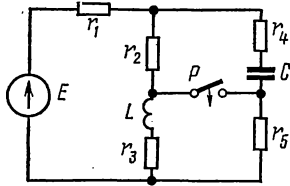


Рис. 9.36

9.54. Для каждой из схем рис. 9.37, а—в (не составляя уравнений), определить степень n характеристического уравнения, описывающего свободный процесс после соответствующей коммутации. Дополнительные условия: для схемы рис. 9.37, в: $r_2 = 2r_1$, $L_2 = 2L_1$.

Решение. Как известно из теории, степень n характеристического уравнения, описывающего переходный процесс, равна числу независимых начальных условий в послекоммутационной схеме.

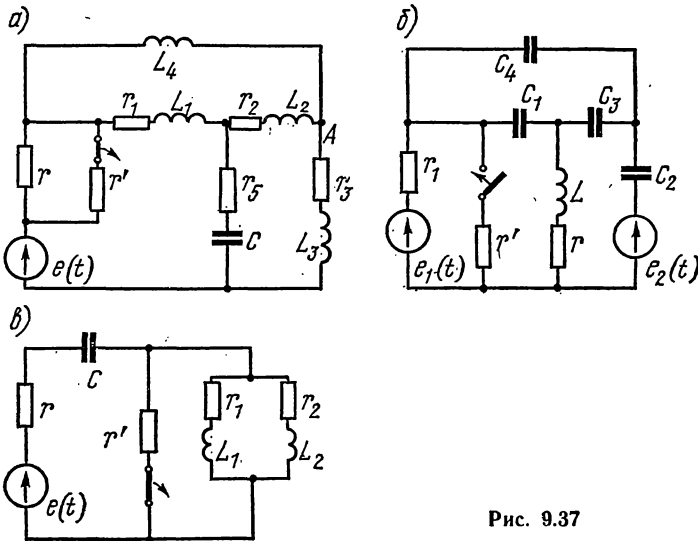


Рис. 9.37

Рассмотрим схему рис. 9.37, а. Она содержит пять реактивных элементов, которые определяют четыре начальных значения тока, протекающих через индуктивности, и одно начальное значение напряжения на емкости. Однако не все эти пять начальных значений являются независимыми. Определим число основных независимых начальных условий. Так, например, если в качестве основных независимых начальных условий принять значения токов, протекающих через L_2 и L_4 , то ток через L_3 будет не основным, ибо его начальное значение определяется первым законом Кирхгофа, примененным к

узлу *A*. Таким образом, схема рис. 9.37, *a* содержит четыре независимых начальных условия, а следовательно, характеристическое уравнение будет иметь порядок $n = 4$.

В схеме рис. 9.37, *б* пять реактивных элементов, однако число независимых начальных условий равно 3. В самом деле, если, например, в качестве основных принять начальные значения напряжений на емкостях C_1 и C_3 , то из второго закона Кирхгофа, примененного к контуру, состоящему из емкостей C_1, C_3, C_4 , напряжение на емкости C_4 будет их следствием. Аналогично из рассмотрения уравнения Кирхгофа, составленного для контура $C_4 C_2 r_1$, можно установить, что напряжение на емкости C_2 не будет являться независимым условием. Итак, $n = 3$.

В схеме рис. 9.37, *в* три реактивных элемента, но число основных независимых условий равно двум. Это определяется подобием параллельных ветвей $\left(\frac{r_1}{L_1} = \frac{r_2}{L_2} \right)$, эквивалентное сопротивление которых будет иметь не второй, а первый порядок, а поэтому характеристическое сопротивление всей схемы будет иметь второй порядок ($n=2$).

9.55. Определить степень n характеристического уравнения, описывающего свободный процесс в каждой из цепей рис. 9.38, *a—ж*, рассматриваемой после коммутации.

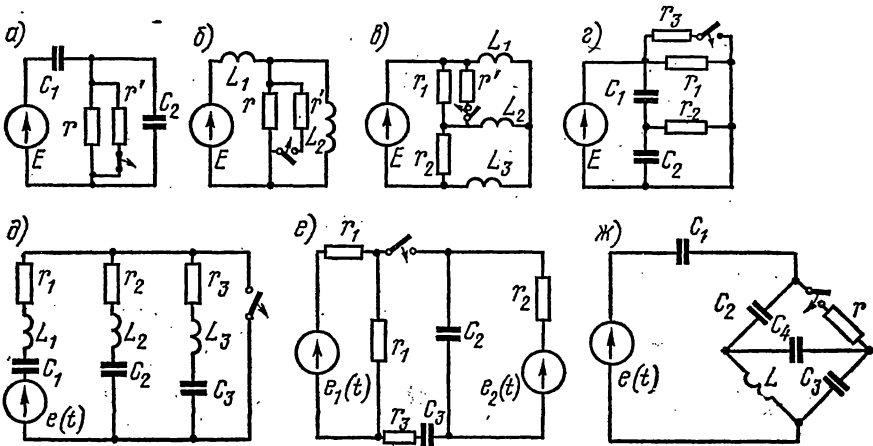


Рис. 9.38

У к а з а н и е. Учсть, что степень характеристического уравнения определяется из рассмотрения послекоммутационной схемы, в которой э. д. с. замкороены, а ветви с источниками тока разомкнуты.

В. Переходные процессы при импульсных воздействиях

9.56. Цепь, состоящая из последовательно соединенных активного сопротивления $r = 5$ ом и индуктивности $L = 2,5$ гн, включается под действие напряжения, изменяющегося по закону показательной функции $u = U_0 e^{-at}$ ($U_0 = 10$ в, $a = 4$ сек⁻¹).

Определить закон изменения тока в цепи и построить кривую тока.
Решение. Составляем дифференциальное уравнение по второму закону Кирхгофа:

$$L \frac{di}{dt} + ri = Ue^{-at}. \quad (1)$$

Решение его

$$i = i_{\text{пр}} + i_{\text{св}}, \quad (2)$$

где $i_{\text{св}} = Ae^{-\frac{r}{L}t}$ — общий интеграл уравнения (1) без правой части;
 $i_{\text{пр}}$ — частное решение уравнения (1).

Найдем $i_{\text{пр}}$. Как известно из курса математики, частное решение рассматриваемого линейного дифференциального уравнения определяется в форме показательной функции:

$$i_{\text{пр}} = Be^{-at}. \quad (3)$$

Подставляя это значение в (1), получим

$$-BLae^{-at} + Bre^{-at} = U_0e^{-at},$$

откуда

$$B = \frac{U_0}{r - La},$$

и, подставляя это значение B в (3), получим

$$i_{\text{пр}} = \frac{U_0}{r - La} e^{-at}. \quad (4)$$

Переходный ток [см. формулу (2)]

$$i = Ae^{-\frac{r}{L}t} + \frac{U_0}{r - La} e^{-at}. \quad (5)$$

Для определения постоянной интегрирования A используем начальное условие $i(0_-) = i(0_+) = 0$:

$$i(0_+) = \left| Ae^{-\frac{r}{L}t} + \frac{U_0}{r - La} e^{-at} \right|_{t=0_+} = A + \frac{U_0}{r - La} = 0,$$

отсюда

$$A = -\frac{U_0}{r - La}.$$

Таким образом,

$$i = \frac{U_0}{La} \left(e^{-at} - e^{-\frac{r}{L}t} \right) = 2(e^{-2t} - e^{-4t})a. \quad (6)$$

Кривая тока изображена на рис. 9.39.

Ток имеет максимум. Найдем его:

$$\frac{di}{dt} = 2(-2e^{-2t} + 4e^{-4t}).$$

Приравнивая эту производную нулю, получим момент времени $t = t_m$, при котором величина тока максимальна:

$$e^{-2t_m} = 2e^{-4t_m},$$

отсюда

$$t = \frac{\ln 2}{2} = \frac{0,693}{2} = 0,347 \text{ сек.}$$

Подставив это значение в формулу (6), найдем

$$I_{\max} = 2(e^{-0,693} - e^{-1,386}) = 0,5 \text{ а.}$$

9.57. Цепь, состоящая из последовательно соединенных r и L , включается на прямоугольный импульс напряжения U , действующий в течение времени t_n (рис. 9.40, а). Найти уравнение тока i и напряжения на индуктивности u_L в зависимости от времени. Построить кривые i и u_L .

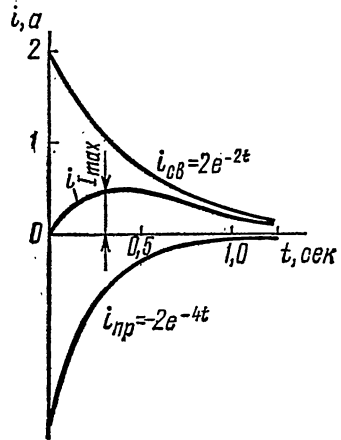


Рис. 9.39

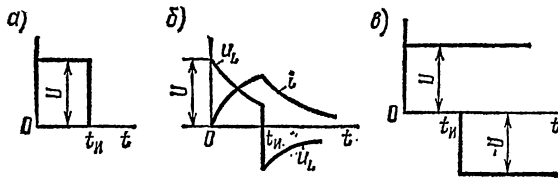


Рис. 9.40

Решение. Классический способ. Для интервала времени от $t = 0$ до $t = t_n$ ток определяется так же, как и при включении той же цепи на постоянное напряжение U :

$$i = \frac{U}{r} \left(1 - e^{-\frac{r}{L} t} \right). \quad (1)$$

Напряжение на индуктивности

$$u_L = L \frac{di}{dt} = U e^{-\frac{r}{L} t}. \quad (2)$$

Для $t > t_n$ напряжение на зажимах цепи равно нулю, поэтому по ней пройдет только свободный ток, являющийся одновременно переходным. Его протекание определяется запасом энергии, накопленной в магнитном поле за время от 0 до t_n . Итак, для $t > t_n$, когда $u = 0$, уравнение второго закона Кирхгофа

$$ri + L \frac{di}{dt} = 0.$$

Его решение

$$i = Ae^{-\frac{r}{L}t}. \quad (3)$$

Постоянную интегрирования A определим из того, что в момент $t = t_n$ ток в цепи, содержащей индуктивность, не может измениться скачкообразно:

$$i \Big|_{t=t_n} = \frac{U}{r} \left(1 - e^{-\frac{r}{L}t_n} \right) = Ae^{-\frac{r}{L}t_n},$$

отсюда

$$A = \frac{U}{r} \left(e^{\frac{r}{L}t_n} - 1 \right).$$

Подставляя это значение A в уравнение (3), получим уравнение тока при $t_n \leq t < \infty$:

$$i = \frac{U}{r} \left(e^{\frac{r}{L}t_n} - 1 \right) e^{-\frac{r}{L}t}. \quad (3')$$

Уравнение для напряжения на индуктивности при $t_n \leq t < \infty$

$$u_L = L \frac{di}{dt} = U \left(1 - e^{\frac{r}{L}t_n} \right) e^{-\frac{r}{L}t}. \quad (4)$$

По уравнениям (1)—(4) на рис. 9.40, б построены графики. Отметим, что в момент $t = 0_+$ напряжение на индуктивности изменяется скачком на величину, равную U . Скачок напряжения на индуктивности имеет место и при $t = t_n$.

Метод наложения. Прямоугольный импульс может быть рассмотрен как результат действия двух постоянных напряжений: напряжения U , включаемого в момент $t = 0$ и действующего неограниченно долго, и отрицательного напряжения, равного $-U$, вступающего в действие в момент $t = t_n$ и также действующего неограниченно долго (рис. 9.40, в).

Итак, для $0 \leq t \leq t_n$ ток определяется, как и прежде, по формуле (1).

Для $t_n \leq t < \infty$

$$\begin{aligned} i &= i_1 + i_2 = \frac{U}{r} \left(1 - e^{-\frac{r}{L}t} \right) + \frac{-U}{r} \left(1 - e^{-\frac{r}{L}(t-t_n)} \right) = \\ &= \frac{U}{r} \left(e^{\frac{r}{L}t_n} - 1 \right) e^{-\frac{r}{L}t}. \end{aligned}$$

Г. Задачи с «некорректно» поставленными начальными условиями

9.58. В схеме рис. 9.41 рассчитать мгновенные значения тока источника напряжения при включении рубильника. Даны: $E = 60$ в, $r_1 = r_2 = 1$ ком, $C_1 = 1$ мкф и $C_2 = 2$ мкф.

Решение. Контур, образованный емкостями C_1 и C_2 , не содержит активных сопротивлений и индуктивностей. Поэтому напряжение конденсаторов может изменяться скачком за счет мгновенного переброса заряда в этом контуре. До коммутации заряжен только конденсатор C_1 до напряжения $u_{C1}(0_-) = E = 60$ в. Заряд его $q_1(0_-) = C_1 u_{C1}(0_-) = 6 \cdot 10^{-5}$ к в начальный момент после коммутации перераспределится между емкостями так, что будет выполняться второй закон Кирхгофа

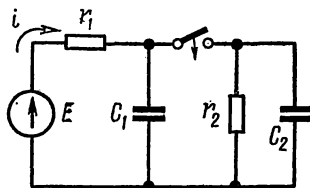


Рис. 9.41

$$u_{C1}(0_+) = u_{C2}(0_+). \quad (1)$$

При этом суммарный заряд емкостей в начальный момент не изменится:

$$C_1 u_{C1}(0_+) + C_2 u_{C2}(0_+) = 6 \cdot 10^{-5} \text{ к}. \quad (2)$$

Подставляя численные значения и решая уравнения (1)—(2), находим начальные значения напряжений на емкостях:

$$u_{C1}(0_+) = u_{C2}(0_+) = 20 \text{ в}. \quad (3)$$

Ток источника напряжения находим в виде наложения принужденной и свободной составляющих тока:

$$i = i_{\text{пр}} + i_{\text{св}}. \quad (4)$$

Принужденное значение тока в схеме после коммутации

$$i_{\text{пр}} = \frac{E}{r_1 + r_2} = \frac{60}{2 \cdot 10^3} = 3 \cdot 10^{-2} \text{ а}. \quad (5)$$

Для нахождения свободной составляющей тока напишем характеристическое уравнение, приравняв нулю характеристическое входное сопротивление схемы:

$$Z(p) = r_1 + \frac{1}{pC_1 + pC_2 + \frac{1}{r_2}} = 0.$$

Характеристическое уравнение преобразуем к виду

$$p(C_1 + C_2) + \left(\frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_1} \right) = 0.$$

Единственный корень характеристического уравнения

$$\rho_1 = -\frac{r_1 + r_2}{r_1 r_2 (C_1 + C_2)} = -\frac{2 \cdot 10^3}{10^6 \cdot 3 \cdot 10^{-6}} = -6,67 \cdot 10^2 \text{ сек}^{-1}.$$

Следовательно,

$$i_{\text{св}} = Ae^{-6,67 \cdot 10^2 t}. \quad (6)$$

Для вычисления постоянной интегрирования запишем для начального момента времени

$$i(0_+) = i_{\text{пр}}(0_+) + i_{\text{св}}(0_+) = 3 \cdot 10^{-2} + A. \quad (7)$$

Начальное значение тока находим по второму закону Кирхгофа:

$$E = ri(0_+) + u_{C1}(0_+) = i(0_+) \cdot 10^3 + 20 = 60, \quad (8)$$

откуда

$$i(0_+) = \frac{60 - 20}{10^3} = 4 \cdot 10^{-2} \text{ а}. \quad (9)$$

Подставляя найденное начальное значение в формулу (7), определяем значение $A = 10^{-2}$ и, следовательно, искомое значение тока [см. формулу (4)] источника напряжения после коммутации:

$$i = (3 \cdot 10^{-2} + 10^{-2} e^{-6,67 \cdot 10^2 t}) \text{ а}. \quad (10)$$

9.59. Вычислить начальные значения напряжения на конденсаторе до и после коммутации в схеме рис. 9.42. Даны: $E_1 = 120 \text{ в}$, $E_2 = 100 \text{ в}$, $r_1 = 20 \text{ ом}$ и $r_2 = 80 \text{ ом}$.

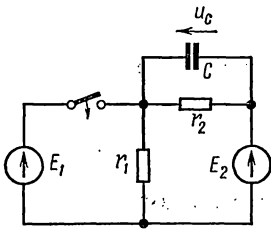


Рис. 9.42

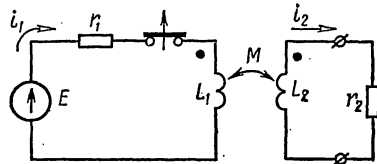


Рис. 9.43

9.60. Определить начальное значение тока во вторичной обмотке трансформатора (рис. 9.43) после мгновенного выключения цепи первичной обмотки. Даны: $E = 100 \text{ в}$, $r_1 = 10 \text{ ом}$, $r_2 = 2 \text{ ом}$, $L_1 = L_2 = 0,02 \text{ гн}$ и $M = 0,01 \text{ гн}$.

Решение. Схема содержит идеальный выключатель, на зажимах которого в процессе выключения может наводиться произвольно большое напряжение. Следовательно, возможны скачки тока в индуктивностях.

До коммутации токи цепи:

$$i_1 = \frac{E}{r_1} = 10 \text{ а}, \quad i_2 = 0.$$

После коммутации

$$i_1(0_+) = 0,$$

т. е. скачок тока в первичной обмотке

$$\Delta i_1(0_+) = -10 \text{ а.}$$

Для нахождения начального значения тока $i_2(0_+)$ после коммутации используем уравнение второго закона Кирхгофа для контура вторичной обмотки в момент коммутации (ограничиваемся бесконечными слагаемыми и пренебрежем конечной величиной $i_2 t_2$):

$$-M \frac{di_1}{dt} + L \frac{di_2}{dt} = 0,$$

и проинтегрируем его по «времени начального скачка»:

$$-M \int_{t=0_-}^{t=0_+} \frac{di_1}{dt} dt + L \int_{t=0_-}^{t=0_+} \frac{di_2}{dt} dt = -M \int_{t=0_-}^{t=0_+} di_1 + L \int_{t=0_-}^{t=0_+} di_2 = 0,$$

т. е.

$$-M \Delta i_1 + L \Delta i_2 = 0.$$

Из последнего уравнения определим искомое начальное значение тока во вторичной обмотке трансформатора:

$$i_2(0_+) = \Delta i_2 = \frac{M \Delta i_1}{L} = -5 \text{ а.}$$

9.61. Рассчитать ток источника напряжения схемы (рис. 9.44) до переключения рубильника Р и в начальный момент после мгновенного переключения его из положения 1 в положение 2. Даны: $E = 100 \text{ в}$, $L_1 = 1 \text{ мГн}$, $L_2 = L_3 = 3 \text{ мГн}$ и $r_2 = r_3 = 10 \text{ ом}$.

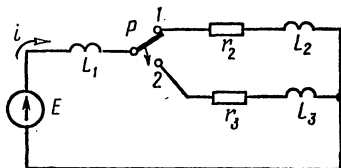


Рис. 9.44

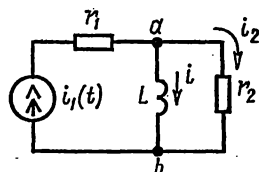


Рис. 9.45

9.62. В цепи рис. 9.45 действует ступенчатый источник тока $i_1(t) = 0$ при $t < 0$, $i_1(t) = J_1$ при $t \geq 0$. Рассчитать все токи в переходном режиме.

Решение. Определяем ток индуктивности в виде наложения принужденного и свободного токов:

$$i = i_{\text{пр}} + i_{\text{св}}.$$

В установившемся режиме $u_{abnp} = 0$ ток $i_{np} = J_1$. Форма свободного тока определяется видом корней характеристического уравнения, которое составляем, приравняв нулю входное сопротивление относительно ветви с индуктивностью:

$$pL + r_2 = 0.$$

Причем учтено, что входное сопротивление источника тока равно бесконечности. Единственному корню характеристического уравнения $p = -\frac{r_2}{L}$ соответствует свободный ток $i_{св} = Ae^{-\frac{r_2}{L}t}$ с постоянной

интегрирования $A = -J_1$. При этом удовлетворяется начальное значение тока индуктивности $i(0_+) = i(0_-) = 0$. Окончательно при $t \geq 0$ ток индуктивности

$$i = J_1 \left(1 - e^{-\frac{r_2}{L}t} \right).$$

Напряжение u_{ab} и ток i_2 будут:

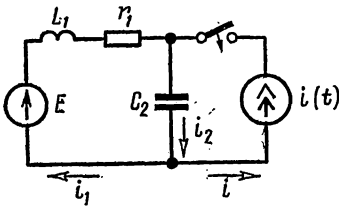


Рис. 9.46

$$u_{ab} = L \frac{di}{dt} = J_1 r_2 e^{-\frac{r_2}{L}t}; \quad i_2 = \frac{u_{ab}}{r_2} = J_1 e^{-\frac{r_2}{L}t}.$$

9.63. В цепи рис. 9.46 действуют источник постоянного напряжения $E = 20$ в и источник ступенчатого тока $i(t) = 0$ при $t < 0$ $i(t) = 0,1$ а, при $t \geq 0$. Параметры цепи: $r_1 = 0,5$ ком, $L = 1$ мГн, $C_2 = 0,02$ мкф. Рассчитать переходное напряжение на емкости.

Глава десятая
ОПЕРАТОРНЫЙ МЕТОД РАСЧЕТА
ПЕРЕХОДНЫХ ПРОЦЕССОВ
В ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЯХ
С СОСРЕДОТОЧЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

ОСНОВНЫЕ ПОЛОЖЕНИЯ И СООТНОШЕНИЯ

1. **Преобразование Лапласа.** В основу операторного метода положено следующее. Функция $f(t)$ [обычно ток $i(t)$ или напряжение $u(t)$] вещественного переменного t (времени), называемая *оригиналом*, заменяется соответствующей ей функцией $F(p)$ комплексного переменного p , называемой *изображением*.

Эти функции связаны соотношением

$$F(p) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-pt} dt, \quad (10.1)$$

называемым *прямым преобразованием Лапласа*.¹

Эта связь сокращенно записывается в виде

$$F(p) \doteq f(t).$$

В табл. 10.1 приводятся оригиналы простейших функций и их изображения, полученные по формуле (10.1) и используемые при решении задач на переходные процессы.

2. **Операторное сопротивление.** Операторные сопротивления цепей записываются так же, как и сопротивления для тех же цепей в комплексной форме, в которых $j\omega$ заменено на p . Так, для цепи, состоящей из последовательно соединенных элементов r , L и C , операторное сопротивление имеет вид

$$Z(p) = r + pL + \frac{1}{pC}. \quad (10.2)$$

3. **Операторная схема замещения.** Уравнения для изображений тока и напряжения

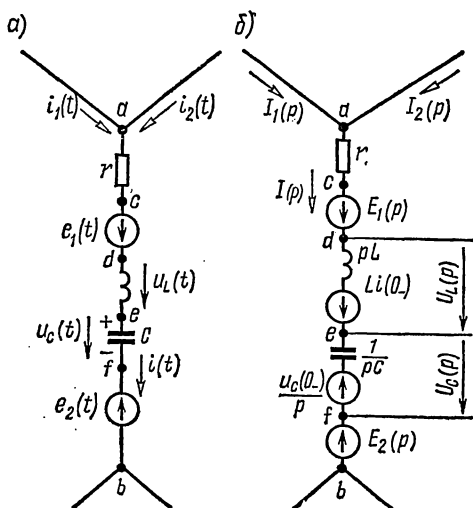


Рис. 10.1

Таблица 10.1

№ п.п	Оригинал	Изображение	№ п.п	Оригинал	Изображение
1	$\delta(t)$	1	13	$\frac{1}{a-b} (e^{-bt} - e^{-at})$	$\frac{1}{(p+a)(p+b)}$
2	1	$\frac{1}{p}$	14	$\frac{ae^{-at} - be^{-bt}}{a-b}$	$\frac{p}{(p+a)(p+b)}$
3	t	$\frac{1}{p^2}$	15	$\cos \omega_0 t$	$\frac{p}{p^2 + \omega_0^2}$
4	t^n	$\frac{n!}{p^{n+1}}$	16	$\sin \omega_0 t$	$\frac{\omega_0}{p^2 + \omega_0^2}$
5	$e^{\mp at}$	$\frac{1}{p \pm a}$	17	$\sin(\omega_0 t + \psi)$	$\frac{p \sin \psi + \omega_0 \cos \psi}{p^2 + \omega_0^2}$
6	$\delta(t) - ae^{-at}$	$\frac{p}{p+a}$	18	$e^{-at} \sin \omega_0 t$	$\frac{\omega_0}{(p+a)^2 + \omega_0^2}$
7	$e^{\mp j\omega_0 t}$	$\frac{1}{p \pm j\omega_0}$	19	$e^{-at} \cos \omega_0 t$	$\frac{p+a}{(p+a)^2 + \omega_0^2}$
8	$e^{j(\omega_0 t + \psi)}$	$\frac{e^{j\psi}}{p - j\omega_0}$	20	$\text{sh } at$	$\frac{a}{p^2 - a^2}$
9	te^{-at}	$\frac{1}{(p+a)^2}$	21	$\text{ch } at$	$\frac{p}{p^2 - a^2}$
10	$(1-at)e^{-at}$	$\frac{p}{(p+a)^2}$	22	$\frac{1}{ab} + \frac{1}{b-a} \left(\frac{e^{-bt}}{b} - \frac{e^{-at}}{a} \right)$	$\frac{1}{p(p+a)(p+b)}$
11	$\frac{1}{a} (1 - e^{-at})$	$\frac{1}{p(p+a)}$			
12	$\frac{1}{a^2} [1 - e^{-at}(1+at)]$	$\frac{1}{p(p+a)^2}$			

произвольной цепи могут быть получены по законам электрических цепей (законам Ома и Кирхгофа), записанным для операторных схем замещения. Операторная схема замещения произвольной ветви рис. 10.1, а показана на рис. 10.1, б. При ее составлении, во-первых, все переменные величины заменяются их операторными изображениями $i(t)$ на $I(p)$, $U(t)$ и $e(t)$ соответственно на $U(p)$ и $E(p)$; во-вторых, индуктивности L заменяются последовательными схемами, состоящими из операторного сопротивления pL и источника напряжения с э.д.с. $Li(0_-)$, где $i(0_-)$ — начальное значение тока в индуктивности; в-третьих, емкости C заменяются последовательными схемами, состоящими из операторного сопротивления $\frac{1}{pC}$ и источника напряжения с э.д.с. $\frac{u_C(0_-)}{p}$, где $u_C(0_-)$ — начальное значение напряжения на емкости. Э.д.с. $Li(0_-)$ имеет направление, совпадающее с током $i(t)$, а э.д.с. $\frac{u_C(0_-)}{p}$ направлена против напряжения на

емкости. Следует заметить, что показанные на рис. 10.1, б операторные напряжения на индуктивности и емкости при ненулевых начальных условиях определяются по формулам:

$$U_L(p) = pLI(p) - Li(0_-); \quad U_C(p) = \frac{1}{pC} I(p) + \frac{u_C(0_-)}{p}.$$

На рис. 10.2, а показан участок электрической цепи, а соответствующая ему операторная схема замещения — на рис. 10.2, б.

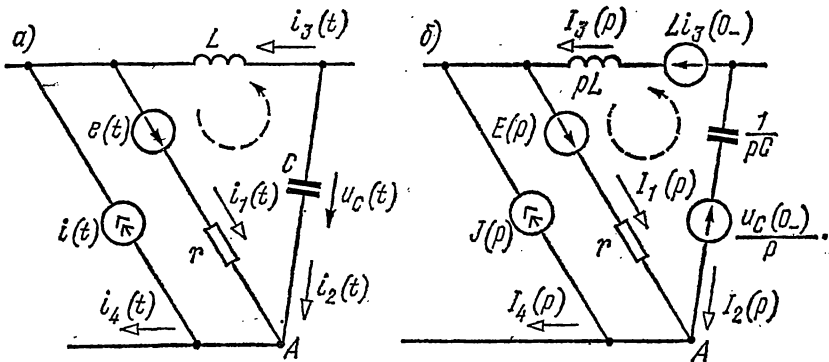


Рис. 10.2

На рис. 10.3, а изображены несколько участков индуктивно связанных цепей, а соответствующие им схемы замещения — на рис. 10.3, б. При этом верхние рисунки даны для случая объединения одноименных зажимов, средние — при соединении разноименных зажимов. На нижних рисунках дана схема трансформатора и соответствующая ему схема замещения.

З а м е ч а н и е. Обращаем внимание на то, что указанные на рис. 10.2, б и 10.3, б направления э.д.с. $Li_3(0_-)$, $\frac{u_C(0_-)}{p}$, $L_1i_1(0_-)$, $L_2i_2(0_-)$, $Mi_1(0_-)$, $Mi_2(0_-)$ соответствуют направлениям положительных токов и напряжения на конденсаторе, данным на рис. 10.2, а и 10.3, а.

4. Закон Ома для ветви в операторной форме (с учетом ненулевых начальных условий). На рис. 10.1, а изображена ветвь *ab*, содержащая последовательно соединенные элементы *r*, *L*, *C* и источники э.д.с. $e_1(t)$ и $e_2(t)$, являющаяся частью сложной цепи.

Изображение тока $I(p)$ в ветви *ab* связано с изображением напряжения $U_{ab}(p)$, приложенного к зажимам *a* и *b* ветви, законом Ома в операторной форме (рис. 10.1, б)

$$I(p) = \frac{U_{ab}(p) + E_1(p) + Li(0_-) - \frac{u_C(0_-)}{p} - E_2(p)}{Z(p)}, \quad (10.3)$$

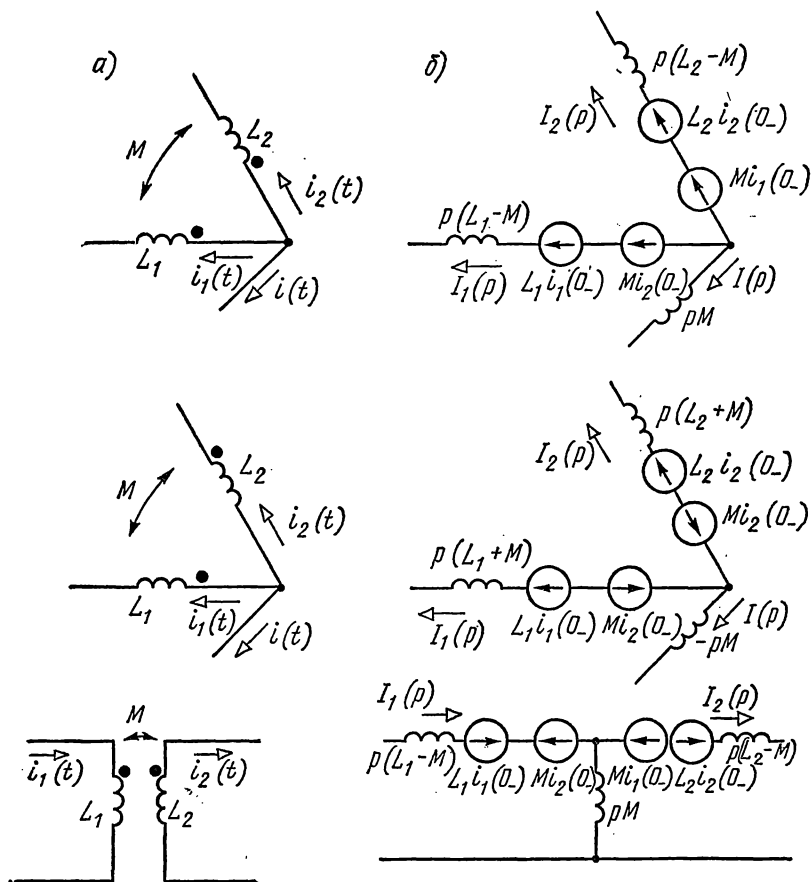


Рис. 10.3

где $E_1(p)$ и $E_2(p)$ — изображения э.д.с. $e_1(t)$ и $e_2(t)$; $i(0_-)$ и $u_C(0_-)$ — значения тока в индуктивности и напряжения на конденсаторе в начальный момент времени (положительное направление напряжения на конденсаторе $u_C = u_{ef} = -u_{fe}$ следует принимать совпадающим с выбранным положительным направлением тока, как показано на рис. 10.1, а).

5. Законы Кирхгофа в операторной форме.

Первый закон

$$\sum_{k=1}^m I_k(p) = 0. \quad (10.4)$$

Второй закон. В общем случае при ненулевых начальных условиях для какого-либо контура, содержащего N_b ветвей,

$$\sum_{k=1}^{N_B} \left[E_k(p) + L_k i_k(0_-) - \frac{u_{Ck}(0_-)}{p} \right] = \sum_{k=1}^{N_B} I_k(p) Z_k(p), \quad (10.5a)$$

где $i_k(0_-)$ и $u_{Ck}(0_-)$ — начальные значения тока, проходящего через катушку индуктивности, и напряжения на емкости в ветви k ; $Z_k(p) = r_k + pL_k + \frac{1}{pC_k}$ — операторное сопротивление ветви k .

Пример. Для узла A (см. рис. 10.2, б) первый закон Кирхгофа в операторной форме имеет вид

$$I_1(p) + I_2(p) = I_4(p) + J(p).$$

Для контура рис. 10.2, а и б второй закон Кирхгофа в операторной форме имеет вид

$$E(p) + Li_3(0_-) + \frac{u_C(0_-)}{p} = pLI_3(p) + rI_1(p) - \frac{1}{pC} I_2(p).$$

При нулевых начальных условиях формула (10.5а) примет вид

$$\sum_{k=1}^{N_B} E_k(p) = \sum_{k=1}^{N_B} I_k(p) Z_k(p). \quad (10.5б)$$

6. Теорема разложения. Если изображение искомого тока или напряжения имеет вид рациональной дроби

$$\begin{aligned} \frac{F_1(p)}{F_2(p)} &= \frac{a_m p^m + a_{m-1} p^{m-1} + \dots + a_1 p + a_0}{b_n p^n + b_{n-1} p^{n-1} + \dots + b_1 p + b_0} = \\ &= \frac{a_m p^m + a_{m-1} p^{m-1} + \dots + a_1 p + a_0}{b_n (p - p_1)(p - p_2) \dots (p - p_n)}, \end{aligned} \quad (10.6)$$

причем многочлены (относительно p) $F_1(p)$ и $F_2(p)$ удовлетворяют следующим условиям: степень $F_1(p)$ ниже степени $F_2(p)$, a_k и b_k — вещественные числа, а корни p_1, p_2, \dots, p_n уравнения $F_2(p) = 0$ различны, то оригинал определяется выражением

$$\frac{F_1(p)}{F_2(p)} \doteq \sum_{k=1}^n \frac{F_1(p_k)}{F_2'(p_k)} e^{p_k t}. \quad (10.7)$$

Если знаменатель последнего выражения имеет один корень, равный нулю, т. е. $F_2(p) = pF_3(p)$, то оригинал находится по формуле

$$\frac{F_1(p)}{F_2(p)} = \frac{F_1(p)}{pF_3(p)} = \frac{F_1(0)}{F_3(0)} + \sum_{k=1}^n \frac{F_1(p_k)}{p_k F_3'(p_k)} e^{p_k t}. \quad (10.8)$$

Примеры в задачах 10.1, 10.4 и 10.16.

З а м е ч а н и е. Если среди корней уравнения $F_2(p) = 0$ имеются комплексно сопряженные корни p_k и p_k^* , то при вычислении соответствующих им слагаемых стоящих в правой части суммы уравнений (10.7) и (10.8) достаточно

определить слагаемое для одного из этих корней, например p_k , а для сопряженного корня p_k^* следует взять сопряженное значение этого слагаемого. Сумма, соответствующая этим двум слагаемым, равна удвоенному значению действительной части, найденной для одного из корней.

Примеры приведены в задачах 10.5 (случай 3), 10.17.

Если в уравнении (10.8) $F_2(p)$ имеет n различных корней (p_1, p_2, \dots, p_n) и из них корень p_1 кратностью m_1 , корень p_2 кратностью m_2 , корень p_s кратностью m_s , то по изображению $\frac{F_1(p)}{F_2(p)}$ оригинал вычисляется по формуле

$$\frac{F_1(p)}{F_2(p)} \stackrel{\cdot}{=} \sum_{k=1}^s \frac{1}{(m_k - 1)!} \left[\frac{d^{m_k-1}}{dp^{m_k-1}} \cdot \frac{F_1(p)e^{pt}}{F_2(p)} \right]_{p=p_k} \quad (10.9)$$

Здесь выражение, стоящее в знаменателе квадратной скобки, надо сначала сократить на $(p - p_k)^{m_k}$ и лишь после этого дифференцировать.

Если уравнение $F_2(p)$ содержит одновременно и простые и кратные корни, то для определения слагаемых, соответствующих простым корням, используется формула (10.7) [или (10.8), если имеется простой корень $p = 0$] и для кратных — формула (10.9).

7. Методика решения задач операторным методом сводится к:

- а) составлению уравнений Кирхгофа (или соответствующих им уравнений по тому или иному методу расчета) в операторной форме с учетом начальных условий;
- б) их решению относительно изображения искомой величины;
- в) нахождению оригинала (с помощью теоремы разложения, таблиц, связывающих оригиналы и их изображения, или другими методами) по найденному изображению.

УПРАЖНЕНИЯ И ЗАДАЧИ

А. Расчет переходных процессов

при нулевых и ненулевых начальных условиях.

Операторные схемы замещения.

Использование таблицы 10.1 и теоремы разложения для перехода от изображения к оригиналу

10.1. Для схемы рис. 10.4 операторным методом найти выражения мгновенных значений тока в неразветвленной части цепи и напряжения на обкладках конденсатора при замыкании контакта K . Даны: $U = 200$ в, $r_1 = 100$ ом, $r_2 = 400$ ом, $C = 5$ мкф.

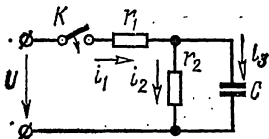


Рис. 10.4

Решение. Находим изображение тока в неразветвленной части цепи по закону Ома:

$$I_1(p) = \frac{U(p)}{Z(p)},$$

где изображение постоянного напряжения (см. по табл. 10.1 п. 2)

$$U(\bar{p}) = \frac{U}{p} = \frac{200}{p},$$

а операторное сопротивление

$$Z(p) = r_1 + \frac{\frac{1}{i_2 + \frac{1}{pC}}}{\frac{r_2}{pC}} = \frac{r_1 r_2 Cp + r_1 + r_2}{r_2 Cp + 1} = \frac{0,2p + 500}{2 \cdot 10^{-3}p + 1}.$$

Итак,

$$I_1(p) = \frac{0,4p + 200}{p(0,2p + 500)}. \quad (1)$$

Оригинал этого тока определим двумя способами.

Способ 1. Используем табл. 10.1, связывающую оригинал и его изображение. Для этого преобразуем $I_1(p)$ так, чтобы получить табличные изображения.

$I_1(p)$ представим в виде суммы двух функций, которые после преобразования примут вид формул пп. 5 и 11 табл. 10.1:

$$\begin{aligned} I_1(p) &= \frac{0,4}{0,2p + 500} + \frac{200}{p(0,2p + 500)} = \frac{0,4}{0,2} \cdot \frac{1}{p + \frac{500}{0,2}} + \\ &+ \frac{200}{0,2} \cdot \frac{\frac{500}{0,2}}{p \left(p + \frac{500}{0,2} \right)} \cdot \frac{0,2}{500} = 2 \cdot \frac{1}{p + 2500} + 0,4 \frac{2500}{p(p + 2500)} \doteq \\ &\doteq 2e^{-2500t} + 0,4(1 - e^{-2500t}) = (0,4 + 1,6e^{-2500t})a = i_1(t). \end{aligned}$$

Способ 2. Решим задачу с помощью теоремы разложения [см. формулу (10.8)].

В данном случае

$$F_1(p) = 0,4p + 200; \quad F_3(p) = 0,2p + 500.$$

Вычисляем корень:

$$F_3(p) = 0,2p + 500 = 0; \quad p_1 = -2500 \text{ сек}^{-1}.$$

Определяем:

$$F_1(0) = (0,4p + 200)_{p=0} = 200; \quad F_3(0) = (0,2p + 500)_{p=0} = 500;$$

$$F_1(p_1) = (0,4p + 200)_{p=p_1} = 0,4(-2500) + 200 = -800;$$

$$F_3'(p) = 0,2.$$

Подставляя найденные значения в формулу (10.8), получим

$$I_1(p) = \frac{F_1(p)}{pF_3(p)} = \frac{0,4p + 200}{p(0,2p + 500)} \doteq \frac{F_1(0)}{F_3(0)} + \frac{F_1(p_1)e^{p_1 t}}{p_1 F_3(p_1)} =$$

$$= \frac{200}{500} + \frac{-800e^{-2500t}}{-2500 \cdot 0,2} = (0,4 + 1,6e^{-2500t})a = i_1(t).$$

Проверка. При $t=0_+$ ток $i_1(0_+) = 0,4 + 1,6 = 2$ а. Действительно, в момент начала переходного процесса напряжение на конденсаторе равно нулю. Это соответствует тому, что конденсатор ведет себя так, будто он закорочен, и тем самым шунтирует сопротивление r_2 , поэтому ток $i_1(0_+)$ определяется только величиной сопротивления r_1 .

Определим напряжение на конденсаторе в операторной форме:

$$U_C(p) = U(p) - \frac{U(p)}{Z(p)} r_1 = U(p) \left(1 - \frac{r_1(r_2 Cp + 1)}{r_1 r_2 Cp + r_1 + r_2} \right) =$$

$$= \frac{r_2 U(p)}{r_1 r_2 Cp + r_1 + r_2} = \frac{U r_2}{p(r_1 r_2 Cp + r_1 + r_2)} = \frac{8 \cdot 10^4}{p(0,2p + 500)}.$$

Применяя один из указанных выше способов, найдем

$$u_C(t) = 160(1 - e^{-2500t}) \text{ в.}$$

Проверка. При $t=0_+$ напряжение $u_C(0_+) = 0$, что соответствует начальному условию.

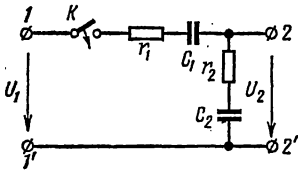


Рис. 10.5

10.2. Определить напряжение на разомкнутых зажимах 2-2' цепи рис. 10.4 при ее включении на постоянное напряжение $U_1 = 100$ в.

Даны: $r_1 = r_2 = 250$ ом, $C_1 = 20$ мкф, $C_2 = 4$ мкф.

10.3. Решить задачу 9.12 операторным методом.

10.4. Решить задачу 9.14 операторным методом.

10.5. Решить задачу 9.44 операторным методом.

Решение. Прежде всего найдем операторное сопротивление цепи

$$Z(p) = r + \frac{pL \cdot \frac{1}{pC}}{pL + \frac{1}{pC}} = \frac{rLCp^2 + Lp + r}{p^2LC + 1}.$$

Далее определим изображение тока $I_1(p)$ через изображение входного напряжения $U(p) = \frac{U}{p}$:

$$I_1(p) = \frac{U(p)}{Z(p)} = \frac{U(LCp^2 + 1)}{p(rLCp^2 + Lp + r)}.$$

Изображение напряжения на емкости получим умножением изображения тока на операторное сопротивление параллельных ветвей L , C :

$$U_C(p) = I_1(p) \frac{pL \frac{1}{pC}}{pL + \frac{1}{pC}} = \frac{U}{rC \left(p^2 + \frac{1}{rC} p + \frac{1}{LC} \right)} = \frac{F_1(p)}{F_2(p)}, \quad (1)$$

где числитель

$$F_1(p) = \frac{U}{rC}, \quad (2)$$

а знаменатель

$$F_2(p) = p^2 + \frac{1}{rC} p + \frac{1}{LC} = (p - p_1)(p - p_2), \quad (3)$$

причем корни знаменателя

$$p_{1,2} = -\frac{1}{2rC} \pm \sqrt{\left(\frac{1}{2rC}\right)^2 - \frac{1}{LC}}. \quad (4)$$

1. Решим задачу для первого варианта численных значений по формуле разложения (10.7). По формулам (2)–(4) определяем

$$F_1(p) = \frac{125}{250 \cdot 2 \cdot 10^{-6}} = 0,25 \cdot 10^6; \quad F_2(p) = p^2 + \frac{1}{250 \cdot 2 \cdot 10^{-6}} p + \frac{1}{667 \cdot 10^{-3} \cdot 2 \cdot 10^{-6}} = p^2 + 2000p + 0,75 \cdot 10^6.$$

Найдем корни:

$$F_2(p) = p^2 + 2000p + 0,75 \cdot 10^6 = 0; \quad p_1 = -500 \text{ сек}^{-1}; \\ p_2 = -1500 \text{ сек}^{-1}.$$

Вычислим производную $F_2'(p)$ и ее значения при $p = p_1$ и $p = p_2$:

$$F_2'(p) = 2p + 2000, \quad F_2'(p_1) = 2(-500) + 2000 = 1000;$$

$$F_2'(p_2) = 2(-1500) + 2000 = -1000.$$

По формуле (1) определяем

$$U_C(p) = \frac{F_1(p)}{F_2(p)} = \frac{0,25 \cdot 10^6}{p^2 + 2000p + 0,75 \cdot 10^6}.$$

По формуле разложения (10.7),

$$U_C(p) \doteq \frac{F_1(p_1)}{F_2'(p_1)} e^{p_1 t} + \frac{F_1(p_2)}{F_2'(p_2)} e^{p_2 t} = \frac{0,25 \cdot 10^6 e^{-500t}}{1000} + \\ + \frac{0,25 \cdot 10^6 e^{-1500t}}{-1000} = 250(e^{-500t} - e^{-1500t}) \text{ в} = u_C(t).$$

Те же результаты могут быть получены по формуле п. 13 табл. 10.1, если знаменатель изображения напряжения на конденсаторе представить в виде $F_2(p) = (p+500)(p+1500)$.

2. Решим задачу, подставляя численные значения второго варианта. По формулам (2)—(4) определяем

$$F_1(p) = \frac{125}{100 \cdot 1 \cdot 10^6} = 1,25 \cdot 10^6; \quad F_2(p) = (p + 5000)^2;$$

$$p_1 = p_2 = -5000 \text{ сек}^{-1}.$$

Изображение напряжения на емкости [см. формулу (1)] имеет вид

$$U_C(p) = \frac{F_1(p)}{F_2(p)} = \frac{1,25 \cdot 10^6}{(p + 5000)^2}.$$

В связи с тем что имеются кратные корни (порядок кратности $m_1 = 2$), оригинал находим по (10.9), в которой

$$m_k = m_1 = 2, \quad (m_k - 1)! = (2 - 1)! = 1;$$

$$\frac{F_2(p)}{(p - p_1)^{m_k}} = \frac{(p + 5000)^2}{(p + 5000)^2} = 1.$$

Таким образом,

$$\frac{F_1(p)}{F_2(p)} \doteq \left[\frac{d}{dp} \frac{F_1(p)e^{p_t}}{1} \right]_{p=p_1} = \left[\frac{d}{dp} 1,25 \cdot 10^6 e^{p_t} \right]_{p=p_1} =$$

$$= [1,25 \cdot 10^6 t e^{p_t}]_{p=p_1} = 1,25 \cdot 10^6 t e^{-5000t} = u_C(t).$$

Можно было также определить оригинал по формуле п. 9 табл. 10.1.

3. Рассмотрим третий вариант цифровых значений. По формулам (2)—(4) находим:

$$F_1(p) = \frac{125}{100 \cdot 5 \cdot 10^{-8}} = 0,25 \cdot 10^6; \quad F_2(p) = p^2 + 2000p + 5 \cdot 10^6;$$

$$p_{1,2} = -1000 \pm j2000 \text{ сек}^{-1}.$$

Производная от $F_2(p)$ и ее значения при $p = p_1$ и $p = p_2$ равны:

$$F_2'(p) = 2p + 2000;$$

$$F_2'(p_1) = 2(-1000 + j2000) + 2000 = j4000;$$

$$F_2'(p_2) = 2(-1000 - j2000) + 2000 = -j4000.$$

Искомый оригинал (с учетом замечания на стр. 313) имеет вид [см. формулу (10.7)]

$$\begin{aligned} \frac{F_1(p)}{F_2(p)} &= \frac{0,25 \cdot 10^6}{p^2 + 2000p + 5 \cdot 10^6} = \frac{0,25 \cdot 10^6}{j4000} e^{(-1000 + j2000)t} + \\ &+ \frac{0,25 \cdot 10^6}{-j4000} e^{(-1000 - j2000)t} = 2\text{Re} \left[0,25 \cdot 10^6 e^{-1000t} \frac{e^{j2000t}}{4000e^{j90^\circ}} \right] = \\ &= 2\text{Re} \left[\frac{0,25 \cdot 10^6 e^{-1000t}}{4000} e^{j(2000t - 90^\circ)} \right] = \\ &= \frac{2 \cdot 0,25 \cdot 10^6}{4000} e^{-1000t} \cos(2000t - 90^\circ) = 125e^{-1000t} \sin 2000 \text{ в.} \end{aligned}$$

Те же результаты можно получить по формуле п. 18 табл. 10.1, если знаменатель $F_2(p)$ представить в виде

$$F_2(p) = (p - p_1)(p - p_2) = [p - (-1000 + j2000)][p - (-1000 - j2000)] = (p + 1000)^2 + 2000^2.$$

10.6. Решить задачу 9.46 операторным методом.

10.7. Найти мгновенное значение тока, проходящего по катушке при включении цепи рис. 10.6. Э.д.с. источника энергии E , параметры катушки (r , L) сопротивления r_1 и r_2 и емкость C известны. Задачу решить операторным методом.

✓ 10.8. Определить ток, проходящий по катушке при включении цепи рис. 10.7. Даны: $E = 40$ в, $r_0 = 100$ ом, $r_{ш} = 2000$ ом, $r = 110$ ом, $L = 3$ гн и $C = 1$ мкф.

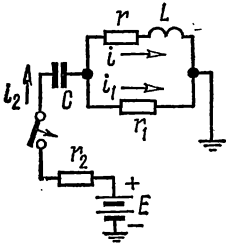


Рис. 10.6

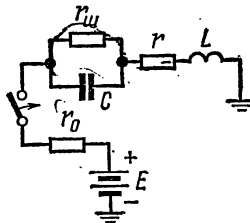


Рис. 10.7

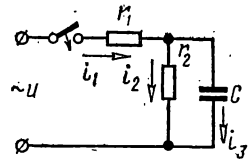


Рис. 10.8

10.9. К цепи рис. 10.8 подключается синусоидальное напряжение $u = U_m \sin(\omega_0 t + \varphi)$. Пользуясь операторным методом, найти выражение для мгновенных значений напряжения между обкладками конденсатора.

10.10. К цепи рис. 10.9 подключается гармоническое напряжение $u = U_m \sin(\omega_0 t + \varphi)$. Найти закон изменения во времени тока, проходящего в неразветвленной части цепи. Даны: $r_1 = 100$ ом, $r_2 = 250$ ом, $L = 1$ гн, $U_m = 170$ в и $f = 50$ гц.

10.11. Найти законы изменения во времени тока i_1 в неразветвленной части цепи и напряжения u_C при включении цепи рис. 10.10 на синусоидальное напряжение $u = U_m \sin \omega_0 t$. Даны: $U_m = 500$ в, $r = 50$ ом, $L = 0,3$ гн, $C = 100$ мкф и $\omega_0 = 314$ сек⁻¹.

10.12. Решить задачу 9.15 операторным методом.

Решение. Это пример задачи с ненулевым начальным условием для тока i_1 , проходящего через индуктивность. Операторная схема замещения изображена на рис. 10.11. Составляем для нее уравнения Кирхгофа:

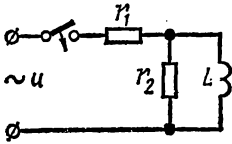


Рис. 10.9

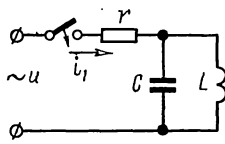


Рис. 10.10

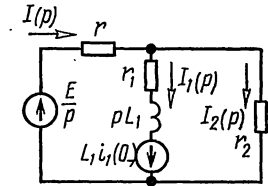


Рис. 10.11

$$I(p) = I_1(p) + I_2(p); \quad (1)$$

$$E(p) = rI(p) + r_2I_2(p); \quad (2)$$

$$E(p) + L_1 i_1(0_-) = rI(p) + (r_1 + pL_1)I_1(p). \quad (3)$$

В этих уравнениях $i_1(0_-) = \frac{U}{r + r_1}$ — начальное значение тока, проходящего через индуктивную катушку; $E(p) = \frac{E}{p}$ — изображение постоянной э. д. с.

Уравнения (1)–(3) решим совместно относительно тока $I_1(p)$:

$$I_1(p) = \frac{E \left(\frac{L_1(r + r_2)}{r + r_1} p + \frac{rr_2 + r_1 r_2}{r + r_1} \right)}{p [rr_2 + rr_1 + r_1 r_2 + L_1(r + r_2) p]} = \frac{8p + 45}{p(4p + 25)} = \frac{2p + 11,25}{p(p + 6,25)}.$$

По формуле разложения (10.8) оригинал функции имеет вид

$$i_1(t) = (1,8 + 0,2e^{-6,25t}) a.$$

В целях упражнения эту же задачу решим методом сведения к нулевым начальным условиям. Для этого вычислим напряжение на разомкнутом рубильнике (см. рис. 9.11, а):

$$u_{руб}(0_-) = u_{об}(0_-) = r_1 i_1(0_-) = \frac{Er_1}{r + r_1}.$$

Добавим в ветвь рубильника два встречно включенных источника напряжения с э. д. с. $E_1 = E_2 = u_{руб} = \frac{Er_1}{r + r_1}$, как показано на рис. 10.12, а.

Расчет схемы после коммутации проведем по методу наложения. Составляющая тока i_1' (от системы э. д. с. E и E_1) совпадает со своим значением $i_1(0_-)$ до коммутации, так как подключение э. д. с. $E_1 =$

$= u_{руб}(0_-)$ (рис. 10.12, б) не вызовет каких-либо изменений в исходной схеме с выключенным рубильником P .

Таким образом,

$$i_1' = i_1(0_-) = \frac{E}{r + r_1} = 2 \text{ а.}$$

Вызываемая действием э. д. с. E_2 , подключаемой к обесточенной схеме (рис. 10.12, в), составляющая тока i_1'' может быть записана в операторной форме:

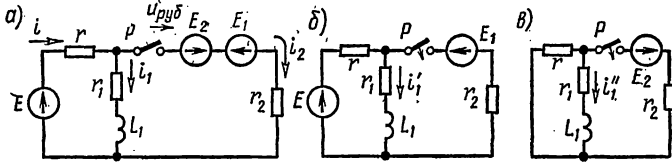


Рис. 10.12

$$i_1''(p) = - \frac{E_2(p) r}{\left(r_2 + \frac{r(r_1 + pL_1)}{r + r_1 + pL_1} \right) (r + r_1 + pL_1)} =$$

$$= - \frac{Er_1 r}{p(r + r_1)[rr_1 + rr_2 + r_1r_2 + (r_2 + r)pL_1]}.$$

Подставляя численные значения и переходя к оригиналу $i_1''(t)$ по формуле (10.8) для искомого тока, получим

$$i_1 = i_1' + i_1'' = (1,8 + 0,2e^{-6,25t}) \text{ а.}$$

10.13. Решить задачу 9.8 операторным методом.

10.14. Решить задачу 9.9 операторным методом.

10.15. Решить задачу 9.32 операторным методом.

Решение. Эта задача имеет ненулевое начальное условие для напряжения на конденсаторе u_C . Операторная схема замещения изображена на рис. 10.13. По методу контурных токов для этой схемы имеем:

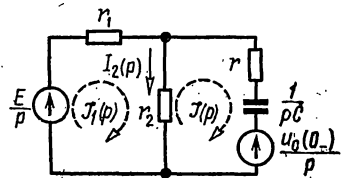


Рис. 10.13

$$\mathcal{J}_1(p)(r_1 + r_2) - \mathcal{J}(p)r_2 = \frac{E}{p}; \quad (1)$$

$$- \mathcal{J}_1(p)r_2 + \mathcal{J}(p)\left(r + r_2 + \frac{1}{pC}\right) = - \frac{u_C(0_-)}{p}. \quad (2)$$

Решая эти уравнения относительно $\mathcal{J}(p)$ и учитывая, что $u_C(0_-) = E$, найдем

$$\mathcal{J}(p) = \frac{-Er_1C}{(rr_1 + rr_2 + r_1r_2)Cp + r_1 + r_2} = -\frac{Er_1}{rr_1 + rr_2 + r_1r_2} \cdot \frac{1}{p + \frac{r_1 + r_2}{(rr_1 + rr_2 + r_1r_2)C}}$$

Подставив числовые значения, получим

$$\mathcal{J}(p) = \frac{-3,6 \cdot 10^{-8}}{24 \cdot 10^{-8}p + 150} = -0,15 \frac{1}{p + 6250}$$

На основании (10.7) определим оригинал:

$$i(t) = -0,15e^{-6250t} \text{ а.}$$

Аналогично из уравнений (1) и (2) можно найти другие токи и напряжение на обкладках конденсатора.

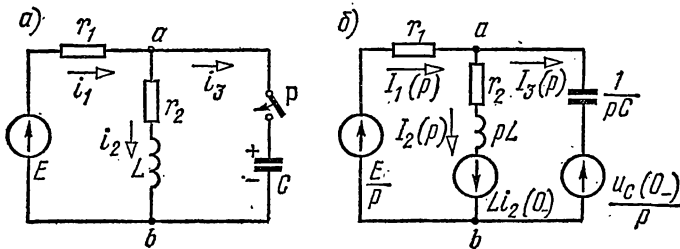


Рис. 10.14

10.16. При установившемся режиме в схеме рис. 10.14, а замыкается рубильник Р, включающий конденсатор С, предварительно заряженный до напряжения U_0 . Найти выражение токов при переходном процессе. Даны: $E = 60 \text{ в}$, $r_1 = 400 \text{ ом}$, $r_2 = 800 \text{ ом}$, $L = 0,2 \text{ гн}$, $C = 2,5 \text{ мкф}$ и $U_0 = 20 \text{ в}$.

Решение. Найдем начальное значение тока, проходящего через индуктивную катушку:

$$i_2(0_-) = \frac{E}{r_1 + r_2} = \frac{60}{1200} = 0,05 \text{ а.}$$

Выберем положительные направления токов, как указано на исходной схеме (см. рис. 10.14, а) и на операторной схеме замещения (рис. 10.14, б). Решим задачу методом узловых потенциалов. Напряжение в операторной форме между точками а и б (см. рис. 10.14, б)

$$U_{ab}(p) = \frac{\frac{E}{p} \cdot \frac{1}{r_1} - Li_2(0_-) \cdot \frac{1}{r_2 + pL} + \frac{u_C(0_-)}{p} pC}{\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2 + pL} + pC} \quad (1)$$

Найдем операторное выражение тока $I_1(p)$ по закону Ома:

$$I_1(p) = \frac{\varphi_b(p) - \varphi_a(p) + \frac{E}{p}}{r} = \frac{\frac{E}{p} - U_{ab}(p)}{r_1}. \quad (2)$$

Подставляя сюда $U_{ab}(p)$ из (1) и учитывая, что $u_C(0_-) = U_0$, получим

$$I_1(p) = \frac{LC(E - U_0)p^2 + [r_2C(E - U_0) + Li_2(0_-)]p + E}{p[r_1LCp^2 + (r_1r_2C + L)p + r_1 + r_2]} = \frac{F_1(p)}{pF_3(p)}, \quad (3)$$

где

$$F_1(p) = 0,2 \cdot 2,5 \cdot 10^{-6} \cdot 40p^2 + (800 \cdot 2,5 \cdot 10^{-6} \cdot 40 + 0,2 \cdot 0,05)p + 60 = 2 \cdot 10^{-5}p^2 + 0,09p + 60; \quad (4)$$

$$F_3(p) = 400 \cdot 0,2 \cdot 2,5 \cdot 10^{-6}p^2 + (400 \cdot 800 \cdot 2,5 \cdot 10^{-6} + 0,2)p + 1200 = 2 \cdot 10^{-4}p^2 + p + 1200. \quad (5)$$

Находим корни уравнения $F_3(p) = 0$:

$$p_1 = -2000 \text{ сек}^{-1}; \quad p_2 = -3000 \text{ сек}^{-1}. \quad (6)$$

Далее вычисляем:

$$F_1(0) = 60; \quad F_3(0) = 1200; \quad (7)$$

$$F_1(p_1) = 2 \cdot 10^{-5}(-2000)^2 + 0,09(-2000) + 60 = -40; \quad (8)$$

$$F_1(p_2) = 2 \cdot 10^{-5}(-3000)^2 + 0,09(-3000) + 60 = -30;$$

$$F_3'(p) = 4 \cdot 10^{-4}p + 1; \quad (9)$$

$$F_3'(p_1) = 4 \cdot 10^{-4}(-2000) + 1 = 0,2; \quad (10)$$

$$F_3'(p_2) = 4 \cdot 10^{-4}(-3000) + 1 = -0,2. \quad (11)$$

Подставляя (6)–(11) в формулу разложения (10.8), получим

$$i_1(t) = \frac{60}{1200} + \frac{-40e^{-2000t}}{-2000 \cdot 0,2} + \frac{-30e^{-3000t}}{-3000(-0,2)} = \\ = (0,05 + 0,1e^{-2000t} - 0,05e^{-3000t}) \text{ а.}$$

Затем находим мгновенное значение напряжения на параллельных ветвях и остальные токи:

$$u_{ab} = E - i_1 r_1 = 60 - (0,05 + 0,1e^{-2000t} - 0,05e^{-3000t}) 400 = \\ = (40 - 40e^{-2000t} + 20e^{-3000t}) \text{ в;}$$

$$i_3 = C \frac{du_{ab}}{dt} = (0,2e^{-2000t} - 0,15e^{-3000t}) \text{ а;}$$

$$i_2 = i_1 - i_3 = (0,05 - 0,1e^{-2000t} + 0,1e^{-3000t}) \text{ а.}$$

Проверим правильность полученных результатов для начального момента. При $t = 0_+$ ток $i_2(0_+) = 0,05$ а, напряжение $u_{ab}(0_+) = 20$ в, т. е. результат правильный.

10.17. В схеме рис. 10.15, а при разомкнутом рубильнике имеется установившийся процесс. В момент $t = 0$ рубильник замыкается и накоротко шунтирует сопротивление r_4 .

Найти выражения для токов и напряжения на конденсаторе при переходном процессе. Даны: $U = 125$ в, $r_1 = 50$ ом, $r_2 = 200$ ом, $r_4 = 250$ ом, $L = 0,01$ гн и $C = 5$ мкф.

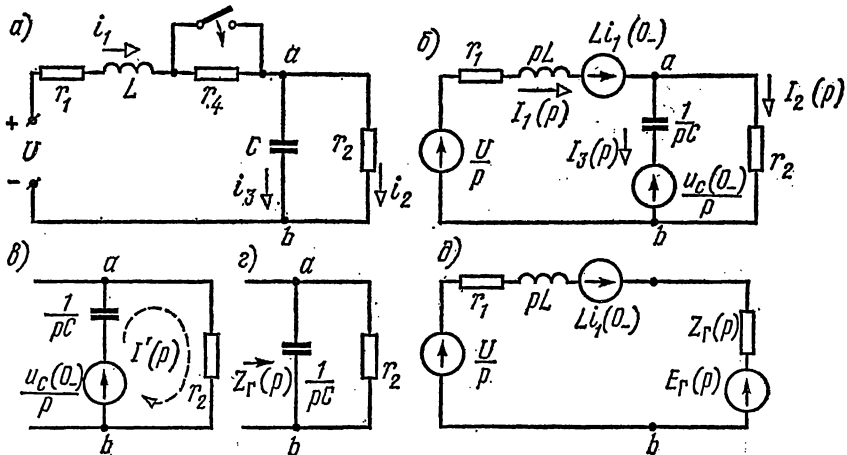


Рис. 10.15

Задачу решить с помощью теоремы разложения.

Решение. Это пример задачи с ненулевыми начальными условиями. Определим их. Через индуктивную катушку до замыкания рубильника проходит постоянный ток

$$i_1(0_-) = \frac{U}{r_1 + r_4 + r_2} = \frac{125}{500} = 0,25 \text{ а.}$$

Напряжение на конденсаторе до коммутации

$$u_C(0_-) = r_2 i_2(0_-) = 0,25 \cdot 200 = 50 \text{ в.}$$

Для схемы, образующейся после коммутации, начертим операторную схему замещения (рис. 10.15, б). Найдем, например, ток $I_1(p)$ методом эквивалентного генератора напряжения. Для этого отключаем первую ветвь (рис. 10.15, в) и найдем операторную э.д.с. эквивалентного генератора $E_r(p)$ и его сопротивление $Z_r(p)$. Из рис. 10.15, г следует, что

$$E_r(p) = \dot{U}_{ab}(p) = r_2 I'(p) = r_2 \frac{\frac{u_C(0_-)}{p}}{r_2 + \frac{1}{pC}} = \frac{Cr_2 u_C(0_-)}{1 + pCr_2}, \quad (1)$$

а из рис. 10.15, а

$$Z_r(p) = \frac{r_2 \frac{1}{pC}}{r_2 + \frac{1}{pC}} = \frac{1}{1 + pCr_2}. \quad (2)$$

Ток в первой ветви (рис. 10.15, б)

$$I_1(p) = \frac{\frac{U}{p} + Li_1(0_-) - E_r(p)}{r_1 + pL + Z_r(p)}. \quad (3)$$

Подставив сюда $E_r(p)$ и $Z_r(p)$ из (1) и (2), получим

$$I_1(p) = \frac{CLr_2i_1(0_-)p^2 + [UCr_2 + Li_1(0_-) - u_C(0_-)Cr_2]p + U}{p[LCr_2p^2 + (Cr_1r_2 + L)p + r_1 + r_2]} = \frac{F_1(p)}{F_2(p)}. \quad (4)$$

Подставляя числовые значения, имеем:

$$F_1(p) = 5 \cdot 10^6 \cdot 0,01 \cdot 0,25 \cdot 200p^2 + (125 \cdot 5 \cdot 10^6 \cdot 200 + 0,01 \cdot 0,25 - 50 \cdot 5 \cdot 10^6 \cdot 200)p + 125 = 2,5 \cdot 10^6 p^2 + 0,0775p + 125; \quad (5)$$

$$F_2(p) = pF_3(p) = p[0,01 \cdot 5 \cdot 10^6 \cdot 200p^2 + (5 \cdot 10^6 \cdot 50 \cdot 200 + 0,01)p + 250] = p(10^5 p^2 + 0,06p + 250). \quad (6)$$

По изображению с помощью (4) найдем оригинал тока $i_1(t)$ с помощью теоремы разложения (10.8). Для этого определим значения функций $F_1(p)$ и $F_3(p)$ при $p = 0$:

$$F_1(0) = 125; \quad F_3(0) = 250. \quad (7)$$

Затем находим корни уравнения:

$$F_3(p) = 10^5 p^2 + 0,06p + 250 = 0;$$

$$p_{1,2} = \frac{-0,06 \pm \sqrt{36 \cdot 10^{-4} - 4 \cdot 10^5 \cdot 250}}{2 \cdot 10^5} = \frac{-0,06 \pm j0,08}{2 \cdot 10^5} =$$

$$= (-3000 \pm j4000) \text{ сек}^{-1}; \quad (8)$$

$$p_1 = (-3000 + j4000) \text{ сек}^{-1}, \quad p_2 = (-3000 - j4000) \text{ сек}^{-1}.$$

Далее вычислим производную и ее значения при $p=p_1$ и $p=p_2$:

$$F'_3(p) = 2 \cdot 10^5 p + 0,06; \quad F'_3(p_1) = 2 \cdot 10^5 (-3000 + j4000) + 0,06 =$$

$$= j0,08; \quad (9)$$

$$F'_3(p_2) = 2 \cdot 10^5 (-3000 - j4000) + 0,06 = -j0,08. \quad (10)$$

Определим $F_1(p)$ при $p = p_1$ и $p = p_2$:

$$F_1(p_1) = 2,5 \cdot 10^{-6} (-3000 + j4000)^2 + 0,0775 (-3000 + j4000) + 125 = -125 + j250; \quad (11)$$

$$F_1(p_2) = 2,5 \cdot 10^{-6} (-3000 - j4000)^2 + 0,0775 (-3000 - j4000) + 125 = -125 - j250. \quad (12)$$

Наконец, подставим полученные в уравнениях (7)—(12) значения в формулу (10.8) и, учитывая замечание на стр. 313, определяем

$$\begin{aligned} i_1(t) &= \frac{125}{250} + 2\operatorname{Re} \left[\frac{(-125 + j250) e^{(-3000 + j4000)t}}{(-3000 + j4000) j0,08} \right] = \\ &= 0,5 + 2\operatorname{Re} \left[\frac{281 e^{j116^\circ 30'} e^{j4000t}}{5000 e^{j126^\circ 50'} \cdot 0,08 e^{j90^\circ}} \right] e^{-3000t} = \\ &= 0,5 + \operatorname{Re} [1,4 e^{j(4000t - 100^\circ 20')}] e^{-3000t} = 0,5 + \\ &\quad + 1,4 e^{-3000t} \cos(4000t - 100^\circ 20') = [0,5 + \\ &\quad + 1,4 e^{-3000t} \sin(4000t - 10^\circ 20')] a. \end{aligned}$$

Проверка. При $t=0_+$ $i_1(0) = 0,25$ а, что удовлетворяет начальному условию.

Остальные два тока могут быть найдены следующим образом. Если из U вычесть падение напряжения на $r_1 L$ -ветви, то будет найдено мгновенное значение напряжения на параллельных ветвях:

$$u_{ab} = U - r_1 i_1 - L \frac{di_1}{dt}.$$

Затем определяем токи:

$$i_2 = \frac{u_{ab}}{r_2}; \quad i_3 = C \frac{du_{ab}}{dt}.$$

10.18. Решить задачу 9.48 операторным методом.

10.19. Решить задачу 9.49 операторным методом.

10.20. Решить задачу 9.50 операторным методом.

10.21. Решить задачу 9.51 операторным методом.

10.22. Решить задачу 9.35 операторным методом.

Решение. До замыкания рубильника в цепи проходит ток

$$i = \frac{\sqrt{2} U}{z} \sin(\omega_0 t + \psi - \varphi),$$

где

$$z = \sqrt{(r_1 + r_2)^2 + (\omega_0 L_1 + \omega_0 L_2)^2} = 2,5 \text{ ом};$$

$$\varphi = \operatorname{arctg} \frac{\omega_0 L_1 + \omega_0 L_2}{r_1 + r_2} = \operatorname{arctg} 3,43 = 73^\circ 44'.$$

По условию задачи в момент включения этот ток максимален, т. е.

$$i(0_-) = i(0_+) = \left[\frac{U_m}{z} \sin(\omega_0 t + \psi - \varphi) \right]_{t=0_+} = \frac{U_m}{z} = \frac{10}{25} = 0,4 \text{ а.}$$

Отсюда может быть рассчитан угол включения ψ :

$$\sin(\psi - \varphi) = 1; \quad \psi - \varphi = 90^\circ; \quad \psi = 90^\circ + \varphi = 163^\circ 44'.$$

Так как изображение синусоидальной функции определяется сравнительно сложной формулой, в данной задаче операторным методом вычислим только свободную составляющую тока $i_{1св}$, а принужденную составляющую тока $i_{1пр}$ найдём, рассчитав схему задачи (см. рис. 9.23) после коммутации символическим методом:

$$i_{1прm} = \frac{\dot{U}_m}{r_1 + j\omega_0 L_1} = \frac{U_m e^{j\psi}}{r_1 + j\omega_0 L_1} = \frac{10e^{j163^\circ 44'}}{3 + j5 \cdot 10^{-3} \cdot 0,8 \cdot 10^{-3}} = 2e^{j110^\circ 34'} \text{ а,}$$

$$i_{1пр} = 2 \sin(\omega_0 t + 110^\circ 34') \text{ а; } i_{1пр}(0_+) = 2 \sin 110^\circ 34' = 1,87 \text{ а.}$$

Начальное значение свободного тока

$$i_{1св}(0_+) = i(0_+) - i_{1пр}(0_+) = 0,4 - 1,87 = -1,47 \text{ а.}$$

Операторная схема замещения для расчета свободной составляющей переходного процесса с учетом ненулевых начальных значений свободных токов вычерчена на рис. 10.16.

По второму закону Кирхгофа для первого контура имеем

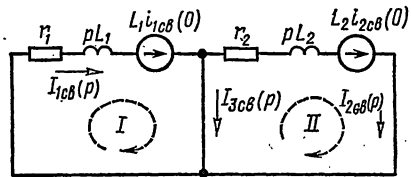


Рис. 10.16

$$L_1 i_{1св}(0_+) = I_{1св}(p) (r_1 + pL_1)$$

и, подставляя численные значения и вычисляя изображение свободного тока, находим

$$I_{1св}(p) = \frac{L_1 i_{1св}(0_+)}{r_1 + pL_1} = - \frac{0,8 \cdot 10^{-3} \cdot 1,47}{3 + 0,8 \cdot 10^{-3} p} = - \frac{1,47}{p + 3,75 \cdot 10^3}$$

По формуле разложения,

$$i_1 = -1,47e^{-3,75 \cdot 10^3 t} \text{ а.}$$

Суммирование принужденного и свободного токов определяет искомый ток

$$i_1 = [2 \sin(\omega_0 t + 110^\circ 34') - 1,47e^{-3,75 \cdot 10^3 t}] \text{ а.}$$

Аналогично вычисляем ток i_2 . Отличие заключается в том, что вынужденный ток равен нулю:

$$I_{2прm} = 0; \quad i_{2пр} = 0.$$

Поэтому

$$i_{2\text{св}}(0_+) = i_2(0_+) = i(0_-) = 0,4 \text{ а.}$$

По второму закону Кирхгофа для второго контура (см. рис. 10.16),

$$I_2(p) = I_{2\text{св}}(p) = \frac{L_2 i_{2\text{св}}(0)}{r_2 + pL_2} = \frac{4 \cdot 10^{-3} \cdot 0,4}{4 + 4 \cdot 10^{-3}p} = \frac{0,4}{p + 10^3}.$$

По формуле разложения,

$$i_2 = i_{2\text{св}} = 0,4e^{-10^3 t} \text{ а.}$$

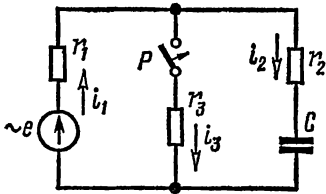


Рис. 10.17

10.23. До включения рубильника P по цепи проходит синусоидальный ток, вызванный действием синусоидальной э.д.с. $e = 180\sin(314t + 30^\circ)$ в. В момент $t = 0$ включается рубильник P (рис. 10.17). Найти выражения переходных токов, если $r_1 = 30 \text{ ом}$, $r_2 = 60 \text{ ом}$, $r_3 = 50 \text{ ом}$ и $C = 80 \text{ мкф}$.

Решение. Вычислим ток и напряжение на конденсаторе при установившемся режиме до замыкания ключа:

$$i_{1m} = i_{2m} = \frac{180e^{j30^\circ}}{90 - j314 \cdot 80 \cdot 10^{-6}} = \frac{180e^{j30^\circ}}{90 - j39,8} = 1,83e^{j53^\circ 50'} \text{ а;}$$

$$\dot{U}_{Cm} = -jx_C i_{2m} = -j39,8 \cdot 1,83e^{j53^\circ 50'} = 72,8e^{-j36^\circ 10'} \text{ в;}$$

$$u_C = 72,8 \sin(314t - 36^\circ 10') \text{ в.}$$

При $t = 0$ напряжение на конденсаторе

$$u_C(0_-) = 72,8 \sin(-36^\circ 10') = -43 \text{ в.}$$

Составим уравнения по методу контурных токов в операторной форме:

$$(r_1 + r_3) \mathcal{J}_1(p) - r_3 \mathcal{J}_2(p) = E(p);$$

$$-r_3 \mathcal{J}_1(p) + \left(r_3 + r_2 + \frac{1}{pC} \right) \mathcal{J}_2(p) = -\frac{u_C(0_-)}{p}.$$

Определим ток $\mathcal{J}_2(p)$. Для этого решим последние уравнения относительно $\mathcal{J}_2(p)$:

$$\mathcal{J}_2(p) = \frac{E(p) Cr_3 p - u_C(0_-)(r_1 + r_3)C}{(r_1 r_2 + r_1 r_3 + r_2 r_3) Cp + r_1 + r_3} = I_2(p).$$

Перепишем его в комплексной форме. Так как в рассматриваемом случае действует синусоидальная э.д.с. $e(t)$, то расчет значительно упрощается, если оперировать с мгновенной комплексной э.д.с.

$\dot{e}(t) = E_m e^{j(\omega_0 t + \psi)}$, изображение которой значительно проще и имеет вид

$$\dot{E}_m(p) = \frac{180e^{j30^\circ}}{p - j314}.$$

Для учета ненулевых условий второе слагаемое умножим на j . Итак, подставив числовые значения, получим

$$\begin{aligned} \dot{i}_{2m}(p) &= \frac{\frac{180e^{j30^\circ}}{p - j314} \cdot 80 \cdot 10^{-6} \cdot 50p - j(-43)80 \cdot 80 \cdot 10^{-6}}{(30 \cdot 60 + 30 \cdot 50 + 60 \cdot 50) \cdot 80 \cdot 10^{-6}p + 80} = \\ &= \frac{0,72e^{j30^\circ} p}{(p - j314)(0,504p + 80)} + j \frac{0,276}{0,504p + 80}. \end{aligned}$$

Найдем комплексный оригинал тока. Его можно отыскать разными путями: с помощью пп. 14 и 5 табл. 10.1 или с помощью теоремы разложения. Изберем первый путь:

$$\begin{aligned} \dot{i}_{2m}(p) &= \frac{0,72e^{j30^\circ}}{0,504(p - 314)(p + 159)} + j \frac{0,276}{0,504(p + 159)} \doteq \\ &\doteq 1,43e^{j30^\circ} \left[\frac{1}{-j314 - 159} (-j314e^{j314t} - 159e^{-159t}) \right] + j0,548e^{-159t} = \\ &= \frac{1,43e^{j30^\circ}}{-352e^{j63^\circ 10'}} (e^{-j90^\circ} 314e^{j314t} - 159e^{-159t}) + \\ &+ j0,548e^{-159t} = [1,27 e^{j(314t + 56^\circ 50')} + 0,646e^{-159t} e^{-j33^\circ 10'} + \\ &+ j0,548e^{-159t}] a = \dot{i}_2(t). \end{aligned}$$

Искомый ток определяется как мнимая часть последнего выражения:

$$\begin{aligned} i_2(t) &= \text{Im} [\dot{i}_2(t)] = 1,27 \sin(314t + 56^\circ 50') + \\ &+ 0,646 \sin(-33^\circ 10') e^{-159t} + 0,548e^{-159t} = \\ &= [1,27 \sin(314t + 56^\circ 50') + 0,196e^{-159t}] a. \end{aligned}$$

Выражения двух других токов и напряжения на конденсаторе рекомендуется рассчитать самостоятельно. При этом для отыскания комплексного оригинала использовать теорему разложения.

10.24. Найти переходные токи в цепи и напряжение на индуктивности при замыкании рубильника P в момент $t = 0$ (рис. 10.18). Даны: $e = 100 \sin(314t + 60^\circ)$ в, $r_1 = 25$ ом, $r_2 = 20$ ом, $r_3 = 30$ ом и $L = 0,1$ гн.

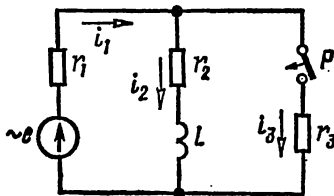


Рис. 10.18

Задачу решить операторным способом, методами контурных токов и узловых потенциалов.¹

10.25. Решить задачу 9.56 операторным методом.

10.26. Напряжение, изменяющееся по показательному закону $u = U_0 e^{-at}$ ($U_0 = 10$ в, $a = 2$ сек⁻¹), включается в цепь, состоящую из последовательно соединенных активного сопротивления $r = 2$ ом и индуктивности $L = 1$ гн.

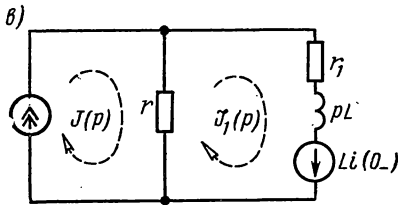
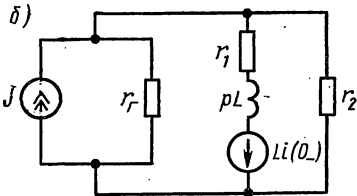
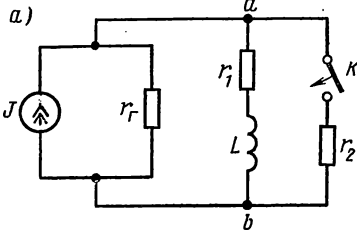


Рис. 10.19

10.30. Цепь, состоящая из генератора постоянного тока (J , $r_Г$), нагруженная на $r_1 L$ -ветвь, находится в установившемся режиме (рис. 10.19, а). В момент $t = 0$ замыканием контакта K осуществляется коммутация, включающая сопротивление r_2 . Найти закон изменения тока $i_1(t)$, протекающего через ветвь $r_1 L$ после замыкания контакта K .

Решение. До коммутации по ветви $r_1 L$ протекал постоянный ток

$$i_1(0) = J \frac{r_Г}{r_Г + r_1}.$$

Начертим эквивалентную операторную схему замещения после коммутации (рис. 10.19, б) и заменим ее схемой рис. 10.19, в, в которой параллельно соединенные сопротивления $r_Г$ и r_2 заменим эквивалентным

$$r = \frac{r_Г r_2}{r_2 + r_Г}.$$

По методу контурных токов имеем

$$\mathcal{J}_1(\rho) (r_1 + r + \rho L) - J(\rho)r = Li_1(0_-).$$

Отсюда, учитывая, что $J(\rho) = \frac{J}{\rho}$, найдем

$$\mathcal{J}_1(\rho) = \frac{Li(0_-) + \frac{J}{\rho}r}{r_1 + r + \rho L} = \frac{i_1(0_-)}{\rho + \frac{r_1+r}{L}} + \frac{Jr}{L\rho\left(\rho + \frac{r_1+r}{L}\right)}.$$

Используя пп. 5 и 11 табл. 10.1, найдем оригинал каждого из этих изображений. В результате получим

$$i_1(t) = J \frac{r_r}{r_1 r_r + r_2 r_r + r_1 r_2} \left(r_2 + \frac{r_1 r_r}{r_1 + r_r} e^{-\frac{r_1 r_r + r_2 r_r + r_1 r_2}{L(r_2 + r_r)} t} \right).$$

10.31. Каждая из цепей рис. 10.20, а и б находится в установившемся режиме. В момент $t = 0$ контакт K мгновенно выключается. Найти закон изменения напряжения $u_{ab}(t)$. Задачу решить, если к входным зажимам был подключен: а) источник постоянного напряжения U ; б) источник постоянного тока J . Для каждой из схем принять $r_1 = r_2 = r_3 = r_4 = r$.

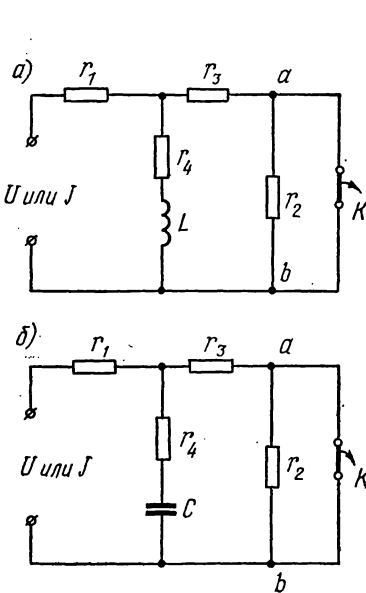


Рис. 10.20

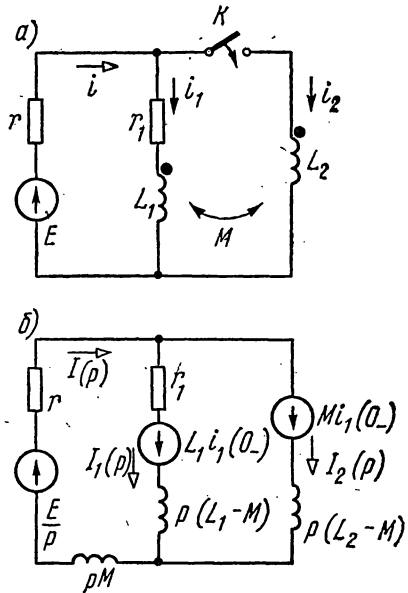


Рис. 10.21

Б. Расчет переходных процессов в цепях со взаимной индуктивностью

10.32. До замыкания контакта K цепь рис. 10.21, а находилась в установившемся режиме. Найти выражение тока i_2 как функцию времени после замыкания K . Даны: $E = 30$ в, $r = 100$ ом, $r_1 = 200$ ом,

$L_1 = L_2 = 0,3 \text{ гн}$, $M = 0,1 \text{ гн}$. Составить операторную схему замещения.

Решение. Для схемы после коммутации запишем уравнения Кирхгофа для мгновенных величин:

$$E = ir + i_1 r_1 + L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt}; \quad (1)$$

$$E = ir + L_2 \frac{di_2}{dt} + M \frac{di_1}{dt}; \quad (2)$$

$$i = i_1 + i_2. \quad (3)$$

Перейдем к операторной форме записи этих уравнений, учтя не нулевое значение тока $i_1(0_-) = \frac{E}{r + r_1}$:

$$E(p) = rI(p) + r_1 I_1(p) + pL_1 I_1(p) - L_1 i_1(0_-) + pM I_2(p); \quad (1')$$

$$E(p) = rI(p) + pL_2 I_2(p) + pM I_1(p) - M i_1(0_-); \quad (2')$$

$$I(p) = I_1(p) + I_2(p). \quad (3')$$

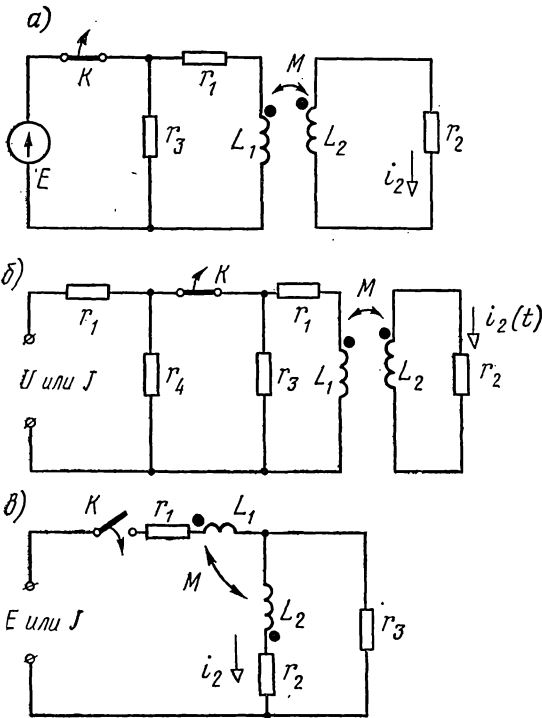


Рис. 10.22

Решим эти уравнения относительно $I_2(p)$ и, учитывая, что $E(p) = \frac{E}{p}$, получим

$$I_2(p) = \frac{p \{E(L_1 - M) - [r(L_1 - M) + r_1 M] i_1(0_-)\} + Er_1}{p [p^2(L_1 L_2 - M^2) + p(L_1 r + L_2 r + L_2 r_1 - 2Mr) + r r_1]}.$$

Подставив числовые значения и сократив числитель и знаменатель на общий множитель $p + 1000$, получим

$$I_2(p) = \frac{75}{p(p + 250)} \doteq 0,3(1 - e^{-250t}) a = i_2(t).$$

Проверка. При $t = 0$ ток $i_2(0) = 0$, что соответствует первому закону коммутации. При $t = \infty$ ток $i_2(\infty) = 0,3 a$. Действительно, при установившемся режиме ветвь $r_1 L_1$ будет закорочена индуктивностью, по которой проходит ток $i_2(\infty) = \frac{E}{r} = 0,3 a$. Схема замещения изображена на рис. 14.21, б.

10.33. Схемы рис. 10.22 имеют индуктивно связанные элементы. Для каждой из них найти закон изменения тока $i_2(t)$ после коммутации.

В схемах рис. 10.22, а и б до размыкания контакта K имел место установившийся режим, вызванный действием постоянных источников. Параметры схемы рис. 10.22, а: $E = 50$ в, $r_1 = 100$ ом, $L_1 = 0,3$ гн, $r_2 = 200$ ом, $L_2 = 0,3$ гн, $M = 0,2$ гн, $r_3 = 100$ ом. Для схемы рис. 10.22, б рассмотреть случаи включения: 1) источника постоянного напряжения $U = 100$ в; 2) источника постоянного тока $J = 1$ а. Параметры этой схемы: $r_1 = r_3 = 150$ ом, $r_2 = 200$ ом; $r_4 = 150$ ом, $r = 50$ ом, $L_1 = 0,2$ гн, $L_2 = 0,1$ гн, $M = 0,1$ гн.

Параметры схемы рис. 10.22, в: $E = 30$ в, $r_1 = r_2 = r_3 = 100$ ом, $L_1 = 0,2$ гн, $L_2 = 0,1$ гн, $M = 0,1$ гн.

Глава одиннадцатая
РАСЧЕТ ЛИНЕЙНЫХ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ
С СОСРЕДОТОЧЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ
МЕТОДОМ ИНТЕГРАЛА ДЮАМЕЛЯ
И СПЕКТРАЛЬНЫМ МЕТОДОМ

ОСНОВНЫЕ ПОЛОЖЕНИЯ И СООТНОШЕНИЯ

1. **Переходные функции.** При подключении цепи в начальный момент $t = 0$ к источнику единичного напряжения или тока реакция цепи (напряжение на любом ее участке или ток в любой ее ветви как функция времени) называется *переходной функцией* $k(t)$ (напряжения или тока соответственно). При подключении цепи к источнику единичного напряжения переходная функция тока называется *переходной проводимостью* $y(t)$; при подключении цепи к источнику единичного тока переходная функция напряжения называется *переходным сопротивлением* $z(t)$ (см. табл. 11.1).

Таблица 11.1

Воздействие	Реакция	
	ток	напряжение
Единичное напряжение	$y(t)$	$k(t)$
Единичный ток	$k(t)$	$z(t)$

При подключении в момент t_1 источника постоянного воздействия F_r (например, напряжения с э.д.с. $E_r = F_r$ или источника тока $J_r = F_r$) реакция цепи $f(t)$ [$u(t)$ или $i(t)$] равна

$$f(t) = F_r k(t - t_1). \quad (11.1)$$

Переходные функции не зависят от формы и амплитуды действующих в схеме источников э.д.с. и тока и определяются самой схемой и параметрами ее элементов.

Для определения переходной характеристики цепи можно пользоваться операторным методом.

Так, например, изображение переходной проводимости $y(p)$ можно получить, если учесть, что изображение единичного напряжения есть $1/p$ (см. п. 2 табл. 10.1):

$$y(p) = \frac{1}{Z(p)} = \frac{1}{pZ(p)}.$$

Оригинал $y(t)$ определяется с использованием таблиц изображений или по теореме разложения.

Приведем примеры

А. При включении на постоянное напряжение U цепи, состоящей из последовательно соединенных r и L , ток, напряжение на индуктивности и напряжение на активном сопротивлении равны:

$$i = \frac{U}{r} \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right); \quad u_L = U e^{-\frac{t}{\tau}};$$

$$u_r = U \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right),$$

где $\tau = L/r$ — постоянная времени цепи.

Деля эти выражения на величину U , найдем, что переходная проводимость $y(t) = \frac{1}{r} \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right)$, а переходные функции для напряжения на индуктивности и на активном сопротивлении соответственно равны $k_L(t) = e^{-\frac{t}{\tau}}$, $k_r(t) = 1 - e^{-\frac{t}{\tau}}$.

Б. При включении на постоянное напряжение U цепи, состоящей из последовательно соединенных r и C , ток и напряжения на емкости и на активном сопротивлении определяются по формулам:

$$i = \frac{U}{r} e^{-\frac{t}{\tau}}; \quad u_C = U \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right); \quad u_r = U e^{-\frac{t}{\tau}},$$

где $\tau = rC$ — постоянная времени цепи.

Принимая в этих формулах $U = 1$, получим

$$y(t) = \frac{1}{r} e^{-\frac{t}{\tau}}, \quad k_C(t) = 1 - e^{-\frac{t}{\tau}}, \quad k_r(t) = e^{-\frac{t}{\tau}}.$$

Примеры приведены в задачах 11.1 и 11.5.

2. **Интеграл Дюамеля.** Если на пассивную цепь в момент $t = 0$ включается воздействие $f_r(t)$, являющееся непрерывной функцией времени (рис. 11.1), то реакция цепи $f(t)$ определяется интегралом Дюамеля по формуле

$$f(t) = f_r(0) k(t) + \int_0^t f_r'(\tau) k(t - \tau) d\tau,$$

(11.2)

где $f_r(0)$ — начальное значение воздействия;

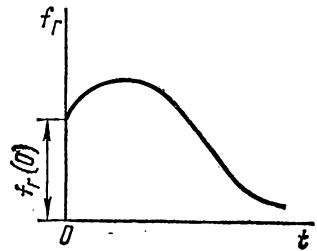


Рис. 11.1

$f_r'(\tau) = \left. \frac{df_r(t)}{dt} \right|_{t=\tau}$ — обозначение производной воздействия;
 $k(t-\tau)$ — переходная функция, в которой t заменено на $t-\tau$.

Если функция воздействия $f_r(t)$ имеет различные выражения на разных интервалах времени (например, для рис. 11.2

$$f_r(t) = f_1(t) \text{ при } 0 \leq t < t_1; \quad f_r(t) = f_2(t) \\ \text{при } t_1 < t < t_2; \quad f_r(t) = f_3(t) \text{ при } t_2 < t \leq \infty \text{ и,}$$

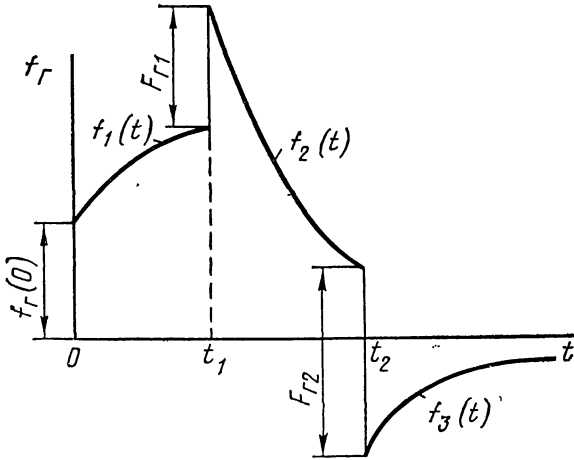


Рис. 11.2

кроме того, имеет или не имеет скачки, то интервал интегрирования разбивается на отдельные участки, а реакция цепи, рассчитываемая интегралом Дюамеля, записывается для отдельных интервалов времени. В случае воздействия, изображенного на рис. 11.2, имеем:

1) В первом интервале времени от 0 до t_1 (не включая скачок F_{r1})

$$f(t) = f_r(0) k(t) + \int_0^t f_1'(\tau) k(t-\tau) d\tau; \quad (11.3a)$$

2) во втором интервале времени от t_1 до t_2 (не включая скачок F_{r2})

$$f(t) = f_r(0) k(t) + \int_0^{t_1} f_1'(\tau) k(t-\tau) d\tau + F_{r1} k(t-t_1) + \\ + \int_{t_1}^t f_2'(\tau) k(t-\tau) d\tau. \quad (11.3b)$$

Здесь слагаемое $F_{r1} k(t-t_1)$ обусловлено положительным скачком воздействия в момент t_1 ;

3) в третьем интервале времени от t_2 до ∞

$$f(t) = f_r(0)k(t) + \int_0^{t_1} f_1'(\tau)k(t-\tau)d\tau + F_{r1}k(t-t_1) + \\ + \int_{t_1}^{t_2} f_2'(\tau)k(t-\tau)d\tau - F_{r2}k(t-t_2) + \int_{t_2}^t f_3'(\tau)k(t-\tau)d\tau. \quad (11.3в)$$

Здесь слагаемое $-F_{r2}k(t-t_2)$ обусловлено отрицательным скачком воздействия в момент t_2 .

Входящие в формулы (11.3а, б и в) $k(t-\tau)$ есть $k(t)$, в котором t заменено на $t-\tau$.

Примеры даны в задачах 11.7, 11.9, 11.13.

3. Импульсные характеристики. При исследовании действия коротких импульсов на линейные цепи используется понятие «дельта-функции» (или «единичной импульсной функции»), $\delta(t)$. Она характеризуется собой единичный импульс и определяется следующими равенствами:

$$\delta(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } t < 0; \\ \infty & \text{при } t = 0; \\ 0 & \text{при } t > 0. \end{cases}$$

Основные свойства дельта-функции:

$$\left. \begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt &= 1; \\ \delta(t) &\doteq \delta(p) = 1; \\ \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\tau) \delta(t-\tau) d\tau &= \varphi(t). \end{aligned} \right\} \quad (11.4а)$$

Реакция цепи на действие дельта-функции называется *импульсной характеристикой цепи*.

В табл. 11.2 приводятся воздействия и соответствующие импульсные характеристики (реакции) цепи.

Таблица 11.2

Воздействие	Реакция	
	ток	напряжение
Единичное импульсное напряжение	$y_{\delta}(t)$	$k_{\delta}(t)$
Единичный импульсный ток	$k_{\delta}(t)$	$z_{\delta}(t)$

Поскольку $\delta(p) = 1 = p \frac{1}{p}$ (см. п. 1 табл. 10.1), изображение любой импульсной характеристики можно получить умножением соответствующей переходной характеристики на оператор p :

$$k_{\delta}(p) = pk(p). \quad (11.4б)$$

Учитывая теорему дифференцирования оригинала, получим

$$k_{\delta}(t) = k(0)\delta(t) + \frac{dk(t)}{dt}. \quad (11.4в)$$

Реакция цепи при произвольном ограниченном воздействии $F(t)$ определяется по формуле

$$f(t) = \int_0^t F(\tau)k'_{\delta}(t-\tau) d\tau \quad (11.5а)$$

или с учетом (11.4а) и (11.4в)

$$f(t) = F(t)k(0) + \int_0^t F(\tau)k'_{\delta}(t-\tau) d\tau. \quad (11.5б)$$

Примеры приведены в задачах 11.17, 11.18, 11.19.

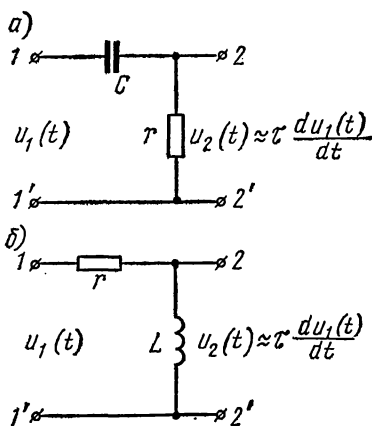


Рис. 11.3

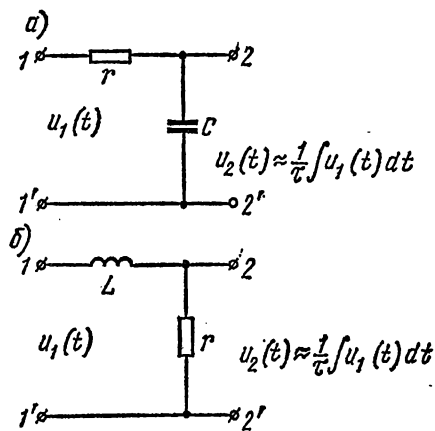


Рис. 11.4

4. Дифференцирование и интегрирование сигналов. Простейшие дифференцирующие (обостряющие) цепи изображены на рис. 11.3, а и б, а интегрирующие (сглаживающие) — на рис. 11.4, а и б. Эти цепи осуществляют дифференцирование и интегрирование сигналов с определенным спектром частот приближенно.

Дифференцирование осуществляется в области частот тем качественнее, чем сильнее выполняется неравенство

$$\tau\omega \ll 1, \quad (11.6а)$$

а интегрирование, наоборот, при неравенстве

$$\tau \omega \gg 1. \quad (11.7a)$$

В формулах (11.6a) и (11.7a) постоянная времени $\tau = rC$ для рис. 11.3, а и 11.4, а и $\tau = \frac{L}{r}$ для рис. 11.3, б и 11.4, б.

Для импульсных воздействий продолжительностью t_n условие (11.6a) качественного дифференцирования эквивалентно неравенству

$$\tau \ll t_n, \quad (11.6b)$$

а условие (11.7a) качественного интегрирования эквивалентно

$$\tau \gg t_n. \quad (11.7b)$$

Цепи, не удовлетворяющие условиям (11.6a и б)—(11.7a и б), называются *переходными (разделительными)*.

Пример дан в задаче 11.22.

5. Интегральные преобразования Фурье. Сущность спектрального представления состоит в замене заданной функции времени суммой синусоидальных функций различных частот.

Абсолютно интегрируемая функция времени может быть вычислена в виде наложения своих гармонических составляющих с помощью интеграла Фурье:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(j\omega) e^{j\omega t} d\omega. \quad (11.8)$$

Здесь интенсивность спектральных составляющих определяется спектральной плотностью $F(j\omega)$, которая может быть вычислена по формуле Фурье:

$$F(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt. \quad (11.9)$$

Выражения (11.8) и (11.9) называются соответственно *обратным* и *прямым преобразованиями Фурье*.

6. Теорема сдвига (запаздывания). Если известна спектральная плотность $F(j\omega)$, соответствующая заданной временной функции $f(t)$ (кривая 1 рис. 11.5), то для сдвинутой вдоль оси времени на время запаздывания t_1 временной функции $f(t-t_1)$ (кривая 2) спектральная

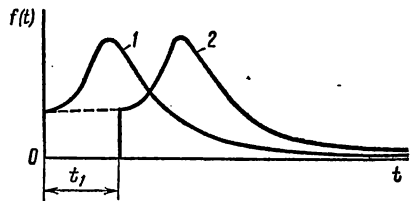


Рис. 11.5

плотность отличается фазовым множителем $e^{-j\omega t_1}$ и имеет вид $F(j\omega) e^{-j\omega t_1}$.

7. Связь между преобразованием Фурье и Лапласа. Сравнение формулы Фурье (11.9) с формулой (10.1) показывает, что для неперико-

дических временных функций $f(t)$, отличных от нуля лишь при $t \geq 0$ и удовлетворяющих условию интегрируемости по Фурье $|\int f(t)| < M e^{-c_0|t|}$, где M и c_0 — положительные и действительные величины, спектральная плотность совпадает с соответствующим изображением Лапласа, в котором параметр p заменен на $j\omega$. Это свойство позволяет применять таблицы преобразования Лапласа для вычисления функций спектральной плотности и позволяет для заведомо равных нулю при $t \leq 0$ временных функций $f(t)$ вычислить их мгновенные значения, пользуясь изложенной в гл. 10 методикой нахождения оригиналов.

Спектральная плотность $F(j\omega)$ реакции цепи [например, спектральная плотность напряжения $U(j\omega)$ или тока $I(j\omega)$ произвольного элемента цепи] вычисляется по спектральной плотности воздействия $F_r(j\omega)$ генератора и соответствующей комплексной функции передачи цепи $K(j\omega)$:

$$F(j\omega) = K(j\omega)F_r(j\omega). \quad (11.10)$$

Частные случаи комплексной функции цепи — сопротивление передачи $Z(j\omega)$ и проводимость передачи $Y(j\omega)$.

Примеры приведены в задачах 11.26, 11.28, 11.31, 11.33, 11.37, 11.41.

8. Энергия импульса $f(t)$ пропорциональна интегралу энергии:

$$A = \int_{-\infty}^{+\infty} f^2(t) dt. \quad (11.11)$$

Интеграл энергии импульса может быть вычислен по формуле Релея, если задана его спектральная плотность $F(j\omega)$:

$$A = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} |F(j\omega)|^2 d\omega. \quad (11.12)$$

Функция квадрата модуля $|F(j\omega)|^2$, определяющая плотность распределения энергии импульса по спектру, называется *энергетическим спектром* данного импульса.

УПРАЖНЕНИЯ И ЗАДАЧИ

А. Переходные характеристики. Расчет переходных процессов с помощью интеграла Дюамеля

11.1. Рассчитать переходную проводимость $y(t)$ схемы (рис. 11.6) и переходную функцию $k(t)$ передачи по напряжению. Даны: $r_1 = 2$ ком, $r_2 = 4$ ком и $C = 1$ мкф.

Решение. 1) Определяем классическим или операторным методом ток $i_2(t)$ схемы при подключении к ее зажимам 1-1' в начальный момент $t = 0$ постоянного воздействия в виде напряжения U :

$$i_2(t) = \frac{U}{r_1 + r_2} + \frac{U r_1}{r_2(r_1 + r_2)} e^{-\frac{r_1 + r_2}{r_1 r_2} t} = U \cdot 10^{-3} \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{12} e^{-750t} \right).$$

Разделив это выражение на амплитуду воздействия U , найдем значение переходной проводимости

$$y(t) = (1,67 + 0,83e^{-750t}) 10^{-4} \text{ сим.}$$

2. Выходное напряжение по закону Ома

$$u_2(t) = r_2 i_2(t) = U(0,667 + 0,333e^{-750t}).$$

Разделив это выражение на U , получим переходную функцию передачи по напряжению:

$$k(t) = 0,667 + 0,333e^{-750t}.$$

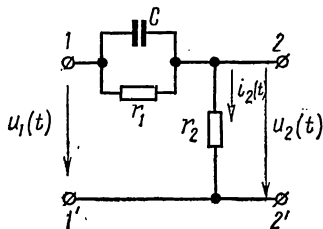


Рис. 11.6

11.2. Рассчитать в буквенном виде переходную проводимость схемы рис. 11.7 и переходную функцию передачи по напряжению.

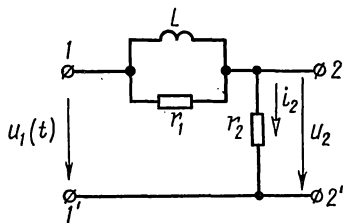


Рис. 11.7

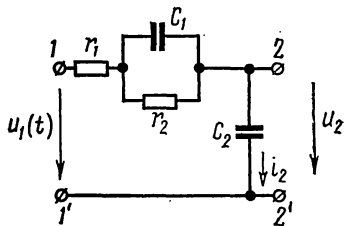


Рис. 11.8

11.3. В схеме рис. 11.8 $r_1 = r_2 = 5 \text{ ком}$ и $C_1 = C_2 = 10 \text{ мкф}$. Определить переходную функцию передачи по напряжению и переходную проводимость схемы.

11.4. В цепи рис. 11.9 действует источник напряжения с э.д.с. $e(t)$. Найти переходную функцию $k(t)$ для расчета напряжения на емкости; переходную проводимость $y(t)$ для расчета тока $i(t)$; переходную проводимость $y_1(t)$ для расчета тока $i_1(t)$.

11.5. В цепи рис. 11.10, а действует источник тока $i(t)$. Вычислить переходную функцию $k(t)$ для расчета тока $i_2(t)$ и переходное сопротивление $z(t)$ для расчета выходного напряжения $u_2(t)$.

Решение. Переходная функция $k(t)$ совпадает численно со значением переходного тока $i_2(t)$ в рассматриваемой цепи при воздей-

ствии единичной функции тока $i = 0$ при $t < 0$ и $i = J = 1$ а при $t \geq 0$ (рис. 11.10, б). Операторная схема замещения для расчета соответствующего тока показана на рис. 11.10, в. Изображение переходной функции (с учетом того, что $J(p) = \frac{1}{p}$) имеет вид

$$K(p) = I_2(p) = I(p) \frac{\frac{1}{pC}}{r_2 + \frac{1}{pC}} = \frac{1}{p(r_2 C p + 1)}.$$

Переходя к оригиналу, находим

$$k(t) = i_2(t) = 1 - e^{-\frac{t}{r_2 C}}.$$

Переходное сопротивление $z(t)$ численно совпадает с выходным

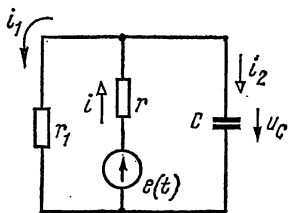


Рис. 11.9

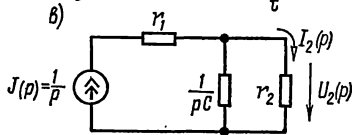
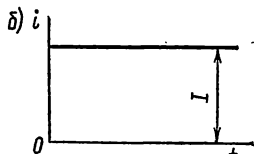
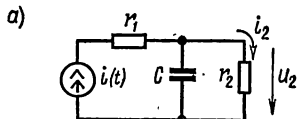


Рис. 11.10

напряжением $u_2(t)$, возникающим в схеме под действием единичного тока $J = 1$ а (см. рис. 11.10, б). Оператор переходного сопротивления $Z(p)$ численно совпадает с оператором выходного напряжения $U_2(p)$ схемы рис. 11.10, в:

$$Z(p) = U_2(p) = J(p) \frac{r_2 \frac{1}{pC}}{r_2 + \frac{1}{pC}} = \frac{r_2}{p(r_2 C p + 1)}.$$

Переходя к оригиналу, с помощью табл. 10.1 найдем переходное сопротивление:

$$z(t) = r_2 \left(1 - e^{-\frac{t}{r_2 C}} \right).$$

11.6. Для цепей рис. 11.11, а и б найти переходные функции $k_1(t)$ и $k_2(t)$ для расчета соответственно токов $i_1(t)$ и $i_2(t)$ и переходное сопротивление $z_2(t)$ для расчета выходного напряжения $u_2(t)$.

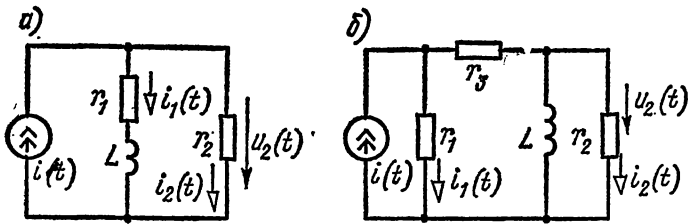


Рис. 11.11

11.7. Цепь, состоящая из последовательно соединенных r и C , включается на прямоугольный импульс напряжения U , действующий в течение времени t_n (рис. 11.12, а). Найти уравнения напряжения на емкости u_C и тока i в зависимости от времени. Построить кривые u_C и i .

Решение. Расчет u_C ведем с помощью интеграла Дюамеля. В рассматриваемом случае функция подводимого напряжения $u_1(t)$ в момент $t = t_n$ претерпевает скачок, поэтому для решения должны быть использованы формулы (11.3а, б и в). Сначала найдем входящие в эти формулы величины:

переходную функцию по напряжению (см. пример Б на стр. 335)

$$k(t) = 1 - e^{-\frac{1}{rC}t}; \quad k(t-\tau) = 1 - e^{-\frac{1}{rC}(t-\tau)}$$

напряжение в начальный момент $u_1(0) = U$; производную от заданной функции по новой переменной τ $u_1'(\tau) = 0$.

В интервале времени $0 \leq t < t_n$ (не включая скачок напряжения) по формуле (11.3а) определяем

$$u_C(t) = u_1(0)k(t) + \int_0^t u_1'(\tau)k(t-\tau)d\tau = U(1 - e^{-\frac{1}{rC}t}) + 0. \quad (1)$$

Ток в этом интервале находим с помощью соотношения

$$i = C \frac{du_C}{dt} = \frac{U}{r} e^{-\frac{1}{rC}t}. \quad (2)$$

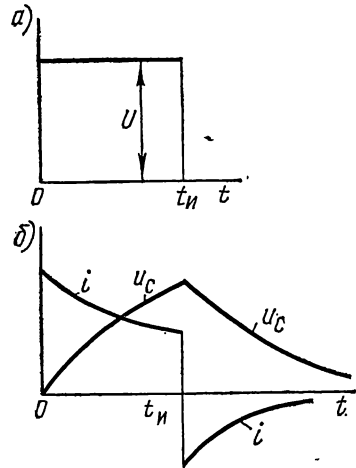


Рис. 11.12

В интервале времени $t > t_1$

$$u_C(t) = u_1(0)k(t) + \int_0^{t_n} u_1'(\tau)k(t-\tau)d\tau - Uk(t-t_n) =$$

$$= U\left(1 - e^{-\frac{1}{rC}t}\right) + 0 - U\left(1 - e^{-\frac{1}{rC}(t-t_n)}\right), \quad (3)$$

$$i = C \frac{du_C}{dt} = \frac{U}{r} \left(e^{-\frac{1}{rC}t} - e^{-\frac{1}{rC}(t-t_n)} \right). \quad (4)$$

По уравнениям (1)—(4) на рис. 11.12, б качественно построены кривые u_C и i .

11.8. Цепь имеет переходную функцию по напряжению $k(t)$. Записать интеграл Дюамеля для выходного напряжения $u_2(t)$ при включении этой цепи на напряжение $u_1(t)$ (рис. 11.13, а, б и в).

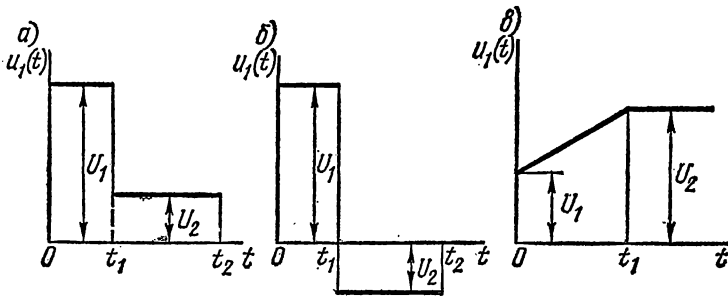


Рис. 11.13

11.9. Импульс в форме полуволны синусоиды (рис. 11.14, а) включается на цепь, содержащую последовательно соединенные $r = 10$ ом и $L = 0,1$ гн.

Уравнение напряжения в интервале времени от 0 до $t_n = T_0/2$ имеет вид $u_1(t) = U_m \sin \omega_0 t$ ($U_m = 10$ мв, $T_0 = 0,02$ сек).

Найти уравнение тока в функции времени.

Решение. Задачу решим с помощью интеграла Дюамеля. В интервале времени $0 \leq t \leq t_n$ имеем:

$$u_1(t) = U_m \sin \omega_0 t; \quad u_1'(\tau) = \omega_0 U_m \cos \omega_0 \tau; \quad u_1(0) = 0; \quad (1)$$

$$y(t) = \frac{1}{r} \left(1 - e^{-\frac{r}{L}t} \right); \quad y(t-\tau) = \frac{1}{r} \left(1 - e^{-\frac{r}{L}(t-\tau)} \right). \quad (2)$$

Ток в этом интервале находим по формуле интеграла Дюамеля [см. формулу (11.3а)]:

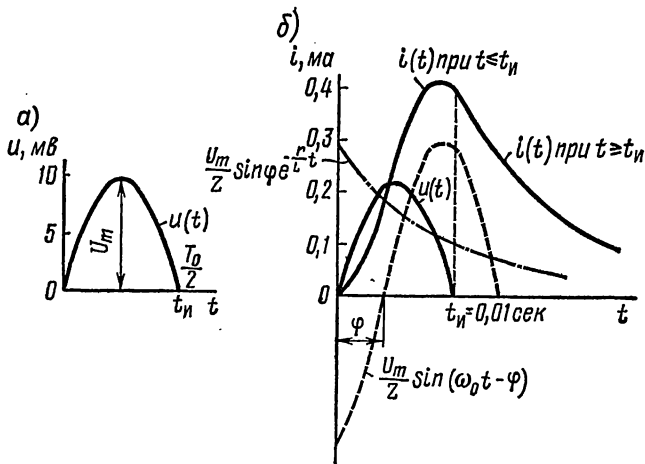


Рис. 11.14

$$\begin{aligned}
 i(t) &= u(0)y(t) + \int_0^t u'_1(\tau)y(t-\tau) d\tau = 0 + \int_0^t \omega_0 U_m \cos \omega_0 \tau \times \\
 &\times \frac{1}{r} \left(1 - e^{-\frac{r}{L}(t-\tau)}\right) d\tau = \frac{\omega_0 U_m}{r} \left\{ \left[\frac{1}{\omega_0} \sin \omega_0 \tau \right]_0^t - \right. \\
 &\quad \left. - e^{-\frac{r}{L}t} \int_0^t e^{\frac{r}{L}\tau} \cos \omega_0 \tau d\tau^* \right\} = \frac{U_m}{r} \sin \omega_0 t - \\
 &\quad - \frac{U_m}{r} \cdot \frac{\omega_0 L e^{-\frac{r}{L}t}}{r^2 + (\omega_0 L)^2} \left[(r \cos \omega_0 t + \omega_0 L \sin \omega_0 t) e^{\frac{r}{L}t} - r \right] = \\
 &= \frac{U_m}{z} \left[\sin(\omega_0 t - \varphi) + \sin \varphi e^{-\frac{r}{L}t} \right], \quad (3)
 \end{aligned}$$

где $z = \sqrt{r^2 + (\omega_0 L)^2}$, $\operatorname{tg} \varphi = \frac{\omega_0 L}{r}$.

Ток в интервале времени $t_n \leq t < \infty$ определяем с помощью интеграла Дюамеля, разбивая интервал интегрирования на два участка: первый участок ($0 \div t_n$), где выполняются условия (1), и второй участок ($t_n \div t$), на котором $u_2(t) = 0$ и $u'_2(\tau) = 0$:

* Этот интеграл является табличным, он определяется по формуле

$$\int e^{ax} \cos bx dx = \frac{a \cos bx + b \sin bx}{a^2 + b^2} e^{ax}.$$

$$\begin{aligned}
 i(t) &= u(0)y(t) + \int_0^{t_n} u'_1(\tau)y(t-\tau)d\tau + \int_{t_n}^t u'_2(\tau)y(t-\tau)d\tau = \\
 &= 0 + \int_0^{t_n} \omega_0 U_m \cos \omega_0 \tau \frac{1}{r} \left(1 - e^{-\frac{r}{L}(t-\tau)}\right) d\tau + 0 = \\
 &= \frac{\omega_0 U_m}{r} \left\{ \frac{1}{\omega_0} \sin \omega_0 t_n - e^{-\frac{r}{L}t} \left[\frac{\frac{r}{L} \cos \omega_0 \tau + \omega_0 \sin \omega_0 \tau}{\left(\frac{r}{L}\right)^2 + \omega_0^2} e^{\frac{r}{L}\tau} \right]_0^{t_n} \right\} = \\
 &= \frac{U_m}{r} \left\{ \sin \omega_0 t_n - \frac{\omega_0 L e^{-\frac{r}{L}t}}{r^2 + (\omega_0 L)^2} \left[(r \cos \omega_0 t_n + \omega_0 L \sin \omega_0 t_n) e^{\frac{r}{L}t_n} - r \right] \right\} = \\
 &= \frac{U_m}{r} \left\{ \sin \omega_0 t_n - \frac{\omega_0 L e^{-\frac{r}{L}t}}{z^2} \left[(r \cos \omega_0 t_n + \omega_0 L \sin \omega_0 t_n \times \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. \times e^{\frac{r}{L}t_n} - r \right] \right\}.
 \end{aligned}$$

Имея в виду, что $\omega_0 t_n = \omega_0 \frac{T_0}{2} = \pi$, и поэтому $\sin \omega_0 t_n = 0$, $\cos \omega_0 t_n = -1$, последнее выражение после некоторых упрощений примет вид

$$i(t) = \frac{U_m \sin \varphi}{z} \left(1 + e^{\frac{r}{L}t_n}\right) e^{-\frac{r}{L}t}. \quad (4)$$

Из выражения (3), полученного для первого интервала времени в момент $t = t_n$, ток

$$i(t_n) = \frac{U_m \sin \varphi}{z} \left(1 + e^{-\frac{r}{L}t_n}\right).$$

То же значение имеет ток, полученный из выражения (4). Это проверка правильности полученного решения.

По уравнениям (3) и (4) на рис. 11.14, б построена (в масштабе) кривая тока.

11.10. Импульс напряжения в форме полуволны синусоиды (см. рис. 11.14, а) включается в цепь, содержащую последовательно соединенные r и C . Найти уравнение тока. Даны: $u = U_m \sin \omega_0 t$, $U_m = 10$ мв, $T_0 = 0,002$ сек, $r = 10$ ом и $C = 50$ мкф.

11.11. С помощью интеграла Дюамеля решить задачи 11.25, 11.27—11.29.

11.12. Цепь, содержащая последовательно соединенные r и C , включается на напряжение, растущее по линейному закону $U \omega_0 t$. Найти уравнения тока и напряжения на конденсаторе.

11.13. Цепь из последовательно соединенных $r = 100 \text{ ом}$ и $C = 25 \text{ мкф}$ включается на импульс напряжения, линейно нарастающий до момента $t_n = 2 \text{ мсек}$ (рис. 11.15). Дано $U_m = 10 \text{ в}$. Найти уравнение напряжения на конденсаторе.

Решение. Переходная функция (см. стр. 335, пример Б):

$$k(t) = 1 - e^{-\frac{t}{\tau C}} = 1 - e^{-400t};$$

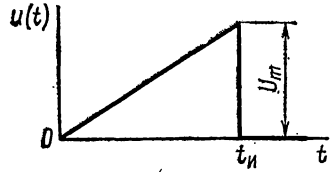


Рис. 11.15

$$k(t - \tau) = 1 - e^{-400(t-\tau)} = 1 - e^{-400t} e^{400\tau}.$$

Для времени $0 \leq t < t_n$ напряжение $u_1(t) = \frac{U_m}{t_n} t = 5 \cdot 10^3 t$,

$$u_1'(t) = \frac{du_1}{dt} = 5 \cdot 10^3 = u_1'(\tau).$$

По формуле интеграла Дюамеля [см. формулу (11.3а)] для интервала времени $0 \leq t < t_n$

$$\begin{aligned} u_C(t) &= u_1(0) k(t) + \int_0^t u_1'(\tau) k(t-\tau) d\tau = 0 + \int_0^t 5 \cdot 10^3 (1 - e^{-400t} e^{400\tau}) d\tau = \\ &= \left[5 \cdot 10^3 \tau - 5 \cdot 10^3 e^{-400t} \frac{e^{400\tau}}{400} \right]_{\tau=0}^{\tau=t} = 5 \cdot 10^3 t - 12,5 + 12,5 e^{-400t} \text{ в.} \end{aligned}$$

Для интервала времени $t > t_n$ следует учесть скачок входного напряжения в момент времени t_n (спад напряжения от U_m до 0). Согласно формуле (11.3б) имеем [учитывая, что в рассматриваемом интервале времени $u_1(t) = 0$, $u_1'(t) = u_1'(\tau) = 0$]

$$\begin{aligned} u_C(t) &= u_1(0) k(t) + \int_0^{t_n} u_1'(\tau) k(t-\tau) d\tau - U_m k(t-t_n) + \\ &+ \int_{t_n}^t u_1'(\tau) k(t-\tau) d\tau = 0 + \int_0^{t_n} 5 \cdot 10^3 (1 - e^{-400t} \cdot e^{400\tau}) d\tau - \\ &- 10 (1 - e^{-400(t-t_n)}) + 0 = \int_0^{t_n} 5 \cdot 10^3 (1 - e^{-400t} e^{400\tau}) d\tau + \int_{t_n}^t 0 \cdot d\tau - \\ &- U_m (1 - e^{-400(t-t_n)}) = \left[5 \cdot 10^3 \tau - 5 \cdot 10^3 e^{-400t} \frac{e^{400\tau}}{400} \right]_{\tau=0}^{\tau=t_n} - \\ &- 10 (1 - e^{-400(t-t_n)}) = 5 \cdot 10^3 t_n - 12,5 e^{-400(t-t_n)} + 12,5 e^{-400t} - 10 + \\ &+ 10 e^{-400(t-t_n)} = (5 \cdot 10^3 t_n - 10 - 2,5 e^{-400(t-t_n)} + 12,5 e^{-400t}) \text{ в.} \end{aligned}$$

Подставляя значение $t_n = 2 \cdot 10^{-3}$ сек, находим (для $t \geq t_n$)

$$u_C(t) = (-2,5e^{400 \cdot 2 \cdot 10^{-3}} + 12,5) e^{-400t} = 6,94e^{-400t} \text{ в.}$$

11.14. Импульс напряжения, приведенный в предыдущей задаче ($U_m = 10$ в, $t_n = 2$ мсек) подается на цепь из последовательно соединенных $r = 100$ ом и $L = 0,2$ гн. Найти уравнение тока.

11.15. На вход цепи рис. 11.16, а подается напряжение $u_1(t)$, имеющее форму, показанную на рис. 11.16, б. Найти уравнение напряжения $u_2(t)$ на ее выходе, если $r = 1$ ком, $C = 1$ мкф, $U = 100$ в, и $t_1 = 4$ мсек.

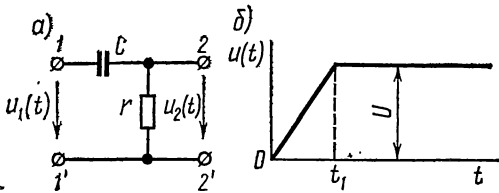


Рис. 11.16

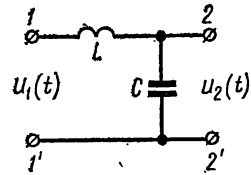


Рис. 11.17

11.16. Найти уравнение выходного напряжения $u_2(t)$ (рис. 11.17), если на вход подается линейно растущее напряжение $u_1(t) = U \omega_0 t$.

Б. Импульсные характеристики. Расчет переходных процессов при импульсных воздействиях

11.17. Рассчитать импульсные характеристики цепи рис. 11.6 при воздействии на вход цепи источника напряжения, полагая, что реакцией является: а) ток в неразветвленной части цепи; б) напряжение на сопротивлении.

Решение. Переходные характеристики цепи были определены в задаче 11.1:

$$y(t) = (1,67 + 0,83e^{-750t}) 10^{-4} \text{ с.м.};$$

$$k(t) = 0,667 + 0,333e^{-750t}.$$

Для определения импульсных характеристик цепи используем формулу (11.4в):

$$y_\delta(t) = y(0)\delta(t) + \frac{dy(t)}{dt} = 10^{-4}(1,67 + 0,83)\delta(t) -$$

$$- 750 \cdot 10^{-4} \cdot 0,83e^{-750t} = 2,5 \cdot 10^{-4}\delta(t) - 0,062e^{-750t} \text{ (с.м.} \cdot \text{сек}^{-1}\text{)},$$

$$k_\delta(t) = k(0)\delta(t) + \frac{dk(t)}{dt} = (0,667 + 0,333)\delta(t) - 750 \cdot 0,333e^{-750t} =$$

$$= \delta(t) - 250e^{-750t}.$$

11.18. Определить в буквенном виде выражение входной импульсной проводимости цепи рис. 11.7 и импульсную характеристику выходного напряжения, считая, что на входе цепи действует источник напряжения.

Решение. Используем операторный метод. Изображение импульсной проводимости неразветвленной цепи, учитывая, что при единичном импульсном воздействии напряжения $U_1(p) = 1$, имеет вид

$$\begin{aligned} y_{\delta}(p) &= \frac{U_1(p)}{Z(p)} = \frac{1}{Z(p)} = \frac{1}{\frac{r_1 p L}{r_1 + p L} + r_2} = \frac{r^1 + p L}{p L (r_1 + r_2) + r_1 r_2} = \\ &= \frac{r_1}{(r_1 + r_2)} \cdot \frac{1}{p + \frac{r_1 r_2}{L (r_1 + r_2)}} + \frac{1}{r_1 + r_2} \cdot \frac{p}{p + \frac{r_1 r_2}{L (r_1 + r_2)}} = \\ &= \frac{r_1}{L (r_1 + r_2)} \cdot \frac{1}{p + \frac{r_1 r_2}{L (r_1 + r_2)}} + \frac{1}{r_1 + r_2} \left[1 - \frac{\frac{r_1 r_2}{L (r_1 + r_2)}}{p + \frac{r_1 r_2}{L (r_1 + r_2)}} \right] = \\ &= \frac{1}{r_1 + r_2} + \left[\frac{r_1}{L (r_1 + r_2)} - \frac{r_1 r_2}{L (r_1 + r_2)^2} \right] \frac{1}{p + \frac{r_1 r_2}{L (r_1 + r_2)}} = \\ &= \frac{1}{r_1 + r_2} + \frac{r_1^2}{L (r_1 + r_2)^2} \cdot \frac{1}{p + \frac{r_1 r_2}{L (r_1 + r_2)}}. \end{aligned}$$

Переходим к оригиналу с учетом соответствий пп. 1 и 5 табл. 10.1:

$$y_{\delta}(t) = \frac{1}{r_1 + r_2} \delta(t) + \frac{r_1^2}{L (r_1 + r_2)^2} e^{-\frac{r_1 r_2}{L (r_1 + r_2)} t}.$$

Изображение импульсной характеристики выходного напряжения, учитывая, что $U_1(p) = 1$, имеет вид

$$k_{\delta}(p) = \frac{U_1(p)}{Z(p)} r_2 = \frac{r_2}{Z(p)} = \frac{r_2}{r_1 + r_2} + \frac{r_1^2 r_2}{L (r_1 + r_2)^2} \cdot \frac{1}{p + \frac{r_1 r_2}{L (r_1 + r_2)}},$$

а ее оригинал (см. пп. 1 и 5 табл. 10.1)

$$k_{\delta}(t) = \frac{r_2}{r_1 + r_2} \delta(t) + \frac{r_1^2 r_2}{L (r_1 + r_2)^2} e^{-\frac{r_1 r_2}{L (r_1 + r_2)} t}.$$

* При расчете импульсных характеристик выражение $\frac{p}{p+a}$ для выделения дельта-функции заменяется разностью $\left(1 - \frac{a}{p+a}\right)$.

11.19. На вход цепи рис. 11.11, б подан импульс тока $i(t) = J e^{-at}$. Найти напряжение $u_2(t)$, используя импульсную характеристику цепи. Принять, что $r_1 = r_2 = r_3 = r$.

Решение. Найдем импульсную реакцию выходного напряжения $z\delta(t)$. Для этого составим формулу изображения импульсной характеристики этого напряжения $U_2(p)$. Чтобы ее получить, запишем сначала операторное выражение тока $I_3(p)$, проходящего через r_3 :

$$I_3(p) = J(p) \frac{r_1}{r_1 + r_3 + \frac{r_2 p L}{r_2 + p L}}.$$

Операторное выражение выходного напряжения

$$U_2(p) = I_3(p) \frac{r_2 p L}{r_2 + p L} = J(p) \frac{r_1}{r_1 + r_3 + \frac{r_2 p L}{r_2 + p L}} \cdot \frac{r_2 p L}{r_2 + p L}.$$

Учитывая, что при единичном импульсном воздействии тока $J(p) = 1$ и что $r_1 = r_2 = r_3 = r$, получим

$$\begin{aligned} U_2(p) = z_0(p) &= \frac{r_2^2 p L}{2r^2 + 3rpL} = \frac{r}{3} \cdot \frac{p}{p + \frac{2r}{3L}} = \\ &= \frac{r}{3} \left(1 - \frac{\frac{2r}{3L}}{p + \frac{2r}{3L}} \right) = \frac{r}{3} - \frac{2r^2}{9L} \cdot \frac{1}{p + \frac{2r}{3L}}. \end{aligned}$$

Переходим к оригиналу:

$$z_0(t) = \frac{r}{3} \delta(t) - \frac{2r^2}{9L} e^{-\frac{2r}{3L}t} = z(0) \delta(t) + z'(t).$$

Для определения $u_2(t)$ используем формулу (11.4в)

$$\begin{aligned} u_2(t) &= i(t) z(0) + \int_0^t i(\tau) z'(t - \tau) d\tau = \\ &= J \frac{r}{3} e^{-at} - \frac{2r^2}{9L} J \int_0^t e^{-a\tau} e^{-\frac{2r}{3L}(t-\tau)} d\tau = \\ &= J \frac{r}{3} e^{-at} - \frac{2r^2}{9L} J e^{-\frac{2r}{3L}t} \int_0^t e^{-\left(a - \frac{2r}{3L}\right)\tau} d\tau = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= J \frac{r}{3} e^{-at} + \frac{2r^2}{9L} J e^{-\frac{2r}{3L}t} \frac{1}{a - \frac{2r}{3L}} \left[e^{-\left(a - \frac{2r}{3L}\right)\tau} \right]_{\tau=0}^{\tau=t} = \\
&= J \frac{r}{3} e^{-at} + \frac{2r^2}{9L} \frac{J}{a - \frac{2r}{3L}} \left(e^{-at} - e^{-\frac{2r}{3L}t} \right) = \\
&= J \frac{r}{3} \frac{a}{a - \frac{2r}{3L}} e^{-at} - J \frac{2r^2}{9aL - 6} e^{-\frac{2r}{3L}t}.
\end{aligned}$$

11.20. На вход цепи рис. 11.7 подан импульс напряжения $u_1(t) = U_0 e^{-at}$. Найти напряжение $u_2(t)$, используя импульсную характеристику цепи $k_0(t)$. Вычислить импульсную проводимость для расчета тока, протекающего через: а) сопротивление r_1 , б) индуктивность L . Начертить качественно их временные диаграммы.

С помощью найденных в пп. а) и б) импульсных характеристик определить токи, протекающие через r_1 и L при воздействии заданного импульса $u_1(t)$.

11.21. На вход цепи рис. 11.10, а подан импульс тока $i(t) = J e^{-at}$. Найти импульсные характеристики для расчета: а) выходного напряжения $u_2(t)$; б) тока, протекающего через r_1 ; в) тока, протекающего через емкость.

В. Дифференцирующие и интегрирующие цепи

11.22. Цепь (см. рис. 11.3, а), постоянная времени которой τ включается на прямоугольный импульс напряжения U длительностью t_n . Начертить графики зависимости выходного напряжения от времени для различных отношений τ/t_n , равных: а) ∞ ; б) 5; в) 1; г) 0,025; д) 0,05. Какое из этих отношений соответствует наиболее качественному дифференцированию?

Р е ш е н и е. В задаче 11.7 было получено выражение для i . Выходное напряжение (на сопротивлении) будет определяться выражениями:

$$\begin{aligned}
u_2 &= ir = U e^{-\frac{1}{\tau C}t} \quad \text{при } 0 \leq t \leq t_n; \\
u_2 &= ir = U \left(e^{-\frac{1}{\tau C}t} - e^{-\frac{1}{\tau C}(t-t_n)} \right) \quad \text{при } t > t_n.
\end{aligned}$$

По этим выражениям на рис. 11.18, а — д построены кривые $u_2(t)$. Согласно формуле (11.6) приходим к заключению, что наилучшие условия дифференцирования будут при $\tau/t_n = 0,05$. Необходимо от-

метить, что чем меньше отношение τ/t_n , тем короче импульсы на выходе цепи. При $\tau/t_n \gg 1$ цепь является переходной и форма импульса на выходе остается почти такой же, как и на входе.

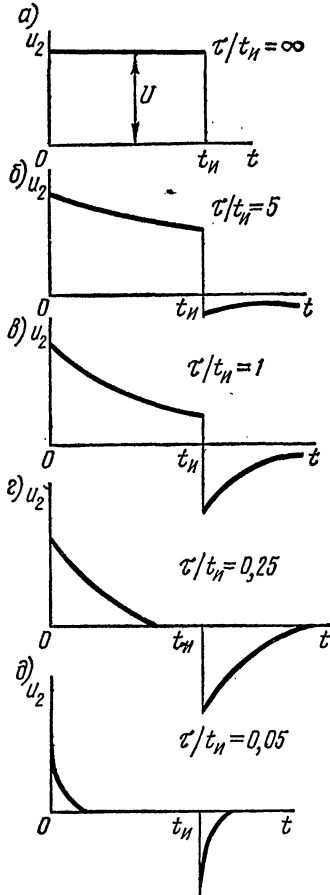


Рис. 11.18

11.23. Выполняются ли условия качественного дифференцирования в схеме рис. 11.3, б с $r = 10 \text{ ком}$ и $C = 2000 \text{ нф}$ в случаях подачи на вход синусоидального напряжения, имеющего угловую частоту: 1) $\omega = 2 \cdot 10^3 \text{ сек}^{-1}$, 2) $\omega = 10^5 \text{ сек}^{-1}$?

То же в схеме рис. 11.3, б, если $r = 10 \text{ ом}$, $L = 0,2 \text{ мгн}$ при тех же частотах.

11.24. На вход цепи, состоящей из последовательно соединенных $r = 25 \text{ ком}$ и $C = 100 \text{ нф}$, подается прямоугольный импульс напряжения длительностью t_n . В каком из указанных ниже трех случаев цепь будет дифференцирующей, интегрирующей, переходной: 1) $t_n = 15 \text{ мксек}$, 2) $t_n = 1 \text{ мксек}$, 3) $t_n = 4 \text{ мксек}$?

З а м е ч а н и е. Практически цепь считают дифференцирующей, если $t_n > (3 \div 5) \tau$, интегрирующей при $t_n < (3 \div 5) \tau$.

11.25. Выполняются ли условия интегрирования: а) для цепи рис. 11.4, а с $r = 20 \text{ ком}$ и $C = 1000 \text{ нф}$ при длительности входного импульса напряжения $t_n = 100 \text{ мксек}$; б) для цепи рис. 11.4, б с $r = 10 \text{ ом}$, $L = 0,5 \text{ мгн}$, $t_n = 10 \text{ мксек}$?

Г. Частотные характеристики цепей.

Спектры непериодических сигналов (интеграл Фурье).

Прохождение непериодических сигналов через линейные цепи

11.26. Для цепи рис. 11.6 вычислить комплексную функцию передачи по напряжению $K(j\omega)$.

Р е ш е н и е. Комплексная функция передачи по напряжению при синусоидальном воздействии $u_1 = \sqrt{2}U_1 \sin \omega t$ представляет собой отношение действующих значений комплексного напряжения $U_2(j\omega)$ на r_2 к приложенному, которое может быть рассчитано символическим методом:

$$K(j\omega) = \frac{U_2(j\omega)}{U_1(j\omega)} = \frac{r_2 I_2(j\omega)}{U_1(j\omega)}.$$

И так как

$$I_2(j\omega) = \frac{U_1(j\omega)}{\frac{r_1 \frac{1}{j\omega C}}{r_1 + \frac{1}{j\omega C}} + r_2} = \dot{U}_1(j\omega) \frac{1 + j\omega Cr_1}{r_1 + r_2 + j\omega Cr_1 r_2}.$$

то

$$K(j\omega) = \frac{(1 + j\omega Cr_1) r_2}{r_1 + r_2 + j\omega Cr_1 r_2}.$$

11.27. Найти комплексный коэффициент передачи напряжения $K(j\omega)$ для схем рис. 11.7 и 11.8 и комплексную проводимость $Y(j\omega)$ для расчета входного тока.

11.28. Для схемы рис. 11.10, а вычислить комплексное сопротивление передачи $Z(j\omega)$ для расчета выходного напряжения $U_2(j\omega)$.

Решение. Комплексное сопротивление передачи $Z(j\omega)$ равно отношению выходного комплексного напряжения $U_2(j\omega)$ к входному комплексному току $I(j\omega)$:

$$Z(j\omega) = \frac{U_2(j\omega)}{I(j\omega)} = \frac{r_2 \frac{1}{j\omega C}}{r_2 + \frac{1}{j\omega C}} = \frac{r_2}{1 + j\omega Cr_2}$$

11.29. В цепи рис. 11.11 действует источник синусоидального тока. Рассчитать комплексные коэффициенты передачи тока $K_{1I}(j\omega)$ и $K_{2I}(j\omega)$ для расчета токов $I_1(j\omega)$ и $I_2(j\omega)$ и сопротивление передачи $Z_2(j\omega)$ для расчета напряжения на параллельных ветвях.

11.30. В цепи рис. 11.9 $r_1 = 1$ ком, $r_2 = 200$ ом и $C = 40$ мкф. Определить, при какой частоте модуль комплексной проводимости, определяющий ток i_3 , проходящий через конденсатор (взаимной комплексной проводимости ветвей источника и конденсатора), в $\sqrt{2}$ меньше своего максимального значения.

11.31. Рассчитать спектральную плотность прямоугольного импульса тока $i(t)$, показанного на рис. 11.19, а.

Решение. Расчет проведем двумя способами.

1. По формуле Фурье (11.9):

$$\begin{aligned} I(j\omega) &= |I(j\omega)| e^{j\psi(\omega)} = \int_{-\infty}^{\infty} i(t) e^{-j\omega t} dt = \int_0^{t_H} I_m e^{-j\omega t} dt = \\ &= \frac{I_m}{-j\omega} (e^{-j\omega t_H} - 1) = \frac{2I_m}{\omega} e^{-j\frac{\omega t_H}{2}} \left(\frac{e^{j\frac{\omega t_H}{2}} - e^{-j\frac{\omega t_H}{2}}}{2j} \right) = \\ &= \frac{2I_m}{\omega} \sin \frac{\omega t_H}{2} e^{-j\frac{\omega t_H}{2}} = I_m t_H \frac{\sin \frac{\omega t_H}{2}}{\frac{\omega t_H}{2}} e^{-j\frac{\omega t_H}{2}}. \end{aligned}$$

Здесь

$$|I(j\omega)| = I_m t_n \frac{\sin \frac{\omega t_n}{2}}{\frac{\omega t_n}{2}}; \psi(\omega) = -\frac{\omega t_n}{2}.$$

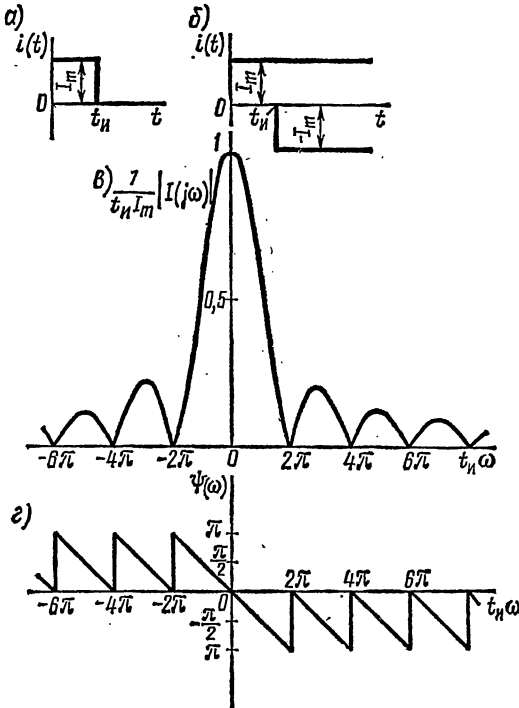


Рис. 11.19

2. На рис. 11.19, б показано разложение импульса тока на две ступенчатые составляющие тока с амплитудами I_m и $-I_m$. Изображение по Лапласу первой составляющей (см. табл. 10.1 п. 2) имеет вид

$$I_1(p) = \frac{I_m}{p},$$

а второй составляющей с учетом сдвига вправо на t_n (по теореме сдвига) —

$$I_2(p) = -\frac{I_m}{p} e^{-pt_n}.$$

Изображение заданного импульса тока равно сумме указанных изображений его составляющих:

$$I(p) = I_1(p) + I_2(p) = \frac{I_m}{p} (1 - e^{-pt_n}).$$

Спектральная плотность импульса тока получится,

если в найденном изображении $I(p)$ заменить p на $j\omega$:

$$I(j\omega) = \frac{I_m}{j\omega} (1 - e^{-j\omega t_n}) = I_m t_n \frac{\sin \frac{\omega t_n}{2}}{\frac{\omega t_n}{2}} \cdot e^{-j\frac{\omega t_n}{2}} = |I(j\omega)| e^{\psi(\omega)}.$$

Для построения АЧХ и ФЧХ составим табл. 11.3.

На рис. 11.19, б построен график отношения амплитудного спектра $|I(j\omega)|$ к величине $I(j\omega)|_{\omega=0} = I_m t_n$, а на рис. 11.19, в — график фазового спектра. При построении все ординаты взяты положительными, а в тех точках, где амплитуды отрицательны, знак минус отнесен к фазе, которая в связи с этим уменьшена на π .

Таблица 11.3

ω	$\frac{\omega t_n}{2}$	$\frac{\sin \frac{\omega t_n}{2}}{\frac{\omega t_n}{2}}$	$\psi(\omega)$
0	0	1	0
$\pm \frac{\pi}{2t_n}$	$\pm \frac{\pi}{4}$	$\frac{2\sqrt{2}}{\pi}$	$\mp \frac{\pi}{4}$
$\pm 2 \frac{\pi}{2t_n}$	$\pm \frac{\pi}{2}$	$\frac{2}{\pi}$	$\mp \frac{\pi}{2}$
$\pm 3 \frac{\pi}{2t_n}$	$\pm \frac{3\pi}{4}$	$\frac{2\sqrt{2}}{3\pi}$	$\mp \frac{3\pi}{4}$
$\pm 4 \frac{\pi}{2t_n}$	$\pm \pi$	0	$\mp \pi$
$\pm 6 \frac{\pi}{2t_n}$	$\pm \frac{3\pi}{2}$	$-\frac{2}{3\pi}$	$\mp \frac{3\pi}{2}$
$\pm 8 \frac{\pi}{2t_n}$	$\pm 2\pi$	0	$\mp 2\pi$

11.32. Рассчитать спектральную плотность входного напряжения прямоугольного импульса $u(t)$, график которого показан на рис. 11.20. Вычислить энергетический спектр входного напряжения.

11.33. Определить спектр полуволны синусоиды напряжения (рис. 11.21, а), уравнение которой $u = U_m \sin \omega_0 t$ при $0 \leq t \leq t_n$ и $u = 0$ при $0 \geq t \geq -t_n$.

Решение. Решим задачу двумя способами.

1. По формуле Фурье (11.9):

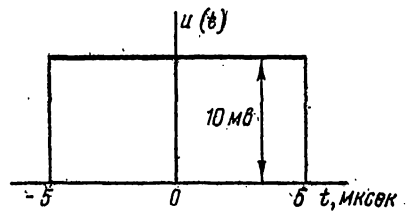


Рис. 11.20

$$\begin{aligned}
 U(j\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} u(t) e^{-j\omega t} dt = \int_0^{t_H} U_m \sin \omega_0 t e^{-j\omega t} dt = \\
 &= U_m \left| \frac{-j\omega \sin \omega_0 t - \omega_0 \cos \omega_0 t}{(j\omega)^2 + \omega_0^2} e^{-j\omega t} \right|_0^{t_H} = \\
 &= \frac{U_m}{\omega_0^2 - \omega^2} [-j\omega (\sin \omega_0 t_H e^{-j\omega t_H} - 0) - \omega_0 (\cos \omega_0 t_H \times \\
 &\times e^{-j\omega t_H} - 1)] = \frac{U_m \omega_0}{\omega_0^2 - \omega^2} (1 + e^{-j\omega t_H}) = \frac{2U_m \omega_0 e^{-j\frac{\omega t_H}{2}}}{\omega_0^2 - \omega^2} \times \\
 &\times \frac{e^{j\frac{\omega t_H}{2}} + e^{-j\frac{\omega t_H}{2}}}{2} = \frac{2U_m \omega_0 \cos \frac{\omega t_H}{2}}{\omega_0^2 - \omega^2} e^{-j\frac{\omega t_H}{2}} = \\
 &= \frac{U_m \frac{\pi t_H}{2} \cos \frac{\omega t_H}{2}}{\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 - \left(\frac{\omega t_H}{2}\right)^2} e^{-j\frac{\omega t_H}{2}}.
 \end{aligned}$$

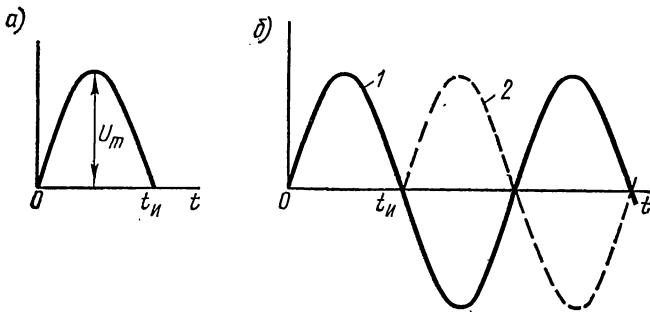


Рис. 11.21

2. Заданная полуволна синусоиды может быть рассмотрена как результат наложения двух кривых (рис. 11.21, б): 1 — синусоиды, начинающейся в момент $t = 0$ и действующей неограниченно долго, и 2 — синусоиды, начинающейся в момент t_H и также действующей неограниченно долго. Изображение по Лапласу кривой 1 (см. табл. 10.1) имеет вид

$$\sin \omega_0 t = \frac{\omega_0}{\omega_0^2 + p^2},$$

* Это табличный интеграл:

$$\int e^{ax} \sin bx dx = \frac{a \sin bx - b \cos bx}{a^2 + b^2} e^{ax}.$$

а кривой 2 с учетом ее сдвига на t_n —

$$\sin \omega_0(t - t_n) = \frac{\omega_0}{\omega_0^2 + p^2} e^{-pt_n}$$

Изображение заданной кривой равно сумме указанных изображений:

$$U(p) = \frac{\omega_0}{\omega_0^2 + p^2} + \frac{\omega_0}{\omega_0^2 + p^2} e^{-pt_n}.$$

Заменив в полученном выражении p на $j\omega$, получим искомую спектральную функцию полуволны синусоиды

$$U(j\omega) = \frac{\omega_0}{\omega_0^2 - \omega^2} (1 + e^{-j\omega t_n}),$$

которая после преобразования дает тот же результат, что и ранее.

11.34. Рассчитать спектральную плотность входного напряжения (рис. 11.22), уравнение которого

$$u(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } t < 0, \\ Ue^{-\alpha t} & \text{при } 0 < t \leq t_n, \\ 0 & \text{при } t > t_n. \end{cases}$$

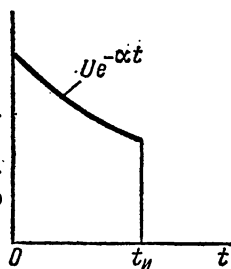


Рис. 11.22

Построить графики амплитудно-фазовой спектральной характеристики входного напряжения, приняв $\alpha = \frac{1}{2t_n}$.

11.35. Рассчитать спектральную плотность напряжения телеграфной посылки $u(t) = 50 \sin \omega_0 t$ при $0 \leq \omega_0 t \leq 4\pi$ и $u(t) = 0$ при $\omega_0 t \leq 0$ и $\omega_0 t \geq 4\pi$ (рис. 11.23), $\omega_0 = 2 \cdot 10^5$ рад/сек.

Построить графики амплитудно-фазовой спектральной характеристики.

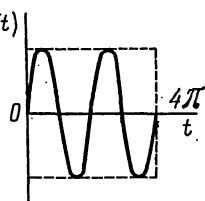


Рис. 11.23

У к а з а н и е. При решении удобно рассматривать заданный импульс в виде синусоидального напряжения, начинающегося в момент $t = 0$, и накладывающегося на него такого же отрицательного напряжения, но начинающегося в момент, равный $4\pi/\omega_0$, для чего использовать теорему сдвига.

11.36. Рассчитать спектральные плотности двух импульсов $u_1(t)$ и $u_2(t)$, составленных из отрезков синусоиды и показанных на рис. 11.24, а и б.

11.37. Вычислить комплексный коэффициент передачи $K(j\omega)$ идеальной линии задержки, обеспечивающей сдвиг входного импульса на время задержки $\tau = 0,5$ мксек. Амплитуда входного импульса уменьшается при прохождении линии задержки в 100 раз (на 40 дб).

Решение. Обозначим функцию входного импульса $f_1(t)$. По условию задачи функция выходного импульса $f_2(t)$ удовлетворяет уравнению

$$f_2(t) = \frac{1}{100} f_1(t - \tau).$$

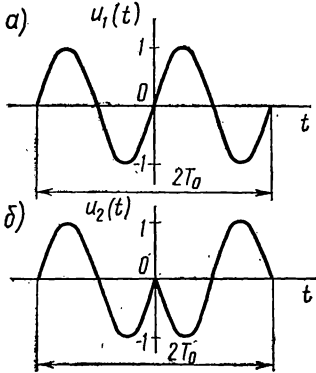


Рис. 11.24

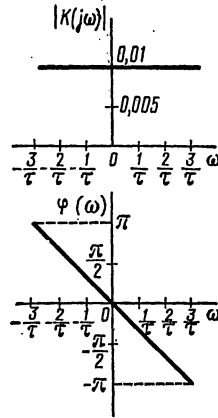


Рис. 11.25

Если $F_1(j\omega)$ — спектральная плотность входного импульса, то спектральная плотность выходного импульса

$$F_2(j\omega) = \frac{1}{100} e^{-j\omega\tau} F_1(j\omega).$$

Таким образом, комплексный коэффициент передачи исследуемой линии задержки

$$K(j\omega) = |K(j\omega)| e^{j\varphi(\omega)} = \frac{F_2(j\omega)}{F_1(j\omega)} = \frac{e^{-j\omega\tau}}{100} = \frac{e^{-j0,5 \cdot 10^{-6}\omega}}{100}.$$

Модуль и фазовый угол коэффициента передачи построены на графиках рис. 11.25.

11.38. Определить комплексный коэффициент передачи идеального дифференцирующего фильтра, осуществляющего операцию

$$u_2(t) = 0,1 \frac{du_1(t)}{dt}$$

[где $u_1(t)$ — функция входного напряжения; $u_2(t)$ — функция выходного напряжения].

Указание. Дифференцированию оригинала соответствует умножение изображения на параметр $p \Rightarrow j\omega$.

11.39. Вычислить комплексный коэффициент передачи операционного фильтра, осуществляющего преобразование входного напряжения $u_1(t)$, по формуле

$$u_2(t) = au_1(t) + b \frac{du_1(t)}{dt} + c \int_{-\infty}^t u_1(t) dt.$$

У к а з а н и е. Интегрированию оригинала соответствует деление изображения на параметр $p = j\omega$.

11.40. При воздействии на схему ступенчатого напряжения $u_1 = 0$ при $t < 0$ и $u_1 = 100$ в при $t \geq 0$ выходное напряжение изменяется по закону $u_2(t) = 50(1 - e^{-500t})$ в. Вычислить комплексный коэффициент передачи.

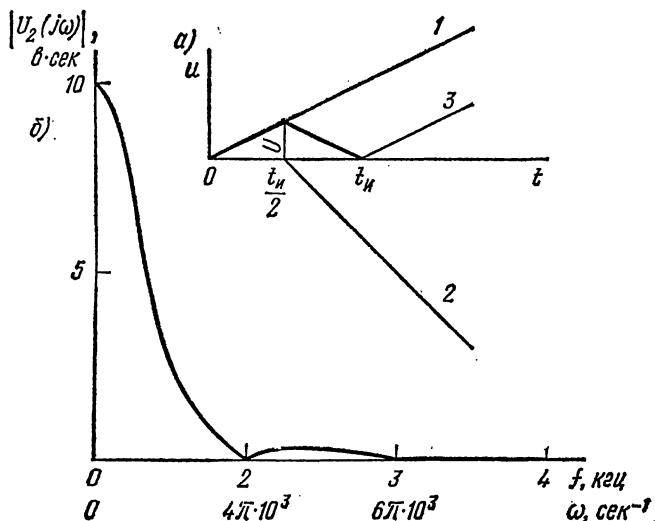


Рис. 11.26

11.41. На вход r, C -цепи подается импульс напряжения в виде равнобедренного треугольника (рис. 11.26, а) продолжительностью t_n , имеющий амплитуду U . Найти спектральную функцию выходного напряжения $U_2(j\omega)$ на емкости. Построить график модуля спектральной функции $|U_2(j\omega)|$, если $U = 20$ в, $r = 100$ ом, $C = 1$ мкф, $t_n = 1$ мсек.

Р е ш е н и е. Спектральная функция выходного напряжения — реакция цепи (см. п. 7 основных положений и соотношений)

$$U_2(j\omega) = \frac{U_1(j\omega)}{Z(j\omega)} \cdot \frac{1}{j\omega C} = \frac{U_1(j\omega)}{1 + j\omega Cr}, \quad (1)$$

где $U_1(j\omega)$ — спектральная функция заданного напряжения (воздействия);

$Z(j\omega) = r + \frac{1}{j\omega C}$ — сопротивление цепи в спектральной форме.

В целях упражнения $U_1(j\omega)$ найдем двумя способами.

Способ 1. Найдем спектральную функцию входного напряжения путем использования формулы Фурье (11.5). Для этого запишем уравнение импульса:

$$u(t) = \frac{2U}{t_n} t \quad \text{при } 0 \leq t \leq \frac{t_n}{2};$$

$$u(t) = -\frac{2U}{t_n} t + 2U \quad \text{при } \frac{t_n}{2} \leq t \leq t_n;$$

$$u(t) = 0 \quad \text{при } t \geq t_n.$$

Подставляя $u(t)$ в (11.5) и учитывая, что функция входного напряжения в пределах от $-\infty$ до 0 и от t_n до $+\infty$ равняется нулю, будем иметь

$$U_1(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} u(t) e^{-j\omega t} dt = \int_0^{\frac{t_n}{2}} \frac{2U}{t_n} t e^{-j\omega t} dt +$$

$$+ \int_{\frac{t_n}{2}}^{t_n} \left(-\frac{2U}{t_n} t + 2U \right) e^{-j\omega t} dt.$$

Проинтегрировав, получим

$$U_1(j\omega) = \frac{Ut_n}{2} \left(\frac{\sin \frac{\omega t_n}{4}}{\frac{\omega t_n}{4}} \right)^2 e^{-j\frac{\omega t_n}{2}}. \quad (2)$$

Подставляя формулу (2) в (1), найдем

$$U_2(j\omega) = \frac{Ut_n}{2} \left(\frac{\sin \frac{\omega t_n}{4}}{\frac{\omega t_n}{4}} \right)^2 \frac{e^{-j\frac{\omega t_n}{2}}}{1 + j\omega Cr} =$$

$$= \frac{Ut_n \left(\frac{\sin \frac{\omega t_n}{4}}{\frac{\omega t_n}{4}} \right)^2}{2\sqrt{1 + (\omega Cr)^2}} e^{-j\left(\frac{\omega t_n}{2} + \psi(\omega)\right)},$$

где

$$\operatorname{tg} \psi(\omega) = \omega Cr, \quad \psi(\omega) = \operatorname{arctg} \omega Cr.$$

По этому уравнению на рис. 11.26, б построен график модуля спектральной функции для положительных частот. Такой же симметричный относительно вертикальной оси, проходящей через начало координат, должен быть построен график для отрицательных частот. В точке $\omega=0$ модуль равен 10 в/гц . Модуль равняется нулю в точках $\frac{\omega t_n}{4} = k\pi$ (k — целое положительное число). Первый нуль ($k=1$) будет в точке $\omega =$

$$= \frac{4\pi}{t_n} = 4\pi \cdot 10^3 \text{ сек}^{-1}. \text{ Это соответствует частоте } f = \frac{\omega}{2\pi} = 2000 \text{ гц} = 2 \text{ кгц}.$$

Способ 2. Заданное напряжение может быть представлено в виде наложения трех прямых (см. рис. 11.26, а): 1 — начинается в момент $t = 0$ и действует неограниченно долго; 2 — имеет отрицательный наклон, крутизну, в два раза большую крутизны прямой 1, и начинается в момент $t_n/2$; 3 — имеет такой же наклон, как и прямая 1, но начинается в момент t_n (прямые 2 и 3 также действуют неограниченно долго).

Уравнение напряжения (прямая 1) имеет вид

$$u(t) = \frac{2U}{t_n} t.$$

Соответствующее ему изображение по Лапласу (см. п. 3, табл. 10.1) имеет вид

$$U(p) = \frac{2U}{t_n p^2}.$$

Изображения по Лапласу прямых 2 и 3 с учетом теоремы сдвига будут иметь вид:

$$U_2(p) = -\frac{4U}{t_n p^2} e^{-\frac{pt_n}{2}}; \quad U_3(p) = \frac{2U}{t_n p^2} e^{-pt_n}.$$

Изображение заданного импульса равно сумме трех полученных изображений:

$$U(p) = U_1(p) + U_2(p) + U_3(p) = \frac{2U}{t_n p^2} \left(1 - 2e^{-\frac{pt_n}{2}} + e^{-pt_n} \right).$$

Заменив в этом выражении p на $j\omega$, получим спектральную плотность суммарного импульса входного напряжения

$$\begin{aligned} U_1(j\omega) &= -\frac{2U}{t_n \omega^2} + \frac{4U}{t_n \omega^2} e^{-j\frac{\omega t_n}{2}} - \frac{2U}{t_n \omega^2} e^{-j\omega t_n} = \\ &= \frac{2U}{t_n \omega^2} \left[2e^{-j\frac{\omega t_n}{2}} - (1 + \cos \omega t_n - j \sin \omega t_n) \right] = \\ &= \frac{2U}{t_n \omega^2} \left[2e^{-j\frac{\omega t_n}{2}} - \left(2 \cos^2 \frac{\omega t_n}{2} - j 2 \sin \frac{\omega t_n}{2} \cos \frac{\omega t_n}{2} \right) \right] = \\ &= \frac{4U}{t_n \omega^2} \left(1 - \cos \frac{\omega t_n}{2} \right) e^{-j\frac{\omega t_n}{2}} = \frac{U t_n}{2} \times \\ &\quad \times \left(\frac{\sin \frac{\omega t_n}{4}}{\frac{\omega t_n}{4}} \right)^2 e^{-j\frac{\omega t_n}{2}}. \end{aligned}$$

Получен тот же результат, что и при решении задачи способом 1.

11.42. Найти спектральные функции напряжений, изображенных на рис. 11.27, а и б, и построить их амплитудно-частотные характеристики.

11.43. Определить спектральную функцию $U_2(j\omega)$ выходного напряжения, если на вход L, C -цепи (см. рис. 11.17) подается линейно растущее напряжение $u_1(t) = U_0 t$.

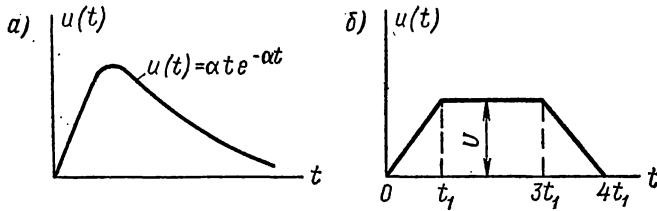


Рис. 11.27

11.44. Найти временные функции $u(t)$, соответствующие частотным спектрам $U(j\omega)$:

$$а) U(j\omega) = \frac{U}{j\omega(1 + j\omega Cr)};$$

$$б) U(j\omega) = \frac{Urc}{1 + j\omega Cr};$$

$$в) U(j\omega) = \frac{U}{(\alpha + j\omega)(1 + j\omega Cr)};$$

$$г) U(j\omega) = \frac{1}{j\omega[(j\omega)^2 + \alpha^2]};$$

$$д) U(j\omega) = \frac{1}{j\omega[(j\omega)^2 - \alpha^2]}.$$

Глава двенадцатая
ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ ЦЕПИ
С РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ
(ДЛИННЫЕ ЛИНИИ)

ОСНОВНЫЕ ПОЛОЖЕНИЯ И СООТНОШЕНИЯ

1. **Параметры однородной линии.** Первичными параметрами однородной линии на единицу ее длины являются: r_0 — активное сопротивление, *ом*; L_0 — индуктивность, *гн*; C_0 — емкость, *ф*; g_0 — проводимость изоляции между проводами (утечка), *сим*.

Формулы для расчета первичных параметров длинных линий (воздушных двухпроводных, кабельных и коаксиальных) приведены в приложении 5.

Вторичные параметры однородной линии — Z_B и γ . Волновое сопротивление есть отношение комплексов напряжения и тока в бегущей (например, прямой) волне:

$$Z_B = \frac{\dot{U}_{\text{пр}}}{\dot{I}_{\text{пр}}} = \sqrt{\frac{r_0 + j\omega L_0}{g_0 + j\omega C_0}}. \quad (12.1)$$

Коэффициент распространения характеризует затухание прямой (или обратной) волны и изменение ее фазы на единицу длины линии:

$$\gamma = \sqrt{(r_0 + j\omega L_0)(g_0 + j\omega C_0)} = |\gamma| e^{j\xi} = \alpha + j\beta, \quad (12.2)$$

где $|\gamma|$ — модуль коэффициента распространения;
 ξ — аргумент;

$\alpha = |\gamma| \cos \xi$ — коэффициент затухания;

$\beta = |\gamma| \sin \xi$ — коэффициент фазы.

Коэффициент распространения определяет основные параметры бегущих волн (длину волны λ , фазовую скорость v_ϕ):

$$\lambda = \frac{2\pi}{\beta}; \quad v_\phi = \frac{\lambda}{T} = \frac{\omega}{\beta}. \quad (12.3)$$

Для воздушных линий из медных, бронзовых и алюминиевых проводов имеют место неравенства (особенно при высоких частотах) $\omega L_0 \gg r_0$ и $\omega C_0 \gg g_0$. В этом случае справедливы приближенные выражения:

$$\left. \begin{aligned} Z_B &= \sqrt{\frac{L_0}{C_0}} = z_B; \\ \alpha &= \frac{1}{2} \left(\frac{r_0}{z_B} + g_0 z_B \right); \\ \beta &= \omega \sqrt{L_0 C_0}; \\ v_{\phi} &= 3 \cdot 10^8 \text{ м/сек.} \end{aligned} \right\} (12.4)$$

Примеры приведены в задачах 12.1—12.4.

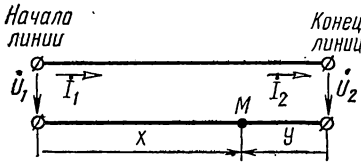


Рис. 12.1

2. Уравнение линии в виде прямых и обратных волн. Выражения для определения комплексов напряжения и тока в любой точке M линии (рис. 12.1) в виде наложения прямой и обратной бегущих волн:

при отсчете расстояния x от начала линии до точки M

$$\begin{aligned} \dot{U}(x) &= \frac{\dot{U}_1 + i_1 Z_B}{2} e^{-\gamma x} + \\ &+ \frac{\dot{U}_1 - i_1 Z_B}{2} e^{\gamma x} = \dot{U}_{\text{пр1}} e^{-\gamma x} + \\ &+ \dot{U}_{\text{обр1}} e^{\gamma x} = \dot{U}_{\text{пр}}(x) + \dot{U}_{\text{обр}}(x) \end{aligned} \quad (12.5a)$$

$$\begin{aligned} \dot{I}(x) &= \frac{i_1 + \frac{\dot{U}_1}{Z_B}}{2} e^{-\gamma x} - \\ &- \frac{\frac{\dot{U}_1}{Z_B} - i_1}{2} e^{\gamma x} = \dot{I}_{\text{пр}}(x) - \dot{I}_{\text{обр}}(x), \end{aligned} \quad (12.6a)$$

где \dot{U}_1 и i_1 — комплексы напряжения и тока в начале линии;

$\dot{U}_{\text{пр1}}$, $\dot{U}_{\text{обр1}}$ — соответствующие комплексы напряжения прямой и обратной волн в начале линии;

при отсчете расстояния $y = l - x$ от конца линии до точки M

$$\begin{aligned} \dot{U}(y) &= \frac{\dot{U}_2 + i_2 Z_B}{2} e^{\gamma y} + \\ &+ \frac{\dot{U}_2 - i_2 Z_B}{2} e^{-\gamma y} = \dot{U}_{\text{пр2}} e^{\gamma y} + \\ &+ \dot{U}_{\text{обр2}} e^{-\gamma y} = \dot{U}_{\text{пр}}(y) + \dot{U}_{\text{обр2}}(y) \end{aligned} \quad (12.5b)$$

$$\begin{aligned} \dot{I}(y) &= \frac{i_2 + \frac{\dot{U}_2}{Z_B}}{2} e^{\gamma y} - \\ &- \frac{\frac{\dot{U}_2}{Z_B} - i_2}{2} e^{-\gamma y} = \dot{I}_{\text{пр}}(y) - \dot{I}_{\text{обр}}(y), \end{aligned} \quad (12.6b)$$

где \dot{U}_2 и i_2 — комплексы напряжения и тока в конце линии;

$\dot{U}_{\text{пр2}}$, $\dot{U}_{\text{обр2}}$ — комплексы напряжения прямой и обратной волн в конце линии;

$\dot{U}_{\text{пр}}$ и $\dot{I}_{\text{пр}}$ — прямые (падающие волны);

$\dot{U}_{\text{обр}}$ и $\dot{I}_{\text{обр}}$ — обратные (отраженные) волны. Отношения комплексов токов или напряжений обратной и прямой волн называются *коэффициентом отражения* ρ .

В однородной линии с волновым сопротивлением $Z_{\text{в}}$, нагруженной на сопротивление $Z_{\text{н}}$, коэффициент отражения по напряжению в конце линии определяется по формуле

$$\rho_{\text{н}} = \frac{\dot{U}_{\text{обр}}}{\dot{U}_{\text{пр}}} = \frac{Z_{\text{н}} - Z_{\text{в}}}{Z_{\text{н}} + Z_{\text{в}}}. \quad (12.7)$$

Если нагрузка длинной линии $Z_{\text{н}} = Z_{\text{в}}$ (согласованная нагрузка), то коэффициент отражения равен нулю, а напряжение (или ток) совпадает с напряжением (или током) прямой волны. Уравнения напряжения и тока в линии упрощаются, например для напряжения:

$$\dot{U}(x) = \dot{U}_{\text{пр}}(x) = \dot{U}_1 e^{-\gamma x} \quad (12.8a) \quad \Bigg| \quad \dot{U}(y) = \dot{U}_{\text{пр}}(y) = \dot{U}_2 e^{\gamma y}. \quad (12.8б)$$

Примеры приведены в задачах 12.13, 12.15.

3. **Единицы передачи** (непер, децибел) характеризуют условия передачи (затухания) напряжения, тока, мощности.

Коэффициент затухания характеризует отличие выходного напряжения (тока, мощности) от входного, выражает степень затухания сигнала при согласованной нагрузке и определяется выражением

$$a = \ln \frac{U_1}{U_2} = \ln \frac{I_1}{I_2} = \frac{1}{2} \ln \frac{U_1 I_1}{U_2 I_2} = \frac{1}{2} \ln \frac{P_1}{P_2}. \quad (12.9)$$

Единица коэффициента затухания *непер* ($a = 1 = \ln \frac{U_1}{U_2} = \frac{1}{2} \ln \frac{P_1}{P_2}$) — затухание при согласованной нагрузке, при которой напряжение в конце линии меньше, чем на входе, в 2,7 раза (или мощности в $e^2 = 7,4$ раза).

Коэффициент затухания может быть выражен в *децибелах*:

$$a = 20 \lg \frac{U_1}{U_2} = 20 \lg \frac{I_1}{I_2} = 10 \lg \frac{P_1}{P_2}. \quad (12.10)$$

Связь между непером и децибелом:

$$1 \text{ непер} = 8,69 \text{ дб}, \quad 1 \text{ дб} = 0,115 \text{ непер}.$$

Уровень передачи, характеризующий распределение мощностей, напряжений, токов вдоль линии, есть логарифм отношения некоторой величины (мощности, напряжения, тока) в данной точке x к одноименной величине, принятой для сравнения.

Рассматривают *относительный* и *абсолютный* уровни передачи.

Относительный уровень передачи по мощности, напряжению, току соответственно:

$$p_p = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{P_x}{P_0} \right| \text{ нег}; \quad p_U = \ln \left| \frac{U_x}{U_0} \right| \text{ нег}; \quad p_I = \ln \left| \frac{I_x}{I_0} \right| \text{ нег}. \quad (12.11)$$

Абсолютный уровень передачи по мощности, напряжению, току соответственно:

$$p_{ap} = \frac{1}{2} \ln \frac{P \text{ (мва)}}{I \text{ (мва)}}; \quad p_a U = \ln \frac{U \text{ (в)}}{0,775 \text{ (в)}}; \\ p_{aI} = \ln \frac{I \text{ (ма)}}{1,29 \text{ (ма)}}. \quad (12.12)$$

Примеры даны в задачах 12.32, 12.33.

4. Уравнения длинной линии в гиперболических функциях имеют вид:

$$\begin{aligned} \dot{U} &= U_1 \text{ch} \gamma x - \dot{I}_1 Z_B \text{sh} \gamma x; & (12.13a) & \quad \dot{U} = \dot{U}_2 \text{ch} \gamma y + \dot{I}_2 Z_B \text{sh} \gamma y; & (12.13b) \\ \dot{I} &= \dot{I}_1 \text{ch} \gamma x - \frac{\dot{U}_1}{Z_B} \text{sh} \gamma x. & (12.14a) & \quad \dot{I} = \dot{I}_2 \text{ch} \gamma y + \frac{\dot{U}_2}{Z_B} \text{sh} \gamma y. & (12.14b) \end{aligned}$$

Входное сопротивление линии представляет отношение комплексных напряжения к току в точках подключения генератора:

$$Z_1 = \frac{\dot{U}_1}{\dot{I}_1} = Z_B \frac{Z_H + Z_B \text{th} \gamma l}{Z_B + Z_H \text{th} \gamma l} = Z_B \text{th} (\gamma l + n), \quad (12.15)$$

где

$$\text{th} n = \frac{Z_H}{Z_B} \quad \text{или} \quad n = \frac{1}{2} \ln \frac{Z_B + Z_H}{Z_B - Z_H}.$$

В режимах холостого хода и короткого замыкания входное сопротивление

$$Z_{x,x} = \frac{Z_B}{\text{th} \gamma l}; \quad Z_{к,с} = Z_B \text{th} \gamma l. \quad (12.16)$$

Пример приведен в задаче 12.14.

Однородная линия при заданной частоте источника питания может быть заменена симметричным четырехполюсником, коэффициенты которого связаны со вторичными параметрами линии соотношениями:

$$A_{11} = A_{22} = \text{ch} \gamma l; \quad A_{12} = Z_B \text{sh} \gamma l; \quad A_{21} = \frac{\text{sh} \gamma l}{Z_B}. \quad (12.17)$$

5. Линия без искажений — такая, в которой затухание и скорость распространения волны не зависят от частоты.

Для неискажающей линии должно выполняться условие

$$\frac{r_0}{g_0} = \frac{L_0}{C_0}. \quad (12.18)$$

При этом

$$\left. \begin{aligned} z_B &= \sqrt{\frac{L_0}{C_0}}, \quad \alpha = \sqrt{r_0 g_0}, \quad \beta = \omega \sqrt{L_0 C_0}, \\ v_\phi &= \frac{\omega}{\beta} = \frac{1}{\sqrt{L_0 C_0}}. \end{aligned} \right\} \quad (12.19)$$

Линия без потерь ($r_0 = g_0 = 0$) — неискажающая; для нее

$$\left. \begin{aligned} \alpha &= 0, \quad \beta = \omega \sqrt{L_0 C_0}, \quad \gamma = j\beta; \\ Z_B &= \sqrt{\frac{L_0}{C_0}} = z_B, \quad v_\phi = \frac{1}{\sqrt{L_0 C_0}}. \end{aligned} \right\} \quad (12.20)$$

Примеры даны в задачах 12.24, 12.25.

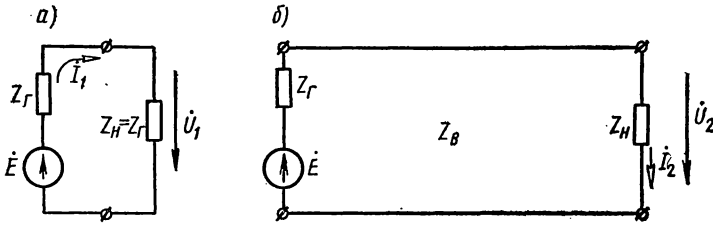


Рис. 12.2

6. Рабочее затухание однородной линии есть половина натурального логарифма отношения модуля комплексного произведения $\dot{U}_1 \dot{I}_1$ на $\dot{I}_1 \dot{I}_1$ при непосредственном подключении нагрузочного сопротивления, равного сопротивлению генератора, к генератору с э.д.с. E и внутренним сопротивлением Z_r (рис. 12.2, а) к модулю комплексного произведения \dot{U}_2 на \dot{I}_2 при условии, что нагрузочное сопротивление Z_n подключено к концу линии, в начале которой имеется тот же генератор с E и Z_r (рис. 12.2, б):

$$\begin{aligned} a_p &= \frac{1}{2} \ln \left| \frac{\dot{U}_1 \dot{I}_1}{\dot{U}_2 \dot{I}_2} \right|_{\text{нел}} = 10 \lg \left| \frac{\dot{U}_1 \dot{I}_1}{\dot{U}_2 \dot{I}_2} \right| \partial \delta = \alpha l + \ln \left| \frac{Z_r + Z_B}{2 \sqrt{Z_r Z_B}} \right| + \\ &+ \ln \left| \frac{Z_n + Z_B}{2 \sqrt{Z_n Z_B}} \right| + \ln \left| 1 - \rho_r \rho_n e^{-2\gamma l} \right|, \end{aligned} \quad (12.21)$$

где

$$\rho_r = \frac{Z_1 - Z_B}{Z_1 + Z_B}; \quad \rho_n = \frac{Z_n - Z_B}{Z_n + Z_B}.$$

Пример дан в задаче 12.29.

7. **Линия без потерь** ($r_0 = g_0 = 0$). В линии без потерь гиперболические функции заменяются круговыми: $\text{ch } \gamma l = \text{ch } j\beta l = \cos \beta l$; $\text{sh } \gamma l = \text{sh } j\beta l = j \sin \beta l$.

Уравнения длинной линии без потерь в комплексной форме:

при отсчете расстояний x от
начала линии

$$\dot{U}(x) = \dot{U}_1 \cos \beta x - j \dot{I}_1 Z_B \sin \beta x; \quad (12.22a)$$

$$\dot{I}(x) = \dot{I}_1 \cos \beta x - j \frac{\dot{U}_1}{Z_B} \sin \beta x. \quad (12.23a)$$

при отсчете расстояний y от
ее конца

$$\dot{U}(y) = \dot{U}_2 \cos \beta y + j \dot{I}_2 Z_B \sin \beta y; \quad (12.22б)$$

$$\dot{I}(y) = \dot{I}_2 \cos \beta y + j \frac{\dot{U}_2}{Z_B} \sin \beta y. \quad (12.23б)$$

Входное сопротивление линии без потерь

$$Z_1 = Z_B \frac{Z_H + j Z_B \text{tg } \beta l}{Z_B + j Z_H \text{tg } \beta l} = Z_B \text{th}(n + j\beta l), \quad (12.24)$$

где $\text{th } n = \frac{Z_H}{Z_B}$ или $n = \frac{1}{2} \ln \frac{Z_B + Z_H}{Z_B - Z_H}$.

В режимах холостого хода и короткого замыкания входное сопротивление линии без потерь

$$Z_{x.x} = \frac{Z_H}{j \text{tg } \beta l}; \quad Z_{к.з} = j Z_B \text{tg } \beta l. \quad (12.25)$$

Распределение действующих значений напряжения и тока вдоль линии без потерь при ее нагрузке на чисто активное сопротивление r_H определяется уравнениями (при отсчете расстояния y от конца линии):

$$\left. \begin{aligned} U(y) &= U_2 \sqrt{\cos^2 \beta y + m^2 \sin^2 \beta y}; \\ I(y) &= \frac{I_2}{m} \sqrt{m^2 \cos^2 \beta y + \sin^2 \beta y}, \\ \text{где } m &= \frac{Z_B}{r_H} \end{aligned} \right\} \quad (12.26)$$

О степени согласования линии с нагрузкой можно судить по кривой распределения действующих значений напряжения (тока), характеризваемой коэффициентами бегущей волны $K_{б.в}$ и стоячей волны $K_{с.в}$:

$$K_{б.в} = \frac{U_{\min}}{U_{\max}} = \frac{U_{\text{пр}} - U_{\text{обр}}}{U_{\text{пр}} + U_{\text{обр}}} = \frac{1 - K_{\text{отр}}}{1 + K_{\text{отр}}} = \left\{ \begin{aligned} m & \text{ (при } r_H > Z_B \text{)}, \\ \frac{1}{m} & \text{ (при } r_H < Z_B \text{)}, \end{aligned} \right\} \quad (12.27)$$

$$K_{с.в} = \frac{1}{K_{б.в}}$$

Примеры даны в задачах 12.34, 12.36, 12.38, 12.40.

8. Применение отрезков линии для согласования сопротивлений в качестве сопротивлений, в качестве колебательных систем и др.

Примеры даны в задачах 12.44—12.47.

УПРАЖНЕНИЯ И ЗАДАЧИ

А. Первичные и вторичные параметры линий. Фазовая скорость. Длина волны

12.1. Рассчитать первичные параметры стальной воздушной двухпроводной цепи при температуре окружающей среды $t^\circ = -14^\circ \text{C}$ при сухой погоде, если расстояние между осями проводов $a = 60 \text{ см}$, их диаметр $d = 4 \text{ мм}$. Частота тока $f = 800 \text{ гц}$. Магнитную проницаемость проводов принять равной 120.

Решение. Вначале по формуле (П5.1) определяем сопротивление 1 км линии при постоянном токе и при температуре $+20^\circ \text{C}$:

$$r_{20} = 0,138 \frac{2550}{4^2} = 22 \text{ ом/км.}$$

Величина $\rho = 0,138 \text{ ом} \cdot \text{м/мм}^2$ взята из табл. П5.1. Сопротивление r_{t° при постоянном токе при $t^\circ = -14^\circ \text{C}$ находим по формуле (П5.2):

$$\begin{aligned} r_{t^\circ} &= r_{20}[1 + \alpha_r(t^\circ - 20)] = 22[1 + 0,0046(-14 - 20)] = \\ &= 18,5 \text{ ом/км.} \end{aligned}$$

Значение $\alpha_r = 0,0046$ взято из табл. П5.1.

Активное сопротивление 1 км линии при переменном токе определяем по формуле (П5.3).

Для этого сначала по формуле (П5.4) вычислим коэффициент

$$x = 7,07 \sqrt{\frac{f\mu}{10^4 r_{t^\circ}}} = 7,09 \sqrt{\frac{800 \cdot 120}{10^4 \cdot 18,5}} = 5,1.$$

Применяя линейное интерполирование, по табл. П5.2 найдем $F(x)$, соответствующее $x = 5,1$:

$$F(x) = 1,043 + \frac{1,394 - 1,043}{10} = 1,078.$$

Итак, по формуле (П5.3) активное сопротивление 1 км линии

$$r_0 = r_{t^\circ} [1 + F(x)] = 18,5 \cdot 2,078 = 38,4 \text{ ом/км.}$$

Индуктивность 1 км двухпроводной воздушной линии определим по формуле (П5.5а). Предварительно по табл. П5.2, используя линейное интерполирование, найдем коэффициент $Q(x)$, соответствующий $x = 5,1$:

$$Q(x) = 0,556 - \frac{0,556 - 0,465}{10} = 0,547.$$

Искомая индуктивность по формуле (П5.5а) равна

$$L_0 = \left[4 \ln \frac{a}{r} + Q(x) \right] 10^{-4} = \left(4 \ln \frac{600}{2} + 0,547 \cdot 120 \right) 10^{-4} = \\ = (4 \cdot 5,7 + 65,6) \cdot 10^{-4} = 88,4 \cdot 10^{-4} \text{ гн/км.}$$

Емкость 1 км двухпроводной линии вычисляем по формуле (П5.6):

$$C_0 = \frac{1,05}{36 \ln \frac{a}{r}} 10^{-6} = \frac{1,05 \cdot 10^{-6}}{36 \ln \frac{600}{2}} = 5,12 \cdot 10^{-9} \text{ ф/км.}$$

Активную проводимость между проводами найдем по формуле (П5.7), учитывая, что проводимость изоляции при сухой погоде $g' = 0,01 \cdot 10^{-6} \text{ сим/км}$, а n — коэффициент диэлектрических потерь в изоляторах; при этой погоде равен $0,05 \cdot 10^{-9}$:

$$g_0 = g' + nf = 0,01 \cdot 10^{-6} + 0,05 \cdot 10^{-9} \cdot 800 = 0,05 \cdot 10^{-6} \text{ сим/км.}$$

12.2. Для линии длиной $l = 38 \text{ км}$, первичные параметры которой были найдены в задаче 12.1, при частоте $f = 800 \text{ гц}$ определить: модуль z_B и фазу φ_B волнового сопротивления, его активную и реактивную составляющие; коэффициенты затухания, фазы и распространения (α , β и γ); фазовую скорость распространения электромагнитной волны вдоль линии v_ϕ и длину волны λ ; отношение $U_{2np}/U_{1np} = I_{2np}/I_{1np}$ при нагрузке линии на сопротивление, равное волновому, где U_{2np} и I_{2np} — амплитуды напряжения и тока прямой (падающей) волны в конце линии, U_{1np} и I_{1np} — то же в начале линии.

Р е ш е н и е. Волновое сопротивление по формуле (12.1) равно

$$Z_B = \sqrt{\frac{r_0 + j\omega L_0}{g_0 + j\omega C_0}} = \sqrt{\frac{38,4 + j2\pi \cdot 800 \cdot 88,4 \cdot 10^{-4}}{0,05 \cdot 10^{-6} + j2\pi \cdot 800 \cdot 5,12 \cdot 10^{-9}}} = \\ = \sqrt{\frac{38,4 + j44,5}{10^{-6}(0,05 + j25,7)}} = \sqrt{\frac{58,8e^{j49^\circ 10'}}{10^{-6} \cdot 25,7e^{j89^\circ 52'}}} = 1510e^{-j20^\circ 21'} \text{ ом.}$$

Активная и реактивная составляющие волнового сопротивления:

$$R_B = 1510 \cos 20^\circ 21' = 1415 \text{ ом;}$$

$$X_B = -1510 \sin 20^\circ 21' = -525 \text{ ом.}$$

Коэффициент распространения по (12.2)

$$\gamma = \sqrt{(r_0 + j\omega L_0)(g_0 + j\omega C_0)} = \sqrt{58,8e^{j49^\circ 10'} \cdot 10^{-6} \cdot 25,7e^{j89^\circ 52'}} = \\ = 38,8 \cdot 10^{-3} e^{j69^\circ 31'} \text{ км}^{-1}.$$

Отсюда коэффициенты затухания и фазы:

$$\alpha = 38,8 \cdot 10^{-3} \cos 69^\circ 31' = 13,6 \cdot 10^{-3} \text{ неп/км;}$$

$$\beta = 38,8 \cdot 10^{-3} \sin 69^\circ 31' = 36,4 \cdot 10^{-3} \text{ рад/км.}$$

Фазовая скорость и длина волны в линии определяются по форму-

лам (12.4) и (12.3):

$$v_{\phi} = \frac{\omega}{\beta} = \frac{2\pi \cdot 800}{36,4 \cdot 10^{-3}} = 138000 \text{ км/сек};$$

$$\lambda = \frac{2\pi}{\beta} = \frac{6,28}{38,4 \cdot 10^{-3}} = 172,6 \text{ км.}$$

Отношения амплитуд напряжений и тока для прямой волны в конце и начале линии при согласованной нагрузке, как это следует из (12.8а), при $x = l$ имеют вид

$$\frac{U_{2np}}{U_{1np}} = \frac{I_{2np}}{I_{1np}} = |e^{-\gamma l}| = e^{-\alpha l} = e^{-13,6 \cdot 10^{-3} \cdot 38} = e^{-0,516} = 0,597.$$

12.3. Найти первичные и вторичные параметры симметричной кабельной линии при частоте $f = 220 \text{ кГц}$. Жилы медные, диаметром $d = 1,2 \text{ мм}$, расстояние между центрами проводов $a = 4,15 \text{ мм}$. Скрутка звездная (коэффициент ρ , учитывающий этот тип скрутки жил кабеля, равен 5). Эквивалентная диэлектрическая проницаемость изоляции $\epsilon = 1,4$, тангенс угла потерь $\text{tg} \delta = 160 \cdot 10^{-4}$. Температура среды 20°C . Определить фазовую скорость и длину волны в кабеле.

Решение. Сопротивление 1 км кабеля при 20°C постоянному току определяется по формуле (П5.1):

$$r_{20} = \rho \frac{2550}{d^2} = 0,01785 \frac{2550}{1,2^2} = 31,6 \text{ ом/км.}$$

Значение $\rho = 0,01785 \frac{\text{ом} \cdot \text{м}}{\text{мм}^2}$ взято из табл. П5.1.

Активное сопротивление 1 км кабеля при переменном токе вычислим по формуле (П5.8). Для этого вначале по формуле (П5.4) вычислим коэффициент

$$x = 7,09 \sqrt{\frac{f\mu}{10^4 r_{20}}} = 7,09 \sqrt{\frac{220 \cdot 10^3 \cdot 1}{10^4 \cdot 31,6}} = 5,9.$$

По табл. П5.2, применяя линейное интерполирование, найдем: $F(x) = 1,36$; $G(x) = 0,91$; $H(x) = 0,57$; $Q(x) = 0,473$.

Активное сопротивление 1 км кабеля определяется по формуле (П5.8):

$$r' = 31,6 \left(1 + 1,36 + \frac{5 \cdot 0,91 \left(\frac{1,2}{4,15} \right)^2}{1 - 0,57 \left(\frac{1,2}{4,15} \right)^2} \right) = 87,1 \text{ ом/км.}$$

В диапазоне высоких частот (свыше 30 кГц) еще учитывают дополнительное сопротивление кабельной линии, обусловливаемое потерями на вихревые токи в соседних проводниках и свинцовой оболочке [см. формулу (П5.9)]:

$$\Delta r' = 8 \sqrt{\frac{f}{200000}} = 8 \sqrt{\frac{220000}{200000}} = 8,4 \text{ ом/км.}$$

Окончательно получаем величину активного сопротивления единицы длины кабеля:

$$r_0 = r' + \Delta r' = 87,1 + 8,4 = 95,5 \text{ ом/км.}$$

Погонные индуктивность и емкость двухпроводной кабельной цепи определяем по формулам (П5.5а) и (П5.11):

$$L_0 = \left(4\pi \frac{4,15 - 0,6}{0,6} + 0,473 \right) \cdot 10^{-4} = 0,76 \cdot 10^{-3} \text{ гн/км;}$$

$$C_0 = \frac{1,4 \cdot 10^{-9}}{36 \ln 0,6 \frac{4,15}{0,6}} = 27,5 \cdot 10^{-9} \text{ ф/км.}$$

Проводимость изоляции 1 км кабельной линии находим по (П5.12):

$$g_0 = \omega \text{Ctg} \delta = 2 \cdot 3,14 \cdot 220 \cdot 10^3 \cdot 27,5 \cdot 10^{-9} \cdot 160 \cdot 10^{-4} = \\ = 610 \cdot 10^{-6} \text{ сим/км.}$$

Вторичные параметры кабеля находим по (12.1) и (12.2):

$$Z_B = \sqrt{\frac{95,5 + j2 \cdot 3,14 \cdot 220 \cdot 10^3 \cdot 0,76 \cdot 10^{-3}}{610 \cdot 10^{-6} + j2 \cdot 3,14 \cdot 220 \cdot 10^3 \cdot 27,5 \cdot 10^{-9}}} = \sqrt{\frac{95,5 + j1050}{10^{-6}(610 + j38000)}} = \\ = \sqrt{\frac{1050e^{j84^\circ 47'}}{38000 \cdot 10^{-6}e^{j89^\circ 56'}}} = 166e^{-j2^\circ 9'} \text{ ом;}$$

$$\gamma = \sqrt{1050e^{j84^\circ 47'} \cdot 38000 \cdot 10^{-6}e^{j89^\circ 56'}} = 6,32e^{j86^\circ 56'} \text{ км}^{-1};$$

$$\alpha = 6,32 \cos 86^\circ 56' = 340 \cdot 10^{-3} \text{ неп/км;}$$

$$\beta = 6,32 \sin 86^\circ 56' = 6,3 \text{ рад/км.}$$

Наконец, по (12.4) и (12.3) вычисляем фазовую скорость и длину волны в кабеле:

$$v_\phi = \frac{2\pi \cdot 800}{6,3} = 798 \text{ км/сек;}$$

$$\lambda = \frac{2\pi}{6,3} = 0,995 \text{ км.}$$

12.4. Определить первичные и вторичные параметры стандартизованной коаксиальной пары типа КМ-4×2, 52/9,4 с шайбовой полиэтиленовой изоляцией при частоте $f = 220$ кГц. Диаметр жилы $d = 2,52$ мм, внутренний диаметр внешнего проводника $D = 9,4$ мм, эквивалентная диэлектрическая проницаемость изоляции $\epsilon = 1,1$, тангенс угла диэлектрических потерь $\text{tg} \delta = 0,5 \cdot 10^{-4}$, температура 20°C . Найти также длину волны и фазовую скорость.

Решение. Первичные параметры вычисляем по формулам (П5.13), (П5.14), (П5.15) и (П5.7):

$$r_0 = 8,35 \sqrt{220 \cdot 10^{-3} \left(\frac{1}{2,52} + \frac{1}{9,4} \right)} \cdot 10^{-2} = 19,7 \text{ ом/км;}$$

$$L_0 = 2 \ln \frac{9,4}{2,52} \cdot 10^{-4} = 2 \ln 3,73 \cdot 10^{-4} = 2 \cdot 1,316 \cdot 10^{-4} =$$

$$= 2,63 \cdot 10^{-4} \text{ гн/км};$$

$$C_0 = \frac{1,1 \cdot 10^{-6}}{18 \ln \frac{9,4}{2,52}} = \frac{1,1 \cdot 10^{-6}}{18 \cdot 1,316} = 46,5 \cdot 10^{-9} \text{ ф/км};$$

$$g_0 = 2\pi \cdot 220 \cdot 10^3 \cdot 46,5 \cdot 10^{-9} \cdot 0,5 \cdot 10^{-4} = 3,2 \cdot 10^{-6} \text{ сим/км}.$$

Вычислим вторичные параметры. Так как $r_0 = 19,7 \ll \omega L_0 = 364$ и $g_0 = 3,2 \cdot 10^{-6} \ll \omega C_0 = 64000 \cdot 10^{-6}$, то расчет можно вести по приближенным формулам (12.4):

$$Z_B = \sqrt{\frac{L_0}{C_0}} = \frac{2,63 \cdot 10^{-4}}{46,5 \cdot 10^{-9}} = 75 \text{ ом};$$

$$\alpha = \frac{r_0}{2} \sqrt{\frac{C_0}{L_0}} + \frac{g_0}{2} \sqrt{\frac{L_0}{C_0}} = \frac{19,7}{2} \cdot \frac{1}{75} + \frac{3,2 \cdot 10^{-6}}{2} 75 =$$

$$= 0,131 \text{ nep/км};$$

$$\beta = \omega \sqrt{L_0 C_0} = 2 \cdot 3,14 \cdot 220 \cdot 10^3 \sqrt{2,63 \cdot 10^{-4} \cdot 46,5 \cdot 10^{-9}} = 4,83 \text{ рад/км}.$$

Длину волны и фазовую скорость определяем по (12.4) и (12.3):

$$\lambda = \frac{2\pi}{\beta} = \frac{6,28}{4,83} = 1,3 \text{ м};$$

$$v_\phi = \frac{\omega}{\beta} = \frac{2\pi \cdot 220 \cdot 10^3}{4,83} = 286000 \text{ км/сек}.$$

Для сравнения приведем расчет по точным формулам (12.1) и (12.2)

$$Z_B = \sqrt{\frac{19,7 + j2\pi \cdot 220 \cdot 10^3 \cdot 2,63 \cdot 10^{-4}}{3,2 \cdot 10^{-6} + j2\pi \cdot 220 \cdot 10^3 \cdot 46,5 \cdot 10^{-9}}} = 75,2e^{-j1033'} \text{ ом};$$

$$\gamma = \sqrt{364e^{j86054'} \cdot 64,2 \cdot 10^{-3} e^{j900}} = (0,13 + j4,8) \text{ км}^{-1},$$

т.е. $\alpha = 0,13 \text{ nep/км}$, $\beta = 4,8 \text{ рад/км}$.

Результаты, полученные по точным формулам, весьма близки к рассчитанным по приближенным формулам.

12.5. Определить первичные и вторичные параметры воздушной линии, диаметр проводов которой равен 3 мм и расстояние между осями проводов составляет 20 см. Состояние погоды: сыро, температура 20° С. Частота тока 800 гц. Чему равны длина волны в линии и фазовая скорость распространения волн?

12.6. Для линий, данные которых приведены в табл. 12.1, определить Z_B , γ , α , β , v_ϕ , λ и вычислить отношение U_{2m}/U_{1m} при нагрузке линии на волновое сопротивление.

Таблица 12.1

Название линии	r_0 , ом/км	L_0 , гн/км	C_0 , ф/км	g_0 , сим/км	Длина линии, км	f , гц
Воздушная стальная линия диаметром 3 мм	29,2	$9 \cdot 10^{-3}$	$6 \cdot 10^{-9}$	10^{-6}	100	800
Воздушная бронзовая линия диаметром 3 мм	5,4	$2 \cdot 10^{-3}$	$6 \cdot 10^{-9}$	10^{-6}	100	800
Телефонный двухпроводный кабель диаметром 2 мм	11,4	$0,6 \cdot 10^{-3}$	$38 \cdot 10^{-9}$	$0,8 \cdot 10^{-6}$	100	800
Морской телеграфный коак- сиальный кабель	7	$0,3 \cdot 10^{-3}$	$0,2 \cdot 10^{-6}$	$0,5 \cdot 10^{-6}$	200	800

12.7. Фидер с расстоянием между проводами $D = 5$ см, радиус проводов которого $r = 2$ мм, имеет параметры $r_0 = 0,03$ ом/м, $g_0 = 1 \cdot 10^{-9}$ сим/м при $\lambda = 30$ м. Найти Z_B , α , β .

У к а з а н и е. При высокой частоте, соответствующей длине волны 30 м, можно считать, что $v_{\text{ф}} = c = 3 \cdot 10^8$ м/сек, а из (12.3) находим $f = \frac{c}{\lambda}$.

12.8. Даны параметры цепей: а) воздушной линии из медных проводов при $f = 800$ гц, $r_0 = 2,87$ ом/км, $L_0 = 1,94 \cdot 10^{-3}$ гн/км, $C_0 = 6,35 \cdot 10^{-9}$ ф/км и $g_0 = 0,14 \cdot 10^{-6}$ сим/км; б) воздушной линии из медных проводов при частоте $f = 20000$ гц, $r_0 = 6,76$ ом/км, $L_0 = 1,89 \cdot 10^{-3}$ гн/км, $C_0 = 6,3 \cdot 10^{-9}$ ф/км и $g_0 = 5,7 \cdot 10^{-6}$ сим/км. Определить Z_B , γ , α и β и сравнить со значениями, полученными для соответствующих величин по упрощенным формулам (12.4).

12.9. Даны параметры кабельной цепи при $f = 800$ гц: $r_0 = 22,6$ ом/км, $L_0 = 0,6 \cdot 10^{-3}$ гн/км, $C_0 = 35,5 \cdot 10^{-9}$ ф/км и $g_0 = 0,7 \times 10^{-6}$ сим/км. Определить Z_B , γ , α и β и сравнить их со значениями соответствующих величин, полученными по упрощенным формулам для кабеля при умеренных частотах (800 гц и меньше), когда $r_0 \gg \omega L_0$ и $g_0 \gg \omega C_0$, что приводит к приближенным равенствам:

$$\alpha \approx \beta \approx \sqrt{\frac{r_0 \omega C_0}{2}}; \quad Z_B = \sqrt{\frac{r_0}{\omega C_0}} e^{-i \frac{\pi}{4}}.$$

12.10. Для стальной воздушной двухпроводной цепи, диаметр проводов которой $d = 4$ мм, а расстояние между осями проводов $D = 60$ см, рассчитать первичные (r_0 , L_0 , C_0 , g_0) и вторичные параметры (Z_B , γ , α , β), активную и реактивную составляющие волнового сопротивления в диапазоне частот от 0,25 до 10 кГц и для каждой из величин построить график ее изменения в функции частоты. Расчеты сделать при следующих частотах: 0,25; 0,4; 0,8; 1,5; 2; 2,8; 4; 7; 8; 10 кГц.

Температуру окружающей среды принять $t^\circ = -14,7^\circ$ С; магнитную проницаемость стальных проводов $\mu = 120$.

У к а з а н и е. Разобрать решения задач 12.1 и 12.2.

**Б. Согласованная и несогласованная нагрузка линии.
Напряжение, ток, мощность в начале и конце линии.
Входное сопротивление. Прямые и обратные волны**

12.11. Экспериментально установлено, что мощность телефонного аппарата как передатчика на зажимах телефонной цепи составляет 1 *вт*, а мощность телефонного аппарата как приемника должна быть порядка 1 *квт*, т. е. может быть допущено уменьшение мощности в 1000 раз. Имея это в виду, для воздушной стальной линии, параметры которой приведены в решении задач 12.1 и 12.2 (полагая, что сопротивление телефонного аппарата согласовано с линией), определить: а) максимально допустимое затухание; б) допустимую дальность связи, считая, что все потери энергии сосредоточены в линии (передающий и приемный аппараты подсоединены непосредственно к линии) в) отношение модулей напряжения и тока в начале линии к соответствующим величинам в конце линии.

Решение. Максимально допустимое затухание

$$b = \frac{1}{2} \ln \frac{P_1}{P_2} = \frac{1}{2} \ln 1000 = 3,45 \text{ nep} = 3,45 \cdot 8,69 = 30 \text{ db.}$$

Отсюда для воздушной стальной линии дальность передачи

$$l = \frac{b}{\alpha} = \frac{3,45}{13,6 \cdot 10^{-3}} = 254 \text{ км.}$$

Отношение модулей напряжений и токов равно

$$\frac{U_1}{U_2} = \frac{I_1}{I_2} = e^{a l} = e^{3,45} = 31,6.$$

12.12. Линию можно считать бесконечно длинной в том случае, когда ее собственное затухание достаточно велико ($a l \geq 2,3 \text{ nep}$). Исходя из этого условия, найти длины линий: а) воздушной стальной двухпроводной 4-миллиметровой линии с расстоянием между осями проводов 60 *см* при $f = 800 \text{ гц}$ (см. задачи 12.1 и 12.2); б) медной двухпроводной линией с диаметром проводов 3 *мм* и расстоянием между осями проводов 20 *см* при $f = 800 \text{ гц}$ (см. задачу 12.5); в) симметричной кабельной линии при $f = 220 \text{ кгц}$, параметры которой даны в условии задачи 12.3; г) стандартизированной коаксиальной пары (см. задачу 12.4). Во всех случаях линию считать неограниченно длинной, температуру полагать равной 20° С.

Решение.

а) Расчет параметров в примерах 12.1 и 12.2 был сделан при температуре -14° С. Проведя аналогичный расчет при температуре 20° С, получим:

$$r_0 = 42,4 \text{ ом/км}; L_0 = 94,2 \text{ гн/км}; C_0 = 5,12 \cdot 10^{-9} \text{ ф/км}; g_0 = 0,05 \cdot 10^{-6} \text{ сим/км}; \alpha = 14,5 \cdot 10^{-3} \text{ nep/км.}$$

Из условия $a l \geq 2,3 \text{ nep}$ находим искомую длину линии:

$$l \geq \frac{2,3}{\alpha} = \frac{2,3}{14,5 \cdot 10^{-3}} = 159 \text{ км;}$$

б) $l \geq 522 \text{ км}$; в) $l \geq 6,7 \text{ км}$; г) $l \geq 17,7 \text{ км}$.

12.13. Вторичные параметры двухпроводной стальной линии при $f = 800$ гц равны: $Z_B = 1510e^{-j20^\circ 21'}$ ом, $\alpha = 13,6$ мнп/км, $\beta = 36,4$ мрад/км. Длина линии $l = 38$ км. Линия не согласована с нагрузкой, сопротивление которой $Z_H = 1355e^{j21^\circ 5'}$ ом. На вход линии подано напряжение $U_1 = 10$ в частотой 800 гц. Определить: 1) напряжение и ток на нагрузке, ток в начале линии, а также входное сопротивление нагруженной линии; 2) мощность, расходуемую в нагрузке и подводимую к линии и к.п.д.

Решение. При расчете потребуются значения γl , $\text{sh} \gamma l$, $\cos \gamma l$. Вычислим их, используя формулы приложения ПЗ:

$$\gamma l = \alpha l + j\beta l = 13,6 \cdot 10^{-3} \cdot 38 + j36,4 \cdot 10^{-3} \cdot 38 = 0,505 + j1,385 = x + jy;$$

$$S = \sqrt{\frac{\text{ch } 2x - \cos 2y}{2}} = \sqrt{\frac{\text{ch } 1,01 - \cos 2,77}{2}} = \sqrt{\frac{1,555 + 0,931}{2}} = 1,114;$$

$$\text{tg } \varphi_s = \frac{\text{fg } y}{\text{th } x} = \frac{\text{fg } 1,385}{\text{th } 0,505} = \frac{5,324}{0,466} = 11,4; \quad \varphi_s = 85^\circ.$$

Следовательно, $\text{sh} \gamma l = \text{sh}(0,505 + j1,385) = Se^{j\varphi_s} = 1,114e^{j85^\circ}$;

$$C = \sqrt{\frac{\text{ch } 2x + \cos 2y}{2}} = \sqrt{\frac{\text{ch } 1,01 + \cos 2,77}{2}} = \sqrt{\frac{1,555 - 0,931}{2}} = 0,56;$$

$$\text{tg } \varphi_c = \text{th } x \cdot \text{tg } y = \text{th } 0,505 \cdot \text{tg } 1,385 = 0,466 \cdot 5,324 = 2,48; \quad \varphi_c = 68^\circ 3'.$$

Итак,

$$\text{ch } \gamma l = \text{ch}(0,505 + j1,385) = Ce^{j\varphi_c} = 0,56e^{j68^\circ 3'}.$$

1) Напряжение в конце линии \dot{U}_2 найдем по формуле (12.13, б), в которой надо принять $y = l$ и учесть, что $\dot{I}_2 = \frac{\dot{U}_2}{Z_H}$, тогда

$$\dot{U}_2 = \frac{U_1}{\text{ch} \gamma l + \frac{Z_B}{Z_H} \text{sh} \gamma l} = \frac{10}{0,56e^{j68^\circ 3'} + \frac{1510e^{-j20^\circ 21'}}{1355e^{j21^\circ 5'}} \cdot 1,114e^{j85^\circ}} = 5,78e^{-j52^\circ 15'} \text{ в.}$$

$$\text{Ток в нагрузке } \dot{I}_2 = \frac{\dot{U}_2}{Z_H} = \frac{5,78 e^{-j52^\circ 15'}}{1355 e^{j21^\circ 5'}} = 4,27 e^{-j73^\circ 20'} \text{ ма.}$$

Ток в начале линии определяем по (12.14б):

$$\begin{aligned} \dot{I}_1 &= \dot{I}_2 \text{ch } \gamma l + \frac{\dot{U}_2}{Z_B} \text{sh } \gamma l = 4,27 e^{-j73^\circ 20'} \cdot 0,56 e^{j68^\circ 3'} + \\ &+ \frac{5,78 e^{-j52^\circ 15'}}{1510 e^{-j20^\circ 21'}} \cdot 1,114 e^{j85^\circ} = 5,78 e^{j32^\circ 50'} \text{ ма.} \end{aligned}$$

Входное сопротивление нагруженной линии

$$Z_{\text{вх}} = \frac{\dot{U}_1}{\dot{I}_1} = \frac{10}{5,78 \cdot 10^{-3} e^{j32^\circ 50'}} = 1732 e^{-j32^\circ 50'} \text{ ом.}$$

2) Мощности, расходуемая в линии и подводимая к ней, равны:

$$P_1 = \operatorname{Re} [\dot{U}_1 I_1^*] = \operatorname{Re} [10 \cdot 5,78 e^{-j32^\circ 50'}] = 48,6 \text{ ватт};$$

$$P_2 = \operatorname{Re} [\dot{U}_2 I_2^*] = \operatorname{Re} [5,78 e^{-j52^\circ 15'} \cdot 4,27 e^{j73^\circ 20'}] = 23,1 \text{ ватт}.$$

К.п.д.

$$\eta = \frac{P_2}{P_1} = \frac{23,1}{48,6} = 0,475.$$

12.14. По данным задачи 12.13 определить коэффициент отражения от конца линии и входное сопротивление.

Решение. Коэффициент отражения находим по (12.7):

$$\rho_H = \frac{Z_H - Z_B}{Z_H + Z_B} = \frac{1355 e^{j21^\circ 05'} - 1510 e^{-j20^\circ 21'}}{1355 e^{j21^\circ 05'} + 1510 e^{-j20^\circ 21'}} = 0,382 e^{j98^\circ 30'}.$$

Входное сопротивление определяем по (12.15) различными способами.

Способ 1. Сначала вычисляем n и $\gamma l + n$:

$$\begin{aligned} n &= \frac{1}{2} \ln \frac{Z_B + Z_H}{Z_B - Z_H} = \frac{1}{2} \ln \frac{2680 e^{-j0^\circ 5'}}{-1023 e^{j98^\circ 25'}} = \frac{1}{2} \ln 2,62 e^{j81^\circ 30'} = \\ &= \frac{1}{2} \ln 2,62 + j \frac{1}{2} \cdot \frac{81,5^\circ}{57,3^\circ} = 0,482 + j0,711; \end{aligned}$$

$$\gamma l + n = 0,505 + j1,385 + 0,482 + j0,711 = 0,987 + j2,096 = x + jy,$$

где $x = 0,987$ неп, $y = 2,096$ рад, т. е. угол y лежит во второй четверти.

Вычислим модуль и аргумент гиперболического тангенса (см. приложение 3):

$$\begin{aligned} |\operatorname{th}(x + jy)| = T &= \sqrt{\frac{\operatorname{ch} 2x - \cos 2y}{\operatorname{ch} 2x + \cos 2y}} = \sqrt{\frac{\operatorname{ch} 1,974 - \cos 4,192}{\operatorname{ch} 1,974 + \cos 4,192}} = \\ &= \sqrt{\frac{3,655 + 0,5}{3,655 - 0,5}} = 1,147; \end{aligned}$$

$$\operatorname{tg} \varphi_t = \pm \frac{\sin 2y}{\operatorname{sh} 2x} = \frac{\sin 4,192}{\operatorname{sh} 1,974} = \frac{-0,867}{3,516} = -0,247,$$

отсюда $\varphi_t = -13^\circ 47'$ (из приложения 3 видно, что для четных четвертей угол φ_t должен быть отрицателен). Следовательно,

$$Z_1 = 1510 e^{-j20^\circ 21'} \cdot 1,147 e^{-j13^\circ 47'} = 1732 e^{-j34^\circ 08'}.$$

Способ 2. Вычислим входное сопротивление, применив разложение гиперболического тангенса на действительную и мнимую составляющие (см. приложение 3):

$$\begin{aligned} \operatorname{th}(x + iy) &= \frac{\operatorname{sh} 2x}{\operatorname{ch} 2x + \cos 2y} + j \frac{\sin 2y}{\operatorname{ch} 2x + \cos 2y} = \\ &= \frac{\operatorname{sh} 1,974}{\operatorname{ch} 1,974 + \cos 4,192} + j \frac{\sin 4,192}{\operatorname{ch} 1,974 + \cos 4,192} = \frac{3,516}{3,155} + j \frac{-0,867}{3,155} = \\ &= 1,114 - j0,275 = 1,143 e^{-j13^{\circ}50'}. \end{aligned}$$

Входное сопротивление [по формуле (12.15)]

$$Z_1 = Z_B \operatorname{th}(x + jy) = 1510 e^{-j20^{\circ}21'} \cdot 1,143 e^{-j13^{\circ}50'} = 1728 e^{-j34^{\circ}11'} \text{ ом.}$$

Отметим, что точность расчета по всем приведенным способам примерно одинакова, однако последний путь с точки зрения затраты времени является наиболее экономным.

12.15. Для линии задачи 12.13 определить комплексные значения прямой и обратной волн напряжения в конце и начале линии. Написать уравнения для мгновенных значений прямой и обратной волн напряжения в конце и начале линии, если мгновенное значение напряжения в конце линии $u_2 = U_{2m} \sin \omega t$ ($U_{2m} = 14,1$ в).

Решение. Вначале по формуле (12.56) определяем комплексные амплитудные значения прямой и обратной волн напряжения в конце линии:

$$\begin{aligned} \dot{U}_{\text{пр}2m} &= \frac{\dot{U}_{2m} + \dot{I}_{2m} Z_B}{2} = \frac{\dot{U}_{2m} + \frac{U_{2m}}{Z_H} Z_B}{2} = \\ &= \frac{14,1}{2} \left(1 + \frac{1510 e^{-j20^{\circ}21'}}{1350 e^{j21^{\circ}5'}} \right) = 1,4 e^{-j21^{\circ}50'} \text{ в;} \\ \dot{U}_{\text{обр}2m} &= \frac{\dot{U}_{2m} - \dot{I}_{2m} Z_B}{2} = 0,22 e^{j57^{\circ}45'} \text{ в.} \end{aligned}$$

Соответствующие мгновенные значения этих волн в конце линии:

$$\begin{aligned} u_{\text{пр}2} &= 1,4 \sin(\omega t - 21^{\circ}50') \text{ в;} \\ u_{\text{обр}2} &= 0,22 \sin(\omega t + 57^{\circ}45') \text{ в.} \end{aligned}$$

Комплексные значения прямой и обратной волн напряжения в начале линии определяем по следующим формулам (значение $\gamma l = 0,505 + j1,385 = 0,505 + j79^{\circ}21'$ вычислено в задаче 12.13):

$$\begin{aligned} \dot{U}_{\text{пр}1m} &= \dot{U}_{\text{пр}2m} e^{\gamma l} = 1,4 e^{-j21^{\circ}50'} e^{0,505} e^{j79^{\circ}21'} = 2,32 e^{j57^{\circ}31'} \text{ в;} \\ \dot{U}_{\text{обр}1m} &= \dot{U}_{\text{обр}2m} e^{-\gamma l} = 0,22 e^{j57^{\circ}45'} e^{-0,505} e^{-j79^{\circ}21'} = 0,132 e^{-j21^{\circ}36'} \text{ в.} \end{aligned}$$

Уравнения мгновенных значений волн напряжения в начале линии имеют вид:

$$\begin{aligned} u_{\text{пр}1} &= 2,32 \sin(\omega t + 57^{\circ}31') \text{ в;} \\ u_{\text{обр}1} &= 0,132 \sin(\omega t - 21^{\circ}36') \text{ в.} \end{aligned}$$

12.16. Вторичные параметры однородной двухпроводной линии из медных проводов диаметром 4 мм при частоте $f = 10^4$ гц равны $Z_B = 548 e^{-j1^\circ 10'}$ ом, $\alpha = 4,7$ мнел/км, $\beta = 0,219$ рад/км.

Длина линии $l = 100$ км. Напряжение в конце разомкнутой линии изменяется по уравнению $u_2 = U_{2m} \sin \omega t$ ($U_{2m} = 10\sqrt{2}$ в, $f = 10^4$ гц). Вычислить комплексные значения напряжения и тока в начале линии и в точке, отстоящей от конца линии на 20 км. Для тех же точек линии написать уравнения мгновенных значений напряжения и тока.

12.17. Линия, параметры которой даны в предыдущей задаче, замкнута накоротко. При этом ток в конце линии $i = I_{2m} \sin \omega t$ ($I_{2m} = 10\sqrt{2}$ ма, $f = 10^4$ гц). Вычислить комплексные значения напряжения и тока в начале линии и написать уравнения их мгновенных значений. Определить входные сопротивления линии при холостом ходе и коротком замыкании.

12.18. Линия, параметры которой даны в задаче 12.16, нагружена на сопротивление $Z_H = 500 e^{-j10^\circ}$ ом. Вычислить комплексные значения напряжения и тока в начале линии и написать уравнения мгновенных значений этих величин, если напряжение в конце линии $u_2 = U_{2m} \sin \omega t$ ($U_{2m} = 10\sqrt{2}$ в, $f = 10^4$ гц). Определить комплексные значения прямой и обратной волн напряжения в начале линии. Написать уравнения для мгновенных значений прямой и обратной волн напряжения в начале и конце линии.

12.19. Линия из медных проводов, параметры которой даны в задаче 12.16, нагружена на сопротивление Z_H . Частота $f = 10^4$ гц. Написать выражения для мгновенных значений напряжения u_1 и тока i_1 в начале линии, если напряжение на нагрузке $u_2 = U_{2m} \sin \omega t$, $U_2 = 10$ в. Определить входное сопротивление нагруженной линии при: 1) $Z_H = 2Z_B$; 2) $Z_H = 0,5 Z_B$.

12.20. Вторичные параметры двухпроводной воздушной цепи из стальных проводов диаметром 4 мм при частоте $f = 800$ гц имеют $Z_B = 1350 e^{-j24^\circ}$ ом, $\alpha = 17,5$ мнел/км, $\beta = 0,039$ рад/км.

Длина линии 20 км. Концы линии разомкнуты. В начале линии действует напряжение $u_1 = U_{1m} \sin \omega t$ ($U_1 = 10$ в, $f = 800$ гц).

Определить действующие значения напряжения в конце линии и тока в начале линии в режиме холостого хода и написать уравнения их мгновенных значений.

12.21. Линия, параметры которой приведены в задаче 12.20, замкнута на активное сопротивление $r_H = 1000$ ом. К началу линии подведено напряжение $u_1 = U_{1m} \sin \omega t$ ($U_1 = 10$ в, $f = 800$ гц).

Вычислить комплексные значения напряжения U_2 и тока I_2 в конце линии, тока в начале линии I_1 и написать уравнения их мгновенных значений. Подсчитать комплексные значения прямой и обратной волн напряжения и тока в начале и в конце линии.

12.22. Воздушная стальная линия длиной $l = 38$ км имеет параметры, вычисленные в задачах 12.1 и 12.2. Линия нагружена на со-

противление Z_n , равное волновому. Напряжение на входе линии $U_1 = 10$ в, его частота $f = 800$ гц.

Определить: 1) коэффициент отражения от конца линии; 2) входное сопротивление нагруженной линии; 3) собственное затухание в линии; 4) ток в начале линии, напряжение и ток на нагрузке; 5) мощность, расходуемую в нагрузке и подводимую к линии, и ее к.п.д.

Решение. 1. Коэффициент отражения согласованно нагруженной линии [см. формулу (12.7)] $\rho_n = 0$.

2. По условию линия нагружена на согласованную нагрузку, поэтому, как известно, ее входное сопротивление равно волновому [это легко получить из формулы (12.15)], т. е. $Z_{вх} = Z_n = 1510 e^{-j20^\circ 21'}$ в.

3. Собственное затухание в линии $\alpha l = 13,6 \cdot 10^{-3} \cdot 38 = 0,505$ nep или $\alpha l = 0,505 \cdot 8,69 = 4,4$ db.

4. Ток в начале линии

$$\dot{I}_1 = \frac{\dot{U}_1}{Z_{вх}} = \frac{10}{1510 e^{-j20^\circ 21'}} = 6,62 \cdot 10^{-3} e^{j20^\circ 21'} \text{ а.}$$

Ввиду согласованной нагрузки в линии будут только прямые волны. Напряжение и ток на нагрузке найдем по (12.8а):

$$\begin{aligned} \dot{U}_n = \dot{U}_2 = \dot{U}_1 e^{-\gamma l} &= \dot{U}_1 e^{-\alpha l} e^{-j\beta l} = 10 e^{-13,6 \cdot 10^{-3} \cdot 38} e^{-j38,4 \cdot 10^{-3} \cdot 38} = \\ &= 10 e^{-0,505} e^{-j1,385} = 6,03 e^{-j79^\circ 21'} \text{ в;} \end{aligned}$$

$$\dot{I}_n = \dot{I}_2 = \frac{\dot{U}_2}{Z_n} = \frac{6,03 e^{-j79^\circ 21'}}{1510 e^{-j20^\circ 21'}} = 4 \cdot 10^{-3} e^{-j59^\circ} \text{ а.}$$

5. Мощности, расходуемая в нагрузке и подводимая к линии, соответственно равны:

$$P_2 = P_n = \text{Re} [\dot{U}_2 \dot{I}_2^*] = \text{Re} [6,03 e^{-j79^\circ 21'} \cdot 4 \cdot 10^{-3} e^{j59^\circ}] = 22,6 \text{ мвт};$$

$$P_1 = \text{Re} [\dot{U}_1 \dot{I}_1^*] = \text{Re} [10 \cdot 6,62 \cdot 10^{-3} \cdot e^{-j20^\circ 21'}] = 62 \text{ мвт.}$$

К.п.д.

$$\eta = \frac{P_2}{P_1} = \frac{22,6}{62} = 0,364.$$

12.23. Линия, параметры которой даны в задаче 12.16, замкнута на сопротивление, равное волновому. Напряжение на ее приемном конце $u_2 = U_{2m} \sin \omega t$ ($U_2 = 10$ в, $f = 10^4$ гц).

Чему равно затухание в линии? Написать уравнения распределения действующих значений напряжения и тока вдоль линии и построить их кривые. Определить комплексные действующие значения напряжения и тока в начале и в конце линии. Записать уравнения мгновенных значений напряжения и тока в начале линии. Вычислить мощность, расходуемую в нагрузке и подводимую к линии. Начертить кривые распределения мгновенных значений напряжения вдоль линии для двух моментов времени: $t = 0$ и $t = 10$ мксек.

В. Неискажающая линия. Схемы замещения линии

12.24. Первичные параметры двухпроводной медной 4-миллиметровой телефонной линии (при $f = 100$ кГц): $r_0 = 14$ ом/км, $L_0 = 2 \cdot 10^{-3}$ гн/км, $g_0 = 5 \cdot 10^{-6}$ сим/км, $C_0 = 6,35 \cdot 10^{-9}$ ф/км.

Вычислить индуктивность L_1 , которую надо включить на каждый километр длины, чтобы линия стала неискажающей. Чему при этом будут равны вторичные параметры линии?

Решение. Линия не будет вносить искажения, если выполняется соотношение (12.18):

$$\frac{r_0}{L_0 + L_1} = \frac{g_0}{C_0}.$$

Отсюда

$$L_1 = \frac{r_0 C_0}{g_0} - L_0 = \frac{14 \cdot 6,35 \cdot 10^{-9}}{5 \cdot 10^{-6}} - 2 \cdot 10^{-3} \approx 15,8 \cdot 10^{-3} \text{ гн/км.}$$

Вторичные параметры линии определяем по (12.20):

$$Z_B = \sqrt{\frac{L_0 + L_1}{C_0}} = \sqrt{\frac{17,8 \cdot 10^{-3}}{6,35 \cdot 10^{-9}}} = 1675 \text{ ом;}$$

$$\alpha = \sqrt{r_0 g_0} = \sqrt{14 \cdot 5 \cdot 10^{-6}} = 8,37 \cdot 10^{-3} \text{ nep/км;}$$

$$\beta = \omega \sqrt{L_0 C_0} = 2\pi \cdot 100 \cdot 10^3 \sqrt{17,8 \cdot 10^{-3} \cdot 6,35 \cdot 10^{-9}} = 6,68 \text{ рад/км.}$$

12.25. Неискажающая линия длиной $l = 100$ км, параметры которой при $f = 100$ кГц равны $r_0 = 14$ ом/км, $L_0 = 17,8 \cdot 10^{-3}$ гн/км, $g_0 = 5 \cdot 10^{-6}$ сим/км, $C_0 = 6,35 \cdot 10^{-9}$ ф/км (см. задачу 12.24), нагружена на сопротивление, равное волновому. К началу линии подведено напряжение $U_1 = 10$ в. Определить напряжение и ток на нагрузке и ток на ее входных зажимах. Вычислить мощность, расходуемую в нагрузке и подводимую к линии. Построить кривые распределения действующих значений напряжения и тока вдоль линии.

Решение. В расчетах потребуются вторичные параметры, которые были вычислены в задаче 12.24.

Напряжение и ток в нагрузке вычисляем по (12.8а):

$$\begin{aligned} \dot{U}_2 &= U_1 e^{-\gamma l} = 10 e^{-(\alpha + j\beta)l} = 10 e^{-(8,37 \cdot 10^{-3} + j6,68)100} = \\ &= 10 e^{-0,837} e^{-j668} = 4,33 e^{-j668} \text{ в;} \end{aligned}$$

$$\dot{I}_2 = \frac{\dot{U}_2}{Z_B} = \frac{4,33 e^{-j668}}{1675} = 2,58 e^{-j668} \text{ ма.}$$

Ток на входных зажимах определяем исходя из того, что при нагрузке линии на сопротивление, равное волновому, входное сопротивление такой линии равно волновому:

$$I_1 = \frac{U_1}{Z_B} = \frac{10}{1675} = 5,98 \text{ ма.}$$

Мощности, расходуемая в нагрузке и подводимая к линии, соответственно равны:

$$P_2 = U_2 I_2 = 4,33 \cdot 2,58 \cdot 10^{-3} = 11,2 \text{ ватт};$$

$$P_1 = U_1 I_1 = 10 \cdot 5,98 \cdot 10^{-3} = 59,8 \text{ ватт}.$$

Распределение действующих значений напряжения и тока вдоль линии находим по уравнениям:

$$U(x) = |U_1 e^{-\gamma x}| = U_1 e^{-\alpha x} = 10 e^{-8,37 \cdot 10^{-3} x} \text{ в};$$

$$I(x) = |I_1 e^{-\gamma x}| = I_1 e^{-\alpha x} = 5,98 e^{-8,37 \cdot 10^{-3} x} \text{ ма}.$$

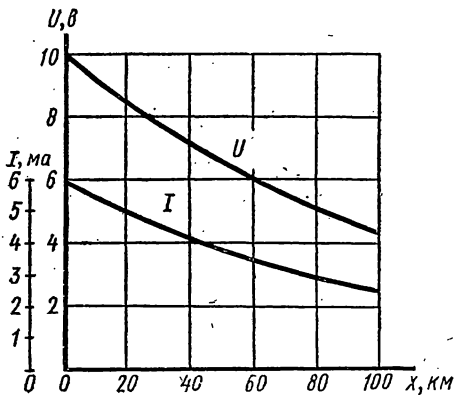


Рис. 12.3

Эти кривые имеют вид экспонент и построены на рис. 12.3.

12.26. Как следует изменить индуктивность воздушной медной линии задачи 12.5, чтобы она удовлетворяла условию неискаженной передачи? Чему в этом случае равны Z_B , α , β ?

Эта неискажающая линия длиной $l = 250$ км нагружена на активное сопротивление, равное волновому при напряжении на нагрузке $U_2 = 10$ в.

Подсчитать напряжение, ток и мощность на входе линии, а также I_2 и P_2 на нагрузке.

12.27. Вычислить сопротивления Т-образной схемы замещения воздушной двухпроводной линии из медных проводов диаметром 3 мм, длиной $l = 100$ км при $f = 800$ гц. Параметры линии взять из задачи 12.5.

12.28. Определить сопротивления П-образной схемы замещения однородной воздушной бронзовой линии диаметром 3 мм, длиной $l = 100$ км при $f = 800$ гц. Данные цепи взять из условия задачи 12.6.

Г. Рабочее затухание линии. Определение параметров линии по опытам холостого хода и короткого замыкания

12.29. К линии, параметры которой даны в задаче 12.13, подведен источник напряжения с э.д.с. $E = 20$ в, частотой $f = 800$ гц и внутренним сопротивлением $Z_r = 600$ ом. Линия нагружена на сопротивление $Z_n = 1355 e^{j21^\circ 5'}$ ом, при этом ее входное сопротивление равно $1732 e^{-j34^\circ 8'}$ ом. Определить напряжение и ток в начале линии и в нагрузке. Чему равно рабочее затухание линии?

Решение. Зная входное сопротивление линии между зажимами 1-1', нагруженной на сопротивление Z_H , по закону Ома найдем ток I_1 и напряжение U_1 в начале линии:

$$I_1 = \frac{E}{Z_r + Z_{вх}} = \frac{20}{600 + 1732e^{-j34^\circ 8'}} = 8,9e^{j25^\circ 30'} \text{ ма};$$

$$U_1 = I_1 Z_{вх} = 8,9 \cdot 10^{-3} e^{j25^\circ 30'} \cdot 1732 e^{-j34^\circ 8'} = 15,4 e^{-j8^\circ 38'} \text{ в}.$$

Напряжение и ток в нагрузке можно вычислить по формулам (12.136) и (12.146), аналогично тому как это сделано в задаче 12.13. Не приводя подробных расчетов, запишем окончательные результаты:

$$U_2 = 8,5e^{-j61^\circ 3'} \text{ в}; \quad I_2 = 6,27e^{-j82^\circ 8'} \text{ ма}.$$

Рабочее затухание линии вычислим по формуле (12.21), для этого сначала определим величины отдельных слагаемых, входящих в эту формулу:

$$\rho_r = \frac{Z_r - Z_B}{Z_r + Z_B} = \frac{600 - 1510e^{-j20^\circ 21'}}{600 + 1510e^{-j20^\circ 21'}} = \frac{968e^{j147^\circ 10'}}{2080e^{-j14^\circ 35'}} = 0,466e^{j161^\circ 45'};$$

$$\rho_H = 0,382e^{j98^\circ 30'} \text{ (найдено в решении задачи 12.14);}$$

$$\rho_r \rho_H = 0,466e^{j161^\circ 45'} \cdot 0,382e^{j98^\circ 30'} = 0,178e^{j260^\circ 15'};$$

$$\gamma l = 0,505 + j1,385 \text{ (найдено в решении задачи 12.13; } 1,385 \text{ рад} = 79^\circ 21'); \quad \rho_r \rho_H e^{-2\gamma l} = 0,178e^{j260^\circ 15'} e^{-1,01} e^{-j158^\circ 42'} = 0,065e^{j101^\circ 33'} = -0,013 + j0,064;$$

$$\ln |1 - \rho_r \rho_H e^{-2\gamma l}| = \ln |1,013 - j0,064| = \ln |1,013e^{-j3^\circ 36'}| = \ln 1,013 = 0,013;$$

$$\ln \left| \frac{Z_r + Z_B}{2\sqrt{Z_r Z_B}} \right| = \ln \left| \frac{600 + 1510e^{-j20^\circ 21'}}{2\sqrt{600 \cdot 1510e^{-j20^\circ 21'}}} \right| = \ln \left| \frac{2080e^{-j14^\circ 35'}}{1950e^{-j10^\circ 11'}} \right| = \ln 1,09 = 0,086 \text{ неп};$$

$$\ln \left| \frac{Z_H + Z_B}{2\sqrt{Z_H Z_B}} \right| = \ln \left| \frac{1355e^{j21^\circ 5'} + 1510e^{-j20^\circ 21'}}{2\sqrt{1355e^{-j21^\circ 5'} \cdot 1510e^{-j20^\circ 21'}}} \right| = \ln \left| \frac{2680e^{-j0^\circ 5'}}{2860e^{j0^\circ 11'}} \right| = \ln 0,936 = -0,066 \text{ неп}.$$

Наконец, по формуле (12.21) искомое рабочее затухание $a_p = 0,505 + 0,086 - 0,066 + 0,013 = 0,538 \text{ неп}$.

12.30. Измерения сопротивления холостого хода $Z_{1x.x}$ и короткого замыкания $Z_{1к.з}$ воздушной двухпроводной телефонной линии длиной 200 км при угловой частоте $\omega = 5000 \text{ сек}^{-1}$ дали результаты: $Z_{1x.x} = 747e^{-j26^{\circ}30'}$ ом, $Z_{1к.з} = 516e^{j0^{\circ}30'}$ ом. Определить вторичные ($Z_B, \alpha, \beta, \gamma$) и первичные (r_0, L_0, g_0, C_0) параметры линии.

Решение. Входные сопротивления линии при холостом ходе и коротком замыкании по формулам (12.16) соответственно равны:

$$Z_{1x.x} = \frac{Z_B}{\text{th } \gamma l}; \quad Z_{1к.з} = Z_B \text{th } \gamma l.$$

Перемножая эти выражения, найдем

$$Z_B = \sqrt{Z_{1x.x} Z_{1к.з}} = 620e^{-j13^{\circ}} = (587 - j139,5) \text{ ом},$$

а поделив их, получим

$$\text{th } \gamma l = \sqrt{\frac{Z_{1к.з}}{Z_{1x.x}}} = 0,83e^{j13^{\circ}30'} = 0,806 + j0,193,$$

но

$$\text{th } \gamma l = \frac{e^{\gamma l} - e^{-\gamma l}}{e^{\gamma l} + e^{-\gamma l}} = \frac{e^{\gamma l}}{e^{\gamma l}} = \frac{e^{2\gamma l} - 1}{e^{2\gamma l} + 1}.$$

откуда,

$$e^{2\gamma l} = \frac{1 + \text{th } \gamma l}{1 - \text{th } \gamma l} = \frac{1,806 + j0,193}{0,194 - j0,193} = 6,72e^{j(51^{\circ} + 360^{\circ}n)},$$

где n — целое число.

Так как $e^{2\gamma l} = e^{2\alpha l} e^{j2\beta l}$, то $e^{2\alpha l}$ — модуль комплексного числа, а $2\beta l$ — его аргумент:

$$e^{2\alpha l} = 6,72 \text{ и } \alpha = \frac{1}{2l} \ln 6,72 = 47,5 \cdot 10^{-4} \text{ nep/км};$$

$$2\beta l = 51^{\circ} + 360^{\circ}n = (0,89 + 2\pi n) \text{ рад}.$$

Для определения величины n , которая должна быть взята в последней формуле целым положительным числом, необходимо приблизительно знать величины L_0 и C_0 измеряемой линии, а следовательно, знать приблизительно число 2π радиан, которое содержится в выражении $2\beta l$.

Так как для медных цепей

$$\beta \approx \omega \sqrt{L_0 C_0} \text{ и } 2\beta l = 2l\omega \sqrt{L_0 C_0},$$

приблизительное число окружностей

$$n = \frac{2l\omega \sqrt{L_0 C_0}}{2\pi} = \frac{l\omega \sqrt{L_0 C_0}}{\pi},$$

где L' и C' — приблизительные величины, известные из предыдущих измерений или вычисленные по теоретическим формулам.

Этой формулой можно пользоваться и для стальных цепей.

В данном случае примем величины (известные из предыдущих задач) для $L' \approx 2 \cdot 10^{-3}$ гн/км и $C' \approx 6 \cdot 10^{-9}$ ф/км (см., например, ответ к задаче 12.5) и тогда

$$n = \frac{200 \cdot 5000 \sqrt{2 \cdot 10^{-3} \cdot 6 \cdot 10^{-9}}}{\pi} = 1,15,$$

хотя здесь и получается дробное число, но n должно быть взято ближайшим целым числом, т. е. $n = 1$.

Таким образом,

$$2\beta l = 0,89 + 2\pi = 7,17;$$

$$\beta = \frac{7,17}{2 \cdot 200} = 180 \cdot 10^{-4} \text{ рад/км};$$

$$\gamma = \alpha + j\beta = (47,5 + j180) 10^{-4} = 186 \cdot 10^{-4} e^{j75^\circ} \text{ км}^{-1}.$$

Определим первичные параметры линии. Для этого воспользуемся выражениями (12.1) и (12.2):

$$\gamma = \sqrt{(r_0 + j\omega L_0)(g_0 + j\omega C_0)} = 186 \cdot 10^{-4} e^{j75^\circ} \text{ км}^{-1};$$

$$Z_{в.} = \sqrt{\frac{r_0 + j\omega L_0}{g_0 + j\omega C_0}} = 620 e^{-j13^\circ} \text{ ом}.$$

Их произведение

$$\gamma Z_{в.} = r_0 + j\omega L_0 = (5,4 + j10,2) \text{ ом/км}.$$

откуда

$$r_0 = 5,4 \text{ ом/км};$$

$$L_0 = 10,2/5000 = 2,04 \cdot 10^{-3} \text{ гн/км}.$$

Из отношения

$$\gamma/Z_{в.} = g_0 + j\omega C_0 = (0,96 \cdot 10^{-6} + j30 \cdot 10^{-6}) \text{ сим/км}$$

найдем, что

$$g_0 = 0,96 \cdot 10^{-6} \text{ сим/км};$$

$$C_0 = \frac{30 \cdot 10^{-6}}{5000} = 6 \cdot 10^{-9} \text{ ф/км}.$$

12.31. Сопротивления воздушной бронзовой линии длиной $l = 250$ км были измерены при частоте $f = 800$ гц, холостом ходе и коротком замыкании и оказались равными:

$$Z_{х.х} = 525 e^{-j17^\circ} \text{ ом}; \quad Z_{к.з} = 720 e^{-j9^\circ 40'} \text{ ом}.$$

Определить $Z_{в.}$ и γ , а также первичные параметры линии r_0 , L_0 , C_0 , g_0 .

Д. Расчет уровней передачи

12.32. По данным задачи 12.13 для несогласованно нагруженной линии определить: 1) абсолютные уровни передачи по мощности, напряжению, току в начале и в конце линии; 2) относительный уровень передачи тех же величин на нагрузке по отношению к началу линии.

Решение. 1) Абсолютные уровни передачи по мощности, напряжению, току в начале линии по формулам (12.12) соответственно равны:

$$p_{a p_1} = \frac{1}{2} \ln \frac{P_1 (\text{мва})}{1 (\text{мва})} = \frac{1}{2} \ln \frac{U_1 I_1}{1} = \frac{1}{2} \ln \frac{10 \cdot 5,75}{1} = 2,03 \text{ неп.}$$

$$p_{a U_1} = \ln \frac{U_1 (\text{в})}{0,775 (\text{в})} = \ln \frac{10}{0,775} = 2,56 \text{ неп.}$$

$$p_{a I_1} = \ln \frac{I_1 (\text{ма})}{1,29 (\text{ма})} = \ln \frac{5,75}{1,29} = 1,49 \text{ неп.}$$

Те же величины в конце линии:

$$p_{a p_H} = \frac{1}{2} \ln \frac{P_2 (\text{мва})}{1 (\text{мва})} = \frac{1}{2} \ln \frac{U_2 I_2}{1} = \frac{1}{2} \ln \frac{5,45 \cdot 4,02}{1} = 1,54 \text{ неп.}$$

$$p_{a U_H} = \ln \frac{U_2 (\text{в})}{0,775 (\text{в})} = \ln \frac{5,45}{0,775} = 1,14 \text{ неп.}$$

$$p_{a I_H} = \ln \frac{I_2 (\text{ма})}{1,29 (\text{ма})} = \ln \frac{4,02}{1,29} = 1,14 \text{ неп.}$$

2) Относительные уровни передачи по мощности, напряжению и току на нагрузке по отношению к началу линии равны разности соответствующих абсолютных уровней:

$$p_p = p_{a p_H} - p_{a p_1} = 1,54 - 2,03 = -0,49 \text{ неп.}$$

$$p_U = p_{a U_H} - p_{a U_1} = 1,95 - 2,56 = -0,61 \text{ неп.}$$

$$p_I = p_{a I_H} - p_{a I_1} = 1,14 - 1,49 = -0,35 \text{ неп.}$$

Между относительными уровнями передачи p_p , p_U и p_I имеется расхождение, оно объясняется тем, что входное сопротивление цепи ($Z_{\text{вх}} = \frac{U_1}{I_1} = 1740 e^{-j34^\circ} \text{ ом}$) и сопротивление нагрузки ($Z_H = \frac{U_2}{I_2} = 1355 e^{j21^\circ 55'} \text{ ом}$) отличаются друг от друга.

12.33. По данным задачи 12.22 для согласованно нагруженной линии рассчитать: 1) абсолютный уровень передачи по мощности, напряжению и току в начале и в конце линии; 2) относительный уровень передачи тех же величин на нагрузке по отношению к началу линии.

Решение. 1. Расчет абсолютных уровней передачи по мощности, напряжению и току в начале и в конце линии проводим по формулам (12.12):

$$p_{a p_1} = \frac{1}{2} \ln \frac{P_1 (\text{мва})}{1 (\text{мва})} = \frac{1}{2} \ln \frac{U_1 I_1}{1} = \frac{1}{2} \ln \frac{10 \cdot 6,62}{1} = 2,096 \text{ неп};$$

$$p_{a U_1} = \ln \frac{U_1 (\text{в})}{0,775} = \ln \frac{10}{0,775} = 2,557 \text{ неп};$$

$$p_{a I_1} = \ln \frac{I_2 (\text{ма})}{1,29 (\text{ма})} = \ln \frac{6,62}{1,29} = 1,635 \text{ неп};$$

$$p_{a p_H} = \frac{1}{2} \ln \frac{P_2 (\text{мва})}{1 (\text{мва})} = \frac{1}{2} \ln \frac{U_2 I_2}{1} = \frac{1}{2} \ln \frac{6,03 \cdot 4}{1} = 1,59 \text{ неп};$$

$$p_{a U_H} = \ln \frac{U_2 (\text{в})}{0,775 (\text{в})} = \ln \frac{6,03}{0,775} = 2,051 \text{ неп};$$

$$p_{a I_H} = \ln \frac{I_2 (\text{ма})}{1,29 (\text{ма})} = \ln \frac{4}{1,29} = 1,131 \text{ неп}.$$

2. Относительные уровни передачи определяем по формулам (12.11):

$$p_p = \frac{1}{2} \ln \frac{P_2 (\text{мва})}{P_1 (\text{мва})} = \frac{1}{2} \ln \frac{6,03 \cdot 4}{10 \cdot 6,62} = -506 \text{ неп};$$

$$p_U = \ln \frac{U_2}{U_1} = \ln \frac{6,03}{10} = -506 \text{ неп};$$

$$p_I = \ln \frac{I_2}{I_1} = \ln \frac{4}{6,62} = -506 \text{ неп}.$$

Все относительные уровни передачи имеют одинаковые значения, что объясняется условиями согласованной нагрузки. Каждый из относительных уровней равен разности соответствующих абсолютных уровней:

$$p_p = p_{a p_H} - p_{a p_1}; \quad p_U = p_{a U_H} - p_{a U_1}; \quad p_I = p_{a I_H} - p_{a I_1}.$$

Е. Линия без потерь. Стоячие волны

12.34. Энергия передается на высокой частоте от генератора к излучающей системе с помощью фидера (линии), имеющего индуктивность $L_0 = 1,57 \text{ мкГн/м}$ и емкость $C_0 = 7,1 \text{ пФ/м}$. Потерями в фидере можно пренебречь ($r_0 = g_0 = 0$). Частота переменного тока $f = 10^8 \text{ Гц}$.

Определить: а) волновое сопротивление, коэффициенты затухания и фазы, длину волны; б) входное сопротивление отрезка этого фидера длиной в $1/8$ длины волны при холостом ходе и коротком замыкании; в) расчет повторить для отрезков фидера длиной в $1/4$, $3/8$ и $1/2$ длины волны. Для каждого из рассчитанных случаев начер-

тить эквивалентную схему фидера; г) начертить кривые изменения входных сопротивлений $Z_{x,x}$ и $Z_{к,з}$ в функции длины фидера.

Решение. а) Вычислим Z_B , β и λ соответственно по формулам (12.20) и (12.3):

$$Z_B = z_B = \sqrt{\frac{1,57 \cdot 10^{-6}}{7,1 \cdot 10^{-12}}} = 470 \text{ ом};$$

$$\beta = \frac{\omega}{v_{\phi}} = \omega \sqrt{L_0 C_0} = 2\pi \cdot 10^8 \sqrt{1,57 \cdot 10^{-6} \cdot 7,1 \cdot 10^{-12}} = 2,10 \text{ рад/км};$$

$$\lambda = \frac{2\pi}{\beta} = \frac{2\pi}{2,10} = 3 \text{ м.}$$

б) Из формулы (12.3) находим $\beta\lambda = 2\pi$, а для фидера длиной $l = \frac{1}{8} \lambda$

$$\beta l = \beta \frac{1}{8} \lambda = \frac{2\pi}{8} = \frac{\pi}{4}.$$

Входные сопротивления определим по (12.25):

$$Z_{x,x} = Z_B \frac{1}{j \operatorname{tg} \beta l} = Z_B \frac{1}{j \operatorname{tg} \frac{\pi}{4}} = -jZ_B = -j470 \text{ ом};$$

$$Z_{к,з} = jZ_B \operatorname{tg} \beta l = jZ_B \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} = j470 \text{ ом.}$$

Эквивалентная схема двухполюсника при холостом ходе — емкость с сопротивлением 470 ом, при коротком замыкании — индуктивность с сопротивлением 470 ом.

Расчет для других длин фидера рекомендуем проделать самостоятельно:

$$\text{при } l = \frac{1}{4} \lambda \quad Z_{x,x} = 0, \quad Z_{к,з} = \infty;$$

$$\text{при } l = \frac{3}{8} \lambda \quad Z_{x,x} = j470 \text{ ом}, \quad Z_{к,з} = -j470 \text{ ом};$$

$$\text{при } l = \frac{1}{2} \lambda \quad Z_{x,x} = \infty, \quad Z_{к,з} = 0.$$

Кривые изменения входного сопротивления в функции длины l фидера могут быть рассчитаны по уравнениям (12.25):

при холостом ходе $Z_H = \infty$, $Z_{x,x} = -jZ_B \operatorname{tg} \beta y$;

при коротком замыкании $Z_H = 0$, $Z_{к,з} = jZ_B \operatorname{tg} \beta y$.

Во всех рассмотренных случаях входное сопротивление линии является чисто реактивным $Z = jx$ ($Z_{x,x} = jx_{x,x}$, $Z_{к,з} = jx_{к,з}$).

Кривая $x_{к.х} = f_1(y)$ имеет вид котангенсоиды, а кривая $x_{к.з} = f_2(y)$ — тангенсоиды (рис. 12.4, а и б).

12.35. Линия без потерь, имеющая волновое сопротивление $Z_в = 500 \text{ ом}$, питается напряжением частотой $f = 10^8 \text{ гц}$. Определить амплитуду тока при холостом ходе в точке, находящейся от конца линии на расстоянии $y = 0,5 \text{ м}$, если напряжение на конце линии $U_{2м} = 100 \text{ мв}$.

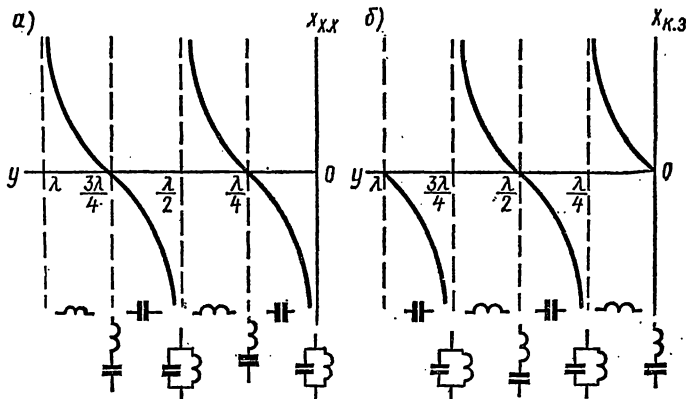


Рис. 12.4

12.36. Фидер, параметры которого приведены в предыдущей задаче, имеет длину $l = 5 \text{ м}$ и находится в режиме холостого хода. Подсчитать действующие значения напряжения в конце и тока в начале линии, если к фидеру подключено напряжение $u_1 = U_{1м} \sin \omega t$ ($U_1 = 10 \text{ в}$, $f = 10^8 \text{ гц}$). Начертить кривые распределения действующих значений напряжения и тока вдоль фидера. Написать уравнения мгновенных значений напряжения и тока в начале фидера. Начертить кривые распределения мгновенных значений напряжения и тока вдоль фидера для двух моментов времени: $t = 0$ и $t = T/8$. Определить коэффициенты отражения и бегущей волны.

Р е ш е н и е. Подсчитаем величины, которые потребуются в дальнейших расчетах, а именно:

$$\beta l = 2,1 \cdot 5 = 10,5 \text{ рад} = (4,22 + 2\pi) \text{ рад};$$

$$\cos \beta l = \cos (4,22 + 2\pi) = -0,472;$$

$$\sin \beta l = \sin (4,22 + 2\pi) = -0,881.$$

Примем $\dot{U}_1 = U_1 = 10 \text{ в}$. Из формулы (12.226) для режима холостого хода ($\dot{I}_2 = 0$) определим действующее значение напряжения в конце линии ($y = l$):

$$\dot{U}_2 = \frac{U_1}{\cos \beta l} = \frac{10}{-0,472} = -21,2 \text{ в}.$$

Действующее значение тока в начале линии вычислим по (12.23,б):

$$I_1 = j \frac{U_2}{Z_B} \sin \beta l = j \frac{-21,2}{470} (-0,881) = j 39,7 \text{ ма.}$$

Комплексные действующие вдоль линии значения напряжений и токов могут быть записаны на основании формул (12.22,б) и (12.23,б):

$$\dot{U}(y) = \dot{U}_2 \cos \beta y = -21,2 \cos (2,1y) \text{ в;}$$

$$\dot{I}(y) = j \frac{\dot{U}_2}{Z_B} \sin \beta y = -j \frac{21,2}{470} \sin (2,1y) = -j 45 \sin (2,1y) \text{ ма.}$$

Действующие значения напряжений и токов соответственно равны:

$$U(y) = |-21,2 \cos (2,1y)| \text{ в;}$$

$$I(y) = |-45 \sin (2,1y)| \text{ ма.}$$

По этим уравнениям на рис. 12.5, а построены соответствующие кривые.

Запишем в общем виде уравнения мгновенных значений напряжений и токов в режиме холостого хода ($I_2 = 0$):

$$u = U_{2m} \cos \beta y \cdot \sin \omega t; \quad i = \frac{U_{2m}}{Z_B} \sin \beta y \cdot \cos \omega t.$$

Для момента $t = 0$ эти уравнения примут вид:

$$u = 0; \quad i = \frac{U_{2m}}{Z_B} \sin \beta y = -\frac{21,2 \sqrt{2}}{470} \sin (2,1y) = -63,6 \sin (2,1y) \text{ ма.}$$

Для момента $t = T/8$:

$$u = U_{2m} \cos \beta y \sin \omega \frac{T}{8} = -21,2 \cos \beta y \sin \frac{\pi}{4} = -21,2 \cos (2,1y) \text{ в;}$$

$$i = \frac{U_{2m}}{Z_B} \sin \beta y \cos \omega \frac{T}{8} = -\frac{21,2 \sqrt{2}}{470} \cos \frac{\pi}{4} \sin \beta y = -45 \sin (2,1y) \text{ ма.}$$

На рис. 12.5, б построены кривые напряжения и тока для моментов $t = 0$ и $T/8$.

Коэффициент отражения со стороны нагрузки определяем по (12.7):

$$\rho_{\text{н}} = \frac{Z_{\text{н}} - Z_{\text{в}}}{Z_{\text{н}} + Z_{\text{в}}} \Big|_{Z_{\text{н}} \rightarrow \infty} = 1.$$

Коэффициент бегущей волны

$$K_{б,в} = \frac{1 - |\rho_H|}{1 + |\rho_H|} = 0.$$

12.37. Фидер без потерь, параметры которого $L_0 = 1,57 \text{ мкГн/м}$, $C_0 = 7,1 \text{ пФ/м}$, имеет длину $l = 35 \text{ м}$ и нагружен на сопротивление, равное волновому. Напряжение на приемном конце фидера $u_2 = U_{2m} \sin \omega t$ ($U_{2m} = 10 \text{ мВ}$, $f = 10^8 \text{ Гц}$).

Написать выражения для мгновенных значений напряжения u_1 и тока i_1 в начале фидера. Построить кривую распределения действующих значений напряжения U и тока I вдоль линии. Определить коэффициенты отражения и бегущей волны. Начертить кривые распределения мгновенных значений тока и напряжения в функции расстояния для трех моментов времени:

$$t_1 = 0, \quad t_2 = T/8, \quad t_3 = T/4.$$

12.38. Линия без потерь, параметры которой $L_0 = 1,67 \text{ мкГн/м}$, $C_0 = 6,67 \text{ пФ/м}$ и длина $l = 5 \text{ м}$, нагружена на чисто активное сопротивление r_2 , равное $5z_B$. Напряжение на нагрузке $U_2 = 10 \text{ В}$, частота 10^8 Гц .

Определить напряжение и ток в начале линии и входное сопротивление линии. Рассчитать и начертить графики изменения действующих значений напряжения U и тока I , активной $r_{вх}$ и реактивной $x_{вх}$ составляющих входного сопротивления нагруженной линии. Определить коэффициенты бегущей и стоячей волн.

Решение. Сначала по (12.20) определяем z_B и β :

$$z_B = \sqrt{\frac{L_0}{C_0}} = \sqrt{\frac{1,67 \cdot 10^{-6}}{6,67 \cdot 10^{-12}}} = 500 \text{ ом};$$

$$\beta = \omega \sqrt{L_0 C_0} = 2\pi \cdot 10^8 \sqrt{1,67 \cdot 10^{-6} \cdot 6,67 \cdot 10^{-12}} \approx 2,1 \text{ рад/м}.$$

Сопротивление нагрузки

$$r_2 = 5z_B = 5 \cdot 500 = 2500 \text{ ом}.$$

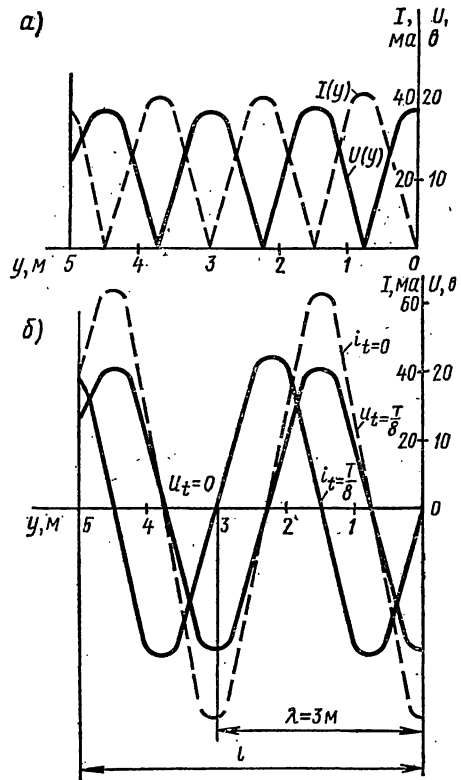


Рис. 12.5

Комплексные напряжение и ток в начале линии определяем по (12.226) и (12.236):

$$\begin{aligned} \dot{U}_1 &= \dot{U}_2 \cos \beta l + j I_2 z_B \sin \beta l = 10 \cos (2,1 \cdot 5) + j \frac{10}{2500} 500 \sin (2,1 \cdot 5) = \\ &= -5 - j1,73 = 5,3e^{-j160^\circ 55'} \text{ в}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{I}_1 &= \dot{I}_2 \cos \beta l + j \frac{\dot{U}_2}{z_B} \sin \beta l = \frac{10}{2500} \cos (2,1 \cdot 5) + j \frac{10}{500} \sin (2,1 \cdot 5) = \\ &= -2 - j17,3 = 17,5e^{-j96^\circ 35'} \text{ ма}. \end{aligned}$$

Разделив \dot{U}_1 на \dot{I}_1 , получим

$$Z_{\text{вх}} = \frac{U_1}{I_1} = \frac{5,3e^{-j160^\circ 55'}}{17,5 \cdot 10^{-3}e^{-j96^\circ 35'}} = 312e^{-j64^\circ 20'} \text{ ом}.$$

Распределение действующих значений напряжения и тока находим по (12.26), в которых $m = z_B/r_2 = 500/2500 = 0,2$:

$$U(y) = U_2 \sqrt{\cos^2 \beta y + m^2 \sin^2 \beta y} = 10 \sqrt{\cos^2 \beta y + 0,04 \sin^2 \beta y};$$

$$I(y) = \frac{U_2}{z_B} \sqrt{m^2 \cos^2 \beta y + \sin^2 \beta y} = \frac{10}{500} \sqrt{0,04 \cos^2 \beta y + \sin^2 \beta y}.$$

Для построения кривых $U(y)$ и $I(y)$ в функции y удобно составить табл. 12.2.

Таблица 12.2

βy	$\cos \beta y$	$\cos^2 \beta y$	$m^2 \cos^2 \beta y$	$\sin \beta y$	$\sin^2 \beta y$	$m^2 \sin^2 \beta y$	$U, \text{ в}$	$I, \text{ ма}$
0	1	1	0,04	0	0	0	10	4
$\pi/8$	0,924	0,854	0,034	0,383	0,147	0,0059	9,26	9,5
$\pi/4$	0,707	0,5	0,02	0,707	0,5	0,02	7,21	14,4
$3\pi/8$	0,383	0,147	0,0059	0,924	0,854	0,034	4,26	18,5
$\pi/2$	0	0	0	0	0	0,04	2,0	20

Кривые $U(y)$ и $I(y)$ являются четными функциями величины βy . Они изображены на рис. 12.6, а.

Расчет кривых распределения активных $r_{\text{вх}}$ и реактивных $x_{\text{вх}}$ составляющих входного сопротивления проводится по формуле (12.24), в которой после отделения вещественной и мнимой составляющих получим:

$$\begin{aligned} z_{\text{вх}} &= \frac{mz_B}{m^2 \cos^2 \beta y + \sin^2 \beta y} = \frac{100}{0,04 \cos^2 \beta y + \sin^2 \beta y}; \\ x_{\text{вх}} &= \frac{0,5z_{\text{вх}} \left(1 - \frac{1}{m^2} \sin 2\beta y\right)}{\cos^2 \beta y + \frac{1}{m^2} \sin^2 \beta y} = -\frac{6000 \sin 2\beta y}{\cos^2 \beta y + 25 \sin^2 \beta y}. \end{aligned}$$

По этим уравнениям на рис. 12.6, б построены кривые $r_{вх}$ и $x_{вх}$ в функции βy .

Коэффициенты бегущей и стоячей волн определяем по (12.27):

$$K_{б.в} = \frac{U_{\min}}{U_{\max}} = \frac{2}{10} = 0,2;$$

$$K_{с.в} = \frac{1}{K_{б.в}} = \frac{1}{0,2} = 5.$$

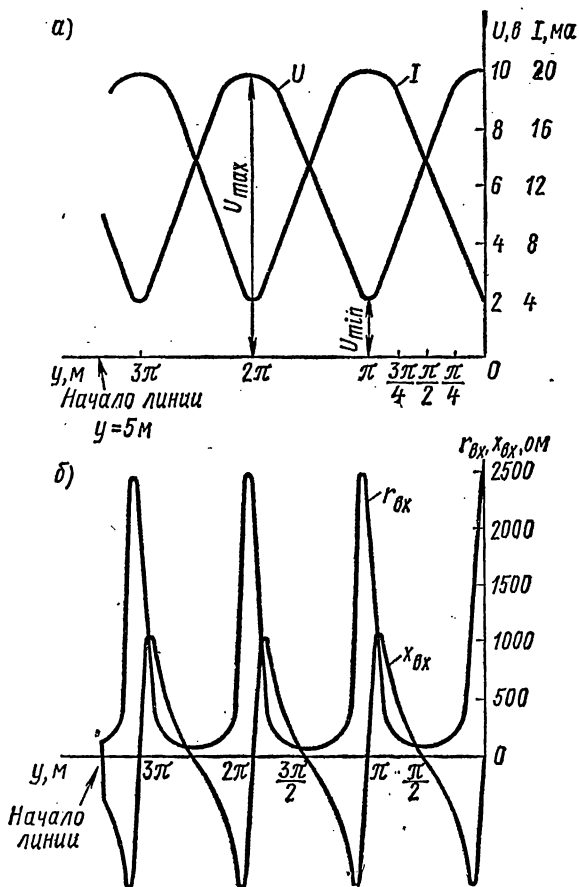


Рис. 12.6

12.39. Решить задачу 12.37 при нагрузке фидера на сопротивление $Z_n = 2Z_в$.

12.40. Линия без потерь имеет длину $l = 200$ м и параметры $L_0 = 2 \cdot 10^{-8}$ гн/м и $C_0 = 5,55 \cdot 10^{-8}$ мкф/м. Длина волны в линии $\lambda = 60$ м. В конце линии включена индуктивность $L = 0,01$ мгн.

Найти вторичные параметры линии. Доказать, что в линии будут стоячие волны тока и напряжения.

Найти: 1) на каком расстоянии от конца линии будут ближайшие пучности напряжения и тока; 2) отношение амплитуд напряжения и тока в пучности и в конце линии; 3) отношение амплитуд напряжения и тока в пучности и в начале линии.

Решение. Волновое сопротивление линии

$$Z_B = \sqrt{L_0/C_0} = 600 \text{ ом.}$$

Коэффициент фазы

$$\beta = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{6,28}{60} = 0,1047 \text{ рад/м.}$$

Пользуясь уравнениями (12.13б) и (12.14б) и имея в виду, что

$$Z_B = z_B, \quad \gamma = j\beta \quad \text{и} \quad \dot{I}_2 = \dot{U}_2/jx,$$

где

$$jx = j\omega L = Z_H = j2\pi fL = j2\pi \frac{3 \cdot 10^8}{60} 0,01 \cdot 10^{-3} = j314 \text{ ом,}$$

получим:

$$\dot{U}(y) = \dot{U}_2 \left(\cos \beta y + \frac{z_B}{x} \sin \beta y \right) = \frac{U_2}{\cos \delta} \cos(\beta y - \delta);$$

$$\dot{I}(y) = \dot{I}_2 \left(\cos \beta y - \frac{x}{z_B} \sin \beta y \right) = -\frac{I_2}{\sin \delta} \sin(\beta y - \delta),$$

где

$$\delta = \arctg \frac{z_B}{x} = \arctg \frac{600}{314} = 62^\circ 30' = 1,09 \text{ рад.}$$

Переходя к мгновенным значениям и считая, что напряжение имеет начальную фазу, равную нулю (т. е. $\dot{U}_2 = U_2$), тогда $\dot{I}_2 = -jI_2$, $-\dot{I}_2 = jI_2 = I_2 e^{j90^\circ}$, получим:

$$u = \frac{\sqrt{2}}{\cos \delta} U_2 \cos(\beta y - \delta) \sin \omega t = U_{2m} \cos(\beta y - \delta) \sin \omega t;$$

$$\begin{aligned} i &= \frac{\sqrt{2}}{\sin \delta} I_2 \sin(\beta y - \delta) \cos \omega t = \\ &= I_{2m} \sin(\beta y - \delta) \cos \omega t. \end{aligned}$$

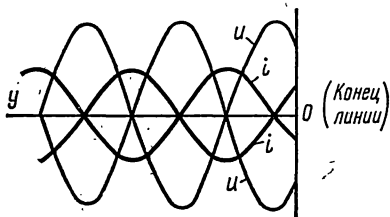


Рис. 12.7

Эти уравнения показывают, что в линии имеют место стоячие волны (рис. 12.7).

Ближайшая от конца линии пучность напряжения определится из уравнения $\cos(\beta y_1 - \delta) = 1$, т. е.

$$\beta y_1 - \delta = 0, \quad y_1 = \frac{\delta}{\beta} = \frac{1,09}{0,1047} = 10,5 \text{ м.}$$

Ближайшая от конца линии пучность тока на расстоянии

$$y_2 = y_1 + \frac{\lambda}{4} = 10,5 + \frac{60}{4} = 25,5 \text{ м.}$$

Отношение амплитуды напряжения в пучности к амплитуде напряжения в конце линии равно

$$\frac{U_2}{\cos \delta} : U_2 = \frac{1}{\cos \delta} = \frac{1}{\cos 62^\circ 30'} = 2,15,$$

а для тока такое отношение имеет вид

$$\frac{I_2}{\sin \delta} : I_2 = \frac{1}{\sin \delta} = 1,13.$$

Отношение амплитуды напряжения в пучности к амплитуде напряжения в начале линии равно

$$\begin{aligned} \frac{U_2}{\cos \delta} : \frac{U_2}{\cos \delta} \cos(\beta l - \delta) &= \frac{1}{\cos(0,1047 \cdot 200 - 1,09)} = \frac{1}{\cos 19,85} = \\ &= \frac{1}{\cos(19,85 - 6\pi)} = \frac{1}{\cos 1} = \frac{1}{\cos 57,3^\circ} = 1,85, \end{aligned}$$

а для тока такое отношение равно

$$\frac{I_2}{\sin \delta} : \frac{I_2}{\sin \delta} \sin(\beta l - \delta) = \frac{1}{\sin 57,3^\circ} = 1,19.$$

12.41. Рассчитать входное сопротивление сверхвысокочастотной длинной линии без потерь, которая нагружена на последовательно включенные сопротивление Z и короткозамкнутый шлейф (короткозамкнутый отрезок длинной линии без потерь), как показано на рис. 12.8. Даны: волновые сопротивления длинной линии и шлейфа $Z_B = Z_{B.ш} = 600 \text{ ом}$, сопротивление $Z = 500 \text{ ом}$, длины линии $l = 190 \text{ см}$ и шлейфа $l_{ш} = 10 \text{ см}$. Длина волны в линии и шлейфа одинакова: $\lambda = \lambda_{ш} = 120 \text{ см}$.

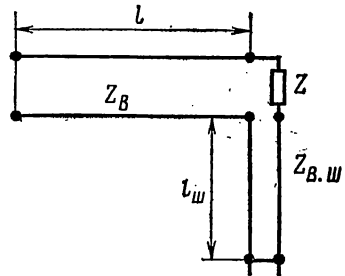


Рис. 12.8

Решение. Входное сопротивление короткозамкнутого шлейфа по (12.25) равно

$$\begin{aligned} Z_{ш} &= Z_{B.ш} j \operatorname{tg}(\beta_{ш} l_{ш}') = Z_{B.ш} j \operatorname{tg}\left(\frac{\beta_{ш} \lambda_{ш}}{\lambda_{ш}} l_{ш}\right) = 600 j \operatorname{tg}\left(\frac{360^\circ \cdot 10}{120}\right) = \\ &= j346 \text{ ом.} \end{aligned}$$

Сопротивление нагрузки длинной линии складывается из входного сопротивления короткозамкнутого шлейфа и сопротивления Z :

$$Z_H = Z_{ш} + Z = j346 + 500 = 610e^{j34^\circ 40'} \text{ ом.}$$

Входное сопротивление длинной линии определяется по (12.15):

$$Z_1 = Z_B \frac{Z_H + jZ_B \operatorname{tg}\left(\frac{360^\circ l}{\lambda}\right)}{Z_B + jZ_H \operatorname{tg}\left(\frac{360^\circ l}{\lambda}\right)} = 1040e^{j18^\circ 20'} \text{ ом.}$$

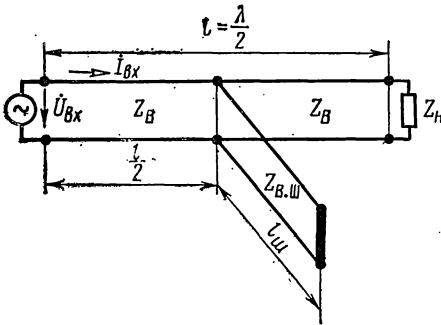


Рис. 12.9

12.42. К्लитронный СВЧ генератор создает на входе длинной линии без потерь напряжение 10 в (рис. 12.9). Линия с волновым сопротивлением $Z_B = 100 \text{ ом}$ нагружена на согласованное сопротивление $Z_H = 100 \text{ ом}$. В средней части линии включен короткозамкнутый шлейф (линия без потерь) с тем же волновым сопротивлением $Z_{B,ш} = 100 \text{ ом}$ и длиной $l_{ш} = \lambda/8$, где $\lambda =$ длина волны, одинаковая в линии и шлейфе. Длина линии $l = \lambda/2$. Рассчитать

входное сопротивление линии и ток клитронного генератора.

12.43. На входе высокочастотной линии связи длиной $l = 1,5 \text{ км}$ создается сигнал напряжением $U_1 = 0,5 \text{ в}$ и частотой $f = 300 \text{ кГц}$.

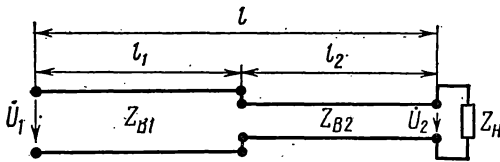


Рис. 12.10

Линия, состоящая из двух участков — медной двухпроводной линии длиной $l_1 = 0,7 \text{ км}$ с параметрами $Z_{B1} = 586 \text{ ом}$, $\beta_1 = 6,46 \text{ рад/км}$ и кабельной линии длиной $l_2 = 0,8 \text{ км}$ с параметрами $Z_{B2} = 76 \text{ ом}$, $\beta_2 = 6,7 \text{ рад/км}$, нагружена на сопротивление приемника

$Z_H = 600 \text{ ом}$ (рис. 12.10). Рассчитать напряжение на приемнике. Потерями в линии связи пренебречь.

Ж. Методы согласования линии с нагрузкой

12.44. Линию, параметры которой приведены в задаче 12.38, требуется согласовать с чисто активной нагрузкой $r_2 = 5z_B$ с помощью четвертьволнового отрезка.

Определить волновое сопротивление z_{B1} этого отрезка так, чтобы в точках *aa* соединения линии со вставкой не было отражения. Пола-

гая, что напряжение на нагрузке $U_2 = 10$ в, $f = 10^8$ гц, вычислить напряжение и ток в начале вставки и в начале линии. Рассчитать и построить графики распределения действующих значений напряжения и тока вдоль линии и вставки. Вычислить мощность, подводимую к линии и расходуемую в нагрузке.

Решение. Схема согласования линии с нагрузкой с помощью четвертьволновой вставки дана на рис. 12.11, а.

Вычислим длину волны и коэффициент фазы по (12.3):

$$\lambda = \frac{c}{f} = \frac{3 \cdot 10^8}{10^8} = 3 \text{ м};$$

$$\beta = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi}{3}.$$

Длина четвертьволновой вставки

$$l_1 = \frac{\lambda}{4} = \frac{3}{4} = 0,75 \text{ м}.$$

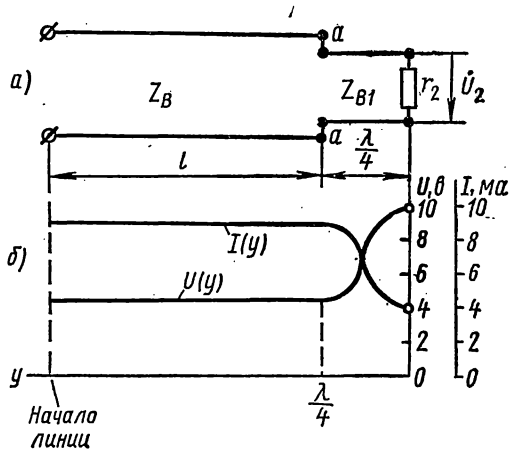


Рис. 12.11

Входное сопротивление нагруженной четвертьволновой вставки между точками aa можно определить, используя формулу (12.24). У такой вставки $l_1 = \lambda/4$, а следовательно, по (12.3) имеем

$$\beta l_1 = \frac{2\pi}{\lambda} \cdot \frac{\lambda}{4} = \frac{\pi}{2}.$$

Подставляя найденное значение βl_1 в (12.24) и обозначая волновое сопротивление вставки через z_{B1} , будем иметь

$$Z_{\text{вх}} = z_{B1} \frac{r_2 + jz_{B1} \operatorname{tg} \frac{\pi}{2}}{z_{B1} + jr_2 \operatorname{tg} \frac{\pi}{2}} = z_{B1} \frac{r_2 + jz_{B1} \operatorname{tg} \frac{\pi}{2}}{z_{B1} + jr_2 \operatorname{tg} \frac{\pi}{2}}.$$

Последнее выражение дает неопределенность, раскрывая которую, получим

$$Z_{\text{вх}} = \frac{z_{B1}^2}{r_2}.$$

Для согласования линии с нагрузкой необходимо выполнить условие

$$Z_{\text{вх}} = z_{B1} \quad \text{или} \quad \frac{z_{B1}^2}{r_2} = z_{B1}.$$

Отсюда

$$z_{B1} = \sqrt{z_B r_2} = \sqrt{500 \cdot 2500} = 1120 \text{ ом.}$$

Напряжение и ток в начале вставки (точка aa) найдем по (12.136) и (12.146), в которой следует принять $y = l_1$ и волновое сопротивление z_{B1} :

$$\dot{U}_{aa} = \dot{U}_2 \cos \beta l_1 + j I_2 z_{B1} \sin \beta l_1 = \dot{U}_2 \cos \frac{\pi}{2} + j I_2 z_{B1} \sin \frac{\pi}{2} =$$

$$= j \frac{\dot{U}_2}{r_2} z_{B1} = j \frac{10}{2500} \cdot 1120 \approx j 4,5 \text{ в;}$$

$$\dot{i}_{aa} = \dot{i}_2 \cos \beta l_1 = j \frac{\dot{U}_2}{z_{B1}} \sin \beta l_1 \approx j 9 \text{ ма.}$$

Линия в точках aa согласована с нагрузкой. Напряжение и ток в любой точке такой линии при отсчете с конца определяются формулами:

$$\dot{U} = \dot{U}_{aa} e^{j\beta l}; \quad \dot{i} = \frac{\dot{U}_{aa}}{z_B} e^{j\beta l}.$$

Действующие значения напряжения и тока представляют собой модули последних комплексов и соответственно равны:

$$U = |\dot{U}_{aa} e^{j\beta l}| = U_{aa} \approx 4,5 \text{ в;}$$

$$I = \left| \frac{\dot{U}_{aa}}{z_B} e^{j\beta l} \right| = I_{aa} \approx 9 \text{ ма.}$$

Графики этих величин — прямые, параллельные оси y (рис. 12.11, б).

Распределение действующих значений напряжения и тока вдоль вставки определяется по (12.26), где

$$m = z_{B1}/r_2 = 1120/2500 \approx 0,45:$$

$$\begin{aligned} U(y) &= U_2 \sqrt{\cos^2 \beta y + m^2 \sin^2 \beta y} = \\ &= 10 \sqrt{\cos^2 \left(\frac{2\pi}{3} y \right) + 0,45^2 \sin^2 \left(\frac{2\pi}{3} y \right)} \text{ в;} \\ I(y) &= \frac{I_2}{m} \sqrt{m^2 \cos^2 \beta y + \sin^2 \beta y} = \\ &= 9 \sqrt{0,45^2 \cos^2 \left(\frac{2\pi}{3} y \right) + \sin^2 \left(\frac{2\pi}{3} y \right)} \text{ ма.} \end{aligned}$$

По этим уравнениям на рис. 12.11, б построены кривые $U(y)$ и $I(y)$.

Расчет мощностей. Действующие значения напряжения и тока в начале линии имеют такие же значения, как и в точках *aa*, т. е. $U_1 = 4,5$ в, $I_1 = 9$ ма, а по фазе совпадают, так как линия согласована с чисто активной нагрузкой, а подводимая к линии мощность

$$P_1 = U_1 I_1 = 4,5 \cdot 9 \cdot 10^{-3} \approx 40 \cdot 10^{-3} \text{ вт.}$$

Мощность, расходуемая в нагрузке,

$$P_2 = U_2 I_2 = U_2 \frac{U_2}{r} = \frac{10^2}{2500} = 40 \cdot 10^{-3} \text{ вт,}$$

т. е. $P_2 = P_1$. Этот результат можно бы предвидеть, если учесть, что линия идеальная и, следовательно, не имеет потерь, поэтому вся подводимая к линии мощность расходуется в нагрузке.

12.45. Линию без потерь, параметры которой $Z_B = 500$ ом, $\beta = 2,1$ рад/м, длина $l = 5$ м, надо согласовать с активной нагрузкой $r_2 = 2500$ ом с помощью короткозамкнутого шлейфа, имеющего такое же волновое сопротивление, как и линия рис. 12.12. Определить минимальную длину шлейфа $l_{ш}$ и место его включения, при которых входное сопротивление в месте присоединения шлейфа (точки *bb*) будет равно волновому сопротивлению линии.

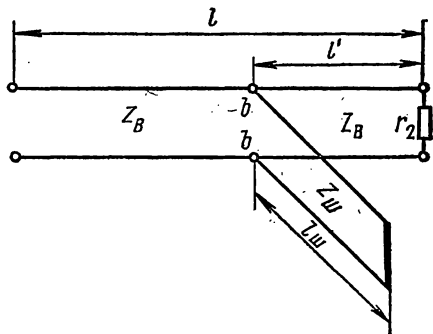


Рис. 12.12

Чему в этом случае равны ток, напряжение и мощности, подводимая к линии и расходуемая в нагрузке? Напряжение на нагрузочном сопротивлении $U_2 = 10$ в, частота $f = 10^8$ гц.

Решение. Из рис. 12.12 видно, что участок линии длиной l' и шлейф, имеющий длину $l_{ш}$, соединены параллельно. Вычислим их эквивалентное сопротивление. Для этого надо определить входные сопротивления: Z' — участка линии длиной l' и $Z_{ш}$ — сопротивление короткозамкнутой линии без потерь длиной $l_{ш}$. Каждое из этих сопротивлений вычисляем по формуле (12.24):

$$Z' = r_2 \frac{1 + jm \operatorname{tg} \beta l'}{1 + j \frac{1}{m} \operatorname{tg} \beta l'}, \quad \text{где } m = Z_B / r_2;$$

$$Z_{ш} = j Z_B \operatorname{tg} \beta l_{ш}.$$

Входные проводимости этих участков — величины, обратные их сопротивлениям. Входная проводимость участка линии длиной l' представляет собой комплексную величину, а входная проводимость

шлейфа — мнимую. Эти проводимости соответственно равны:

$$\begin{aligned}
 Y' = g' + jb' &= \frac{1}{Z'} = \frac{1}{r_2} \cdot \frac{1 + j \frac{1}{m} \operatorname{tg} \beta l'}{1 + jm \operatorname{tg} \beta l'} = \\
 &= \frac{1}{r_2} \cdot \frac{1 + \operatorname{tg}^2 \beta l'}{1 + m^2 \operatorname{tg}^2 \beta l'} + j \frac{1}{r_2} \cdot \frac{\left(\frac{1}{m} - m\right) \operatorname{tg} \beta l'}{1 + m^2 \operatorname{tg}^2 \beta l'}; \\
 Y_{\text{ш}} = -jb_{\text{ш}} &= \frac{1}{Z_{\text{ш}}} = -j \frac{1}{Z_{\text{в}} \operatorname{tg} \beta l_{\text{ш}}}.
 \end{aligned}$$

Входное сопротивление любого отрезка линии, нагруженного согласованно, должно быть равно волновому сопротивлению. Это означает, что входное сопротивление в точках bb , представляющее собой сопротивление двух параллельных ветвей, тоже должно быть равно $Z_{\text{в}}$:

$$Z_{\text{в}} = \frac{Z' Z_{\text{ш}}}{Z' + Z_{\text{ш}}} \quad \text{или} \quad \frac{1}{Z_{\text{в}}} = \frac{1}{Z'} + \frac{1}{Z_{\text{ш}}} = Y' + Y_{\text{ш}}.$$

Учитывая, что волновое сопротивление линии без потерь является действительной величиной, получаем

$$\frac{1}{Z_{\text{в}}} = g'; \quad b' = b_{\text{ш}}.$$

$$\text{или} \quad \frac{1}{Z_{\text{в}}} = \frac{1}{r_2} \cdot \frac{1 + \operatorname{tg}^2 \beta l'}{1 + m^2 \operatorname{tg}^2 \beta l'} \quad (1)$$

и

$$\frac{1}{Z_{\text{в}} \operatorname{tg} \beta l_{\text{ш}}} = \frac{1}{r_2} \cdot \frac{\left(\frac{1}{m} - m\right) \operatorname{tg} \beta l'}{1 + m^2 \operatorname{tg}^2 \beta l'}. \quad (2)$$

Уравнение (1) с учетом значения m может быть преобразовано следующим образом:

$$\frac{1}{m} + m \operatorname{tg}^2 \beta l' = 1 + \operatorname{tg}^2 \beta l'; \quad \operatorname{tg} \beta l' = \pm \sqrt{\frac{1}{m}} = \pm \sqrt{\frac{r_2}{Z_{\text{в}}}}.$$

Следовательно, длина участка линии, находящегося за местом присоединения шлейфа, может быть найдена по формуле

$$l' = \frac{1}{\beta} \operatorname{arctg} \left(\pm \sqrt{\frac{r_2}{Z_{\text{в}}}} \right). \quad (3)$$

Подстановка выражения $\operatorname{tg} \beta l'$ в уравнение (2) дает возможность найти длину шлейфа $l_{\text{ш}}$. Простейшие преобразования приводят к формуле

$$l_{\text{ш}} = \frac{1}{\beta} \operatorname{arctg} \left(\frac{\pm \sqrt{r_2 Z_B}}{r_2 - Z_B} \right). \quad (4)$$

Формулы (3) и (4) содержат круговые функции, которые многозначны. Это приводит к многозначности величин l' и $l_{\text{ш}}$. При расчете следует выбирать наименьшее значение $l_{\text{ш}}$, так как это обеспечивает наименьшие размеры согласовывающего устройства.

Подставляя числовые значения в формулу (4), получим

$$l_{\text{ш}} = \frac{1}{2,1} \operatorname{arctg} \left(\frac{\pm \sqrt{2500 \cdot 500}}{2500 - 500} \right) = \frac{1}{2,1} \operatorname{arctg} 0,56 = \frac{1}{2,1} \cdot 0,51 = 0,243 \text{ м.}$$

Здесь принят знак плюс, так как при этом $l_{\text{ш}}$ минимально. Наконец, по формуле (3) находим

$$l' = \frac{1}{2,1} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{2500}{500}} = \frac{1}{2,1} \operatorname{arctg} 2,24 = \frac{1}{2,1} \cdot 1,15 = 0,548 \text{ м}$$

Напряжение в точках bb присоединения шлейфа вычислим по формуле (12.26):

$$\begin{aligned} U_{bb} &= U_2 \sqrt{\cos^2 \beta l' + m^2 \sin^2 \beta l'} = \\ &= 10 \sqrt{\cos^2 (2,1 \cdot 0,548) + 0,2^2 \sin^2 (2,1 \cdot 0,548)} = \\ &= 10 \sqrt{\cos^2 1,15 + 0,2^2 \sin^2 1,15} = \\ &= 10 \sqrt{0,4085^2 + 0,2^2 \cdot 0,9128^2} = 4,46 \text{ в.} \end{aligned}$$

Так как линия не имеет потерь, то напряжение в ее начале имеет то же значение, т. е. $U_1 = 4,46 \text{ в.}$ Ток в начале линии (так как линия нагружена на согласованную нагрузку)

$$I_1 = U_1 / Z_B = 4,46 / 500 = 8,92 \cdot 10^{-3} \text{ а} = 8,92 \text{ ма.}$$

Мощность, поступающая в линию,

$$P_1 = U_1 I_1 = 4,46 \cdot 8,92 \cdot 10^{-3} = 40 \text{ мвт.}$$

Мощность, расходуемая в нагрузке,

$$P_2 = U_2 I_2 = 10 \frac{10}{2500} = 40 \text{ мвт.}$$

Мощности $P_1 = P_2$, так как линия не имеет потерь.

3. Схемы, эквивалентные отрезкам линии

12.46. Резонатор (колебательный контур) выполнен из короткозамкнутого отрезка четвертьволновой медной двухпроводной линии длиной $l = 0,75$ м (рис. 12.13, а). Диаметр проводов $d = 4$ мм, расстояние между ними $a = 20$ см.

Определить длину волны λ_0 , резонансную частоту f_0 , первичные параметры отрезка линии r_0 , L_0 , C_0 , волновое сопротивление Z_B , коэффициент затухания α и входное сопротивление $Z_{вх}$ короткозамкнутого отрезка линии. Вычислить параметры контура эквивалентного четвертьволновому отрезку линии и его добротность.

Решение. Длина волны и частота соответственно равны:

$$\lambda_0 = 4l = 4 \cdot 0,75 = 3 \text{ м};$$

$$f_0 = \frac{c_0}{\lambda_0} = \frac{3 \cdot 10^8}{3} = 10^8 \text{ гц} = 100 \text{ Мгц}.$$

Активное сопротивление единицы длины линии найдем по формуле (П5.36):

$$r_0 = \frac{16,65 \cdot 10^{-2} \sqrt{f}}{d} = \frac{16,65 \cdot 10^{-2} \sqrt{10^8}}{4} \approx 420 \text{ ом/км} = 0,42 \text{ ом/м}.$$

Индуктивность и емкость единицы длины провода вычисляем по формулам (П5.56) и (П5.6):

$$L_0 = 4 \cdot 10^{-4} \ln \frac{a}{r_0} = 4 \cdot 10^{-4} \ln \frac{20}{0,2} = 1,842 \cdot 10^{-3} \text{ гн/км} = 1,842 \text{ мкгн/м};$$

$$C_0 = \frac{1}{36 \ln \frac{a}{r}} = \frac{1}{36 \ln \frac{20}{0,2}} = 6,03 \cdot 10^{-9} \text{ ф/км} = 6,03 \cdot 10^{-12} \text{ пф/м}.$$

Волновое сопротивление и коэффициент затухания определяем по (12.4):

$$Z_B = \sqrt{\frac{L_0}{C_0}} = \sqrt{\frac{1,842 \cdot 10^{-3}}{6,03 \cdot 10^{-12}}} = 552 \text{ ом};$$

$$\alpha = \frac{r_0}{2Z_B} = \frac{0,42}{2 \cdot 552} = 0,38 \cdot 10^{-3} \text{ неп/м}.$$

Входное сопротивление вычисляем по (12.15) с учетом того, что

$$f_0 = \frac{3 \cdot 10^8}{\lambda_0}, \alpha = \frac{r_0}{2Z_B}, \alpha l \ll 1, \text{ sh} \alpha l \approx \alpha l, \text{ ch} \alpha l \approx 1:$$

$$Z_{вх} = r_p = \frac{Z_B}{\frac{r_0 l}{2}} = \frac{552}{\frac{0,42 \cdot 0,75}{2}} = 1,94 \cdot 10^6 \text{ ом} = 1,94 \text{ Мом}.$$

Из теории известно, что эквивалентным коротковолновому четвертьволновому отрезку линии является параллельный контур (рис. 12.13, б), параметры которого вычисляем по формулам:

$$r = \frac{8}{\pi^2} r_0 l = \frac{8}{3,14^2} 0,42 \cdot 0,75 = 0,252 \text{ ом};$$

$$L = \frac{8}{\pi^2} L_0 l = \frac{8}{3,14^2} 1,842 \cdot 10^{-8} \cdot 0,75 = 1,12 \cdot 10^{-6} \text{ гн} = 1,12 \text{ мкгн};$$

$$C = \frac{1}{2} C_0 l = \frac{1}{2} 6,03 \cdot 10^{-12} \cdot 0,75 = 2,26 \cdot 10^{-12} \text{ ф} = 2,26 \text{ пф}.$$

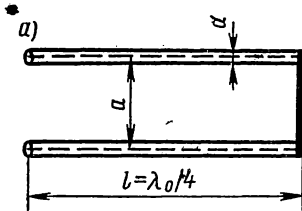


Рис. 12.13

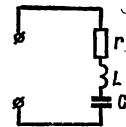
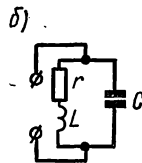


Рис. 12.14

Добротность контура

$$Q = \frac{\sqrt{\frac{L}{C}}}{r} = \frac{\sqrt{\frac{1,12 \cdot 10^{-6}}{2,26 \cdot 10^{-12}}}}{0,252} = 2760.$$

12.47. Резонатор выполнен в виде разомкнутого четвертьволнового отрезка двухпроводной линии, параметры которой даны в предыдущей задаче.

Вычислить параметры контура, эквивалентного разомкнутому четвертьволновому отрезку, и его добротность.

Решение. Эквивалентным разомкнутому четвертьволновому отрезку линии является последовательный контур рис. 12.14, параметры которого вычисляем по следующим известным из теории формулам:

$$r_0 = \frac{1}{2} r_0 l = \frac{1}{2} 0,42 \cdot 0,75 = 0,158 \text{ ом};$$

$$L = \frac{1}{2} L_0 l = \frac{1}{2} 1,842 \cdot 10^{-6} \cdot 0,75 = 0,69 \cdot 10^{-6} \text{ гн};$$

$$C = \frac{8}{\pi^2} C_0 l = \frac{8}{\pi^2} 6,03 \cdot 10^{-12} \cdot 0,75 = 3,65 \cdot 10^{-12} \text{ ф};$$

$$Q = \frac{\sqrt{\frac{L}{C}}}{r} = \frac{\sqrt{\frac{0,69 \cdot 10^{-6}}{3,65 \cdot 10^{-12}}}}{0,158} = 2760 \text{ ом}.$$

Отметим, что добротность четвертьволнового отрезка линии в режимах короткого замыкания и холостого хода одна и та же.

12.48. Показать, что подключение к разомкнутому концу линии без потерь конденсатора емкостью C эквивалентно удлинению ее на величину $l_C = \frac{\lambda}{2\pi} \operatorname{arctg} \omega C Z_B$, а включение в конце той же линии индуктивности L эквивалентно включению отрезка короткозамкнутой линии длиной $l_L = \frac{\lambda}{2\pi} \operatorname{arctg} \frac{\omega L}{Z_B}$.

Глава тринадцатая

ДВУХПОЛЮСНИКИ

ОСНОВНЫЕ ПОЛОЖЕНИЯ И СООТНОШЕНИЯ

1. **Комплексное сопротивление пассивного двухполюсника.** Комплексное сопротивление $Z(p)$ пассивного двухполюсника, содержащего активные и реактивные элементы, определяется выражением

$$Z(p) = \frac{A(p)}{B(p)} = \frac{a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_k p^k + \dots + a_1 p + a_0}{b_m p^m + b_{m-1} p^{m-1} + \dots + b_k p^k + \dots + b_1 p + b_0} \quad (13.1)$$

где $p = j\omega$, а a_k и b_k — коэффициенты, зависящие от элементов схемы двухполюсника. Для любых двухполюсников коэффициенты n и m не могут отличаться более чем на 1, поэтому возможны случаи $n - m = \pm 1$ либо $n = m$; кроме того, a_0 либо b_0 могут равняться нулю.

2. **Эквивалентные двухполюсники** — двухполюсники различной структуры, если их сопротивления взаимно равны при любых значениях параметров. В табл. 13.1 приведены некоторые схемы и условия их эквивалентности.

Таблица 13.1

Схемы некоторых эквивалентных двухполюсников	Условия эквивалентности	№ формулы
<div style="display: flex; justify-content: space-around; align-items: center;"> <div style="text-align: center;"> <p>a)</p> </div> <div style="text-align: center;"> <p>б)</p> </div> </div>	$\left. \begin{aligned} b &= a(1+a) \\ c &= (1+a)^2 \\ d &= 1+a \end{aligned} \right\}$	(13.2)
<div style="display: flex; justify-content: space-around; align-items: center;"> <div style="text-align: center;"> <p>в)</p> </div> <div style="text-align: center;"> <p>г)</p> </div> </div>	$\left. \begin{aligned} b &= \frac{a}{1+a} \\ c &= \left(\frac{a}{1+a}\right)^2 \\ d &= \frac{a}{1+a} \end{aligned} \right\}$	(13.3)

Схемы эквивалентных двухполюсников, содержащие наименьшее возможное число элементов в виде сосредоточенных сопротивлений, емкостей и индуктивностей, называются *каноническими*.

Пример дан в задаче 13.3.

3. Обратные двухполюсники — двухполюсники с сопротивлениями Z и Z' , произведение которых является действительным положительным числом R^2 , не зависящим от частоты (постоянно):

$$ZZ' = R^2. \quad (13.4)$$

Сопротивление $Z' = \frac{R^2}{Z}$ называется обратным сопротивлению Z в отношении R^2 .

Пример приведен в задаче 13.8.

4. Реактивные двухполюсники — двухполюсники, состоящие только из реактивных элементов. Их сопротивления реактивны:

$$Z(j\omega) = jx(\omega). \quad (13.5)$$

В канонических схемах реактивных двухполюсников (см. табл. 13.2) общее число их элементов минимально (при условии, что каждый элемент эквивалентен любому сложному соединению однородных элементов). Число индуктивностей или равно числу емкостей, или отличается от него на единицу. Общее число резонансных частот на единицу меньше общего числа реактивных элементов. Частоты резонансов напряжений и токов реактивных двухполюсников чередуются: между любыми двумя резонансами напряжений имеется один резонанс токов и между любыми двумя резонансами токов имеется один резонанс напряжений (см. графики табл. 13.2). При возрастании частоты реактивное сопротивление двухполюсника $x(\omega)$ в точках непрерывности возрастает (с учетом знака реактивного сопротивления). Если в схеме двухполюсника имеется путь для постоянного тока, то первым будет резонанс токов, а если такого пути нет, то первым станет резонанс напряжений. Выражения сопротивлений двухполюсников $Z(j\omega)$ содержат множитель $j\omega$, при этом если первым является резонанс напряжений, то этот множитель находится в знаменателе, а если первым будет резонанс токов, то он находится в числителе. В формулах сопротивлений $Z(j\omega)$ числитель содержит произведение разностей квадратов частот резонансов напряжений и любой частоты, а знаменатель — произведение разностей квадратов частот резонансов токов и любой частоты. В канонической схеме не должно быть более одного пути как для постоянного тока, так и для тока бесконечно большой частоты.

В зависимости от характера сопротивления при частотах $\omega \rightarrow 0$ и $\omega \rightarrow \infty$ (вблизи нуля и бесконечности) двухполюсники делят на 4 класса (см. табл. 13.2). В этой таблице приведены две основные формы канонических схем двухполюсников, расчетные формулы сопротивлений, их частотные характеристики, расположение нулей и полюсов. В формулах табл. 13.2 $\omega_1, \omega_3, \dots, \omega_{2n-1}$ — частоты резонансов напряжений, $\omega_2, \omega_4, \dots, \omega_{2n-2}$ — частоты резонансов токов; при этом $\omega_1 < \omega_2 < \omega_3 < \dots < \omega_{2n-2} < \omega_{2n-1}$.

От канонических схем двухполюсников класса I можно перейти к соответствующим каноническим схемам двухполюсников класса II,

исключив из первой схемы емкость C_0 и индуктивность L_{2n} , а из второй схемы C_1 и L_{2n-1} ; для перехода к классу III первой схемы следует исключить индуктивность L_{2n} , а из второй схемы — L_{2n-1} ; для перехода к классу IV из первой схемы надо исключить C_0 , а из второй схемы — C_1 .

Постоянные H , входящие в выражение сопротивлений реактивных двухполюсников, имеют размерность индуктивности для двухполюсников классов I и IV и размерность, обратную емкости, для классов II и III. Для нахождения постоянной H надо определить характер сопротивления двухполюсника (индуктивный или емкостный) при частоте, превышающей наибольшую резонансную. Если оно имеет емкостный характер, в схеме двухполюсника следует разомкнуть все ветви, содержащие индуктивности, и определить эквивалентную емкость C_9 полученной схемы, а затем H приравнять этой обратной эквивалентной емкости ($H = 1/C_9$). В случае индуктивного характера сопротивления все емкости схемы следует заменить короткозамкнутыми участками, подсчитать эквивалентную индуктивность L_9 оставшейся схемы и приравнять ее H ($H = L_9$).

Примеры приведены в задачах 13.11, 13.13 и 13.15.

5. Частотные характеристики сопротивлений двухполюсников $Z(j\omega)$ [или проводимостей $Y(j\omega)$] выражаются дробно-рациональными функциями и могут быть представлены в виде отношений двух полиномов [см. уравнение (13.1)]:

$$Z(j\omega) = \frac{\sum_0^n a_n (j\omega)^n}{\sum_0^m b_m (j\omega)^m} = R(\omega) + jX(\omega) = Z(\omega) e^{j\varphi(\omega)}, \quad (13.6)$$

где

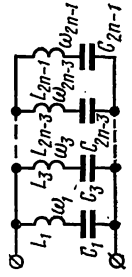
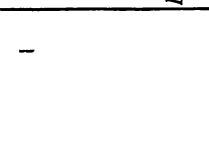
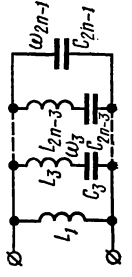
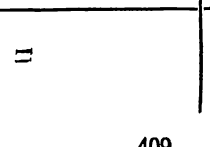
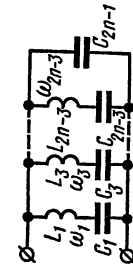
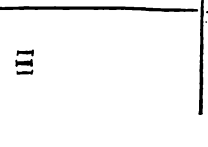
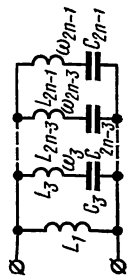
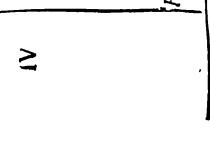
$$Z(\omega) = \sqrt{R^2(\omega) + X^2(\omega)};$$

$$\varphi(\omega) = \operatorname{arctg} \frac{X(\omega)}{R(\omega)}.$$

В этих формулах $R(\omega)$ и $X(\omega)$ — соответственно зависимости вещественной и мнимой частей комплексного сопротивления $Z(j\omega)$ от частоты; $Z(\omega)$ — амплитудно-частотная характеристика (АЧХ), выражающая зависимость модуля полного сопротивления, а $\varphi(\omega)$ — фазочастотная характеристика (ФЧХ), выражающая зависимость аргумента $Z(j\omega)$ от частоты.

Вместо АЧХ и ФЧХ можно строить годограф — кривую, описываемую концом вектора $Z(j\omega)$ на комплексной плоскости при изменении частоты, или, что то же самое, кривую зависимости $X(\omega)$ от $R(\omega)$.

Примеры даны в задачах 13.18 и 13.20.

Класс дзупло-лосника	Канонические схемы дзупло-лосников (схемы Фостера) вторая форма	Расчетные формулы сопротивлений дзуплолосников	Графики частотных характеристик сопротивлений
I	 $H = \left(\frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_3} + \dots + \frac{1}{L_{2n-1}} \right)^{-1}$	$Z(j\omega) = \frac{H}{j\omega} \frac{(\omega_1^2 - \omega^2)(\omega_3^2 - \omega^2) \dots (\omega_{2n-1}^2 - \omega^2)}{(\omega_2^2 - \omega^2)(\omega_4^2 - \omega^2) \dots (\omega_{2n-2}^2 - \omega^2)}$	
II	 $H = \frac{1}{C_{2n-1}}$	$Z(j\omega) = j\omega H \frac{(\omega_3^2 - \omega^2)(\omega_5^2 - \omega^2) \dots (\omega_{2n-3}^2 - \omega^2)}{(\omega_2^2 - \omega^2)(\omega_4^2 - \omega^2) \dots (\omega_{2n-2}^2 - \omega^2)}$	
III	 $H = \frac{1}{C_{2n-1}}$	$Z(j\omega) = \frac{H}{j\omega} \frac{(\omega_1^2 - \omega^2)(\omega_3^2 - \omega^2) \dots (\omega_{2n-3}^2 - \omega^2)}{(\omega_2^2 - \omega^2)(\omega_4^2 - \omega^2) \dots (\omega_{2n-2}^2 - \omega^2)}$	
IV	 $H = \left(\frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_3} + \dots + \frac{1}{L_{2n-1}} \right)^{-1}$	$Z(j\omega) = j\omega H \frac{(\omega_3^2 - \omega^2)(\omega_5^2 - \omega^2) \dots (\omega_{2n-3}^2 - \omega^2)}{(\omega_2^2 - \omega^2)(\omega_4^2 - \omega^2) \dots (\omega_{2n-2}^2 - \omega^2)}$	


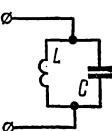
УПРАЖНЕНИЯ И ЗАДАЧИ

А. Эквивалентные и обратные двухполюсники

13.1. В схемах табл. 13.3 известны сопротивления x_1 , x_2 реактивных двухполюсников при двух частотах f_1 и f_2 .

Для каждого варианта найти резонансную частоту и значения индуктивности и емкости. Указать, какие из двухполюсников эквивалентны, а какие обратны.

Таблица 13.3

Схема	Номер варианта	Значение частоты и соответствующего реактивного сопротивления			
		f_1 , кГц	x_1 , Ом	f_2 , кГц	x_2 , Ом
	1	5,3	+90	10,6	+225
	2	2,65	-90	10,6	+90
	3	5,3	0	21,2	+225
	4	2,65	+40	7,92	-72
	5	2,65	∞	10,6	-16
	6	10,6	-40	21,2	-16

13.2. Для схем реактивных двухполюсников (рис. 13.1, а—г) определить резонансные частоты и начертить (качественно) графики изменения реактивных сопротивлений в функции угловой частоты ω .

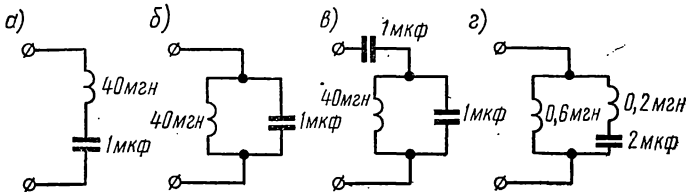


Рис. 13.1

13.3. Составить схему и определить элементы двухполюсника, эквивалентного заданному на рис. 13.2, а.

Решение. Заданная схема может быть представлена в виде схемы а табл. 13.1, в которой

$$Z_1 = j\omega L_1, \quad Z_2 = \frac{1}{j\omega C} \quad aZ_1 = j\omega L_0.$$

Тогда коэффициент a , необходимый для определения элементов эквивалентной схемы (схема b в табл. 13.1), будет равен

$$a = \frac{aZ_1}{Z_1} = \frac{j\omega L_0}{j\omega L_1} = \frac{40}{10} = 4.$$

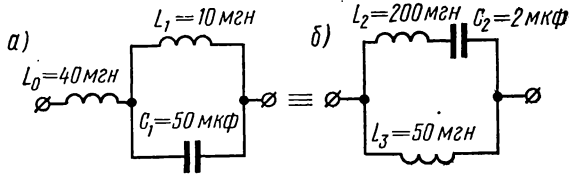


Рис. 13.2

На основе условий эквивалентности (13.2) находим коэффициенты b , c и d :

$$b = a(1 + a) = 4 \cdot 5 = 20; \quad c = (1 + a)^2 = 5^2 = 25;$$

$$d = 1 + a = 5.$$

Сопrotивления искомой схемы будут равны:

$$bZ_1 = bj\omega L_1 = j\omega 10 \cdot 10^{-3} \cdot 20 = j\omega 200 \cdot 10^{-3} \text{ ом, т. е. } L_2 = 200 \text{ мГн};$$

$$cZ_2 = c \frac{1}{j\omega C_1} = \frac{1}{j\omega} \cdot \frac{25}{50 \cdot 10^{-6}} = \frac{1}{j\omega \cdot 2 \cdot 10^{-6}} \text{ ом, т. е. } C_2 = 2 \text{ мкФ};$$

$$dZ_1 = dj\omega L_1 = j\omega 10 \cdot 10^{-3} \cdot 5 = j\omega 50 \cdot 10^{-3} \text{ ом, т. е. } L_3 = 50 \text{ мГн}.$$

На рис. 13.2, b дана эквивалентная схема, на которой указаны значения ее элементов.

13.4. Найти схемы и параметры элементов двухполюсников, обеспечивающих их эквивалентность двухполюсникам рис. 13.3, $a—г$.

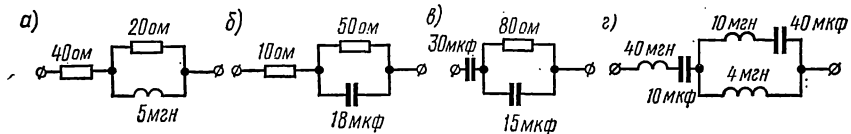


Рис. 13.3

У к а з а н и е. Использовать табл. 13.1.

13.5. Найти схемы и параметры элементов двухполюсников, эквивалентных двухполюсникам, изображенным на рис. 13.4, $a—г$.

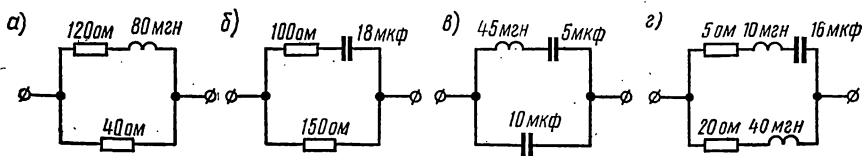


Рис. 13.4

Указание. Использовать табл. 13.1.

13.6. Вычислить входное сопротивление Z двухполюсников рис. 13.5, а — б, если $r_1 = r_2 = r = \sqrt{L/C} = 500$ ом.

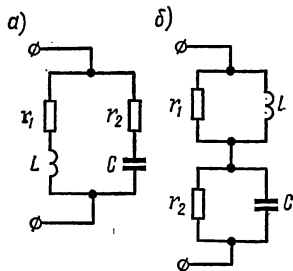


Рис. 13.5

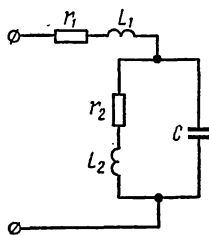


Рис. 13.6

13.7. Найти коэффициенты a_k и b_k сопротивления двухполюсника рис. 13.6 и написать уравнение в форме (13.1).

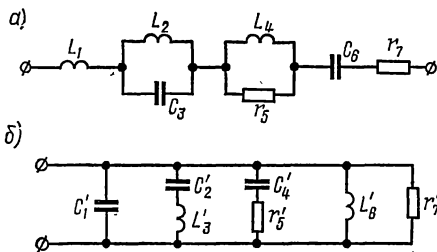


Рис. 13.7

13.8. Составить схему двухполюсника, обратную схеме рис. 13.7, а, если $R^2 = 100$, и определить значения ее элементов, если $L_1 = 2$ мГн, $L_2 = 5$ мГн, $C_3 = 100$ мкФ, $L_4 = 5$ мГн, $r_5 = 10$ ом, $C_6 = 25$ мкФ, $r_7 = 20$ ом.

Решение. Найдем по (13.4) сопротивление Z'_1 , обратное сопротивлению $Z_1 = j\omega L_1$:

$$Z'_1 = \frac{R^2}{Z_1} = \frac{R^2}{j\omega L_1} = \frac{1}{j\omega \left(\frac{L_1}{R^2}\right)} = \frac{1}{j\omega C'_1},$$

где

$$C'_1 = \frac{L_1}{R^2} = \frac{2 \cdot 10^{-3}}{100} = 20 \cdot 10^{-6} \text{ ф} = 20 \text{ мкФ} —$$

емкость, определяющая элемент, обратный элементу L_1 .

Аналогично рассчитываем элементы, обратные индуктивности L_2 , емкости C_3 , индуктивности L_4 , сопротивлению r_5 , емкости C_6 и сопротивлению r_7 . Это будут соответственно:

$$\text{емкость } C'_2 = \frac{L_2}{R^2} = \frac{5 \cdot 10^{-3}}{100} = 5 \cdot 10^{-5} \text{ ф} = 50 \text{ мкФ};$$

$$\text{индуктивность } L'_3 = C_3 R^2 = 100 \cdot 10^{-6} \cdot 100 = 10^{-2} \text{ гн} = 10 \text{ мГн};$$

$$\text{емкость } C'_4 = \frac{L_4}{R^2} = \frac{5 \cdot 10^{-3}}{100} = 5 \cdot 10^{-5} \text{ ф} = 50 \text{ мкФ};$$

сопротивление $r'_5 = \frac{R^2}{r_5} = \frac{100}{10} = 10 \text{ ом};$

индуктивность $L'_6 = C_6 R^2 = 25 \cdot 10^{-6} \cdot 100 = 25 \cdot 10^{-4} \text{ гн} = 2,5 \text{ мгн};$

сопротивление $r'_7 = \frac{R^2}{r_7} = \frac{100}{20} = 5 \text{ ом}.$

Последовательно включенным элементам исходной схемы соответствуют параллельно включенные обратные элементы обратной схемы. Поэтому искомая обратная схема имеет структуру, показанную на рис. 13.7, б.

13.9. Найти схему и элементы двухполюсника, обратного схеме рис. 13.8, если $R^2 = 10^6$.

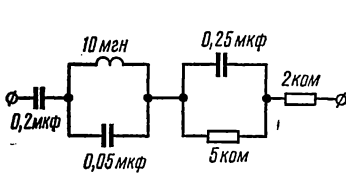


Рис. 13.8

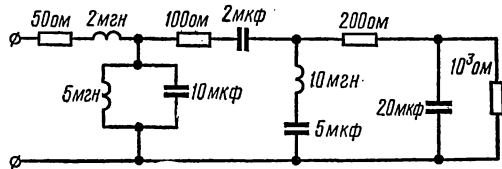


Рис. 13.9

13.10. Найти элементы двухполюсника, обратного схеме рис. 13.9 при $R^2 = 10^4$, и составить его схему.

У к а з а н и е. Искомая схема, как и заданная, имеет цепочечный вид, при этом каждый последовательный элемент заданной схемы в обратной схеме станет параллельным, но обратным по характеру, и наоборот.

Б. Реактивные двухполюсники

13.11. Определить класс двухполюсника, его резонансные частоты и составить уравнение сопротивления двухполюсника рис. 13.10, а, если $L_0 = 40 \text{ мгн}, L_1 = 10 \text{ мгн}, L_2 = 200 \text{ мгн}, L_3 = 20 \text{ мгн}, C = 50 \text{ мкФ}.$

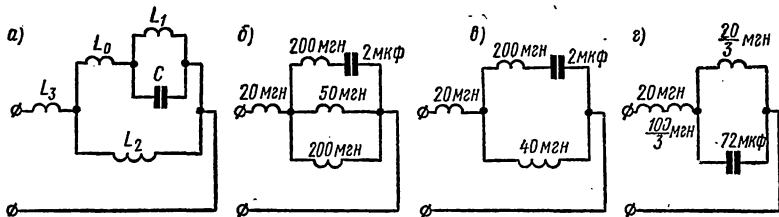


Рис. 13.10

Пояснить, почему заданная схема не является канонической.

Р е ш е н и е. Класс двухполюсника определяется в зависимости от характера сопротивления при $\omega \rightarrow 0$ и $\omega \rightarrow \infty$.

Из заданной схемы видно, что постоянный ток может проходить через двухполюсник, поэтому при $\omega \rightarrow 0$ его сопротивление стремится к нулю, т. е. оно имеет индуктивный характер. При $\omega \rightarrow \infty$, как видно из схемы, сопротивление двухполюсника также имеет индуктивный характер. Сопоставляя эти результаты с табл. 13.2, устанавливаем, что двухполюсник относится к классу IV.

В соответствии с табл. 13.1 двухполюсник, составленный из L_0 , L_1 и C , заменим эквивалентным (см. решение задачи 13.3), а в результате получим схему рис. 13.10, б. Объединяя параллельно соединенные индуктивности 50 и 200 мкн в эквивалентную индуктивность $50 \cdot 200 / 250 = 40$ мкн, получим схему рис. 13.10, в. Ее параллельные ветви представляют схему в табл. 13.1, в которой $a = 40/200 = 0,2$. Преобразуем ее в схему z табл. 13.1, для этого по формулам (13.3) вычислим коэффициенты:

$$b = \frac{a^2}{1+a} = \frac{0,2^2}{1+0,2} = \frac{1}{30}; \quad c = \left(\frac{a}{1+a} \right)^2 = \frac{1}{36}; \quad d = \frac{a}{1+a} = \frac{1}{6}.$$

На рис. 13.10, г дана соответствующая эквивалентная схема. Для удобства в дальнейших расчетах введем для элементов схемы рис. 13.10, г буквенные обозначения:

$$L' = \frac{20}{3} = 6,67 \text{ мкн}; \quad C' = 72 \text{ мкф}; \quad L'' = 20 + \frac{100}{3} = 53,3 \text{ мкн}.$$

Вычислим резонансные частоты. Схема рис. 13.10, г является канонической, содержит три элемента, поэтому число резонансных частот равно двум. Так как в схеме имеется путь для постоянного тока, то первым будет резонанс токов. Его резонансная частота

$$\omega_2 = \frac{1}{\sqrt{L'C'}} = \frac{1}{\sqrt{6,67 \cdot 10^{-6} \cdot 72 \cdot 10^{-6}}} = 1440 \text{ сек}^{-1}.$$

Частоту резонанса напряжений найдем из условия равенства нулю входного сопротивления схемы рис. 13.10, г:

$$j\omega L'' + \frac{j\omega L' \frac{1}{j\omega C'}}{j \left(\omega L' - \frac{1}{\omega C'} \right)} = 0.$$

Отсюда находим

$$\omega_3 = \frac{1}{\sqrt{\frac{L'L''}{L'+L''} C}} = 1535 \text{ сек}^{-1}.$$

Определим параметр H , необходимый для составления уравнения сопротивления двухполюсника. Для этого выясним характер сопротивления двухполюсника при частотах, превышающих наибольшую резонансную. Очевидно, что при $\omega > \omega_3$ сопротивление схемы имеет

индуктивный характер. Поэтому, закорачивая в схеме рис. 13.10, а емкость C' (см. п. 4 основных положений), получим

$$H = L_9 = L'' = 53,3 \cdot 10^{-3} \text{ гн.}$$

Тот же результат может быть получен из заданной схемы рис. 13.10, а, в которой емкость C закорочена (см. п. 4 основных положений). Действительно,

$$H = L_9 = L_3 + \frac{L_0 L_2}{L_0 + L_2} = \left(20 + \frac{40 \cdot 200}{240} \right) 10^{-3} = 53,3 \cdot 10^{-3} \text{ гн.}$$

Наконец, напишем уравнение сопротивления двухполюсника класса IV:

$$Z(j\omega) = j\omega H \frac{\omega_3^2 - \omega^2}{\omega_2^2 - \omega^2} = j\omega 53,3 \cdot 10^{-3} \frac{1535^2 - \omega^2}{1440^2 - \omega^2}.$$

Заданная схема не является канонической, потому что для постоянного тока имеется более одного пути (первый — через $L_3 L_0 L_1$, второй — через $L_3 L_2$.)

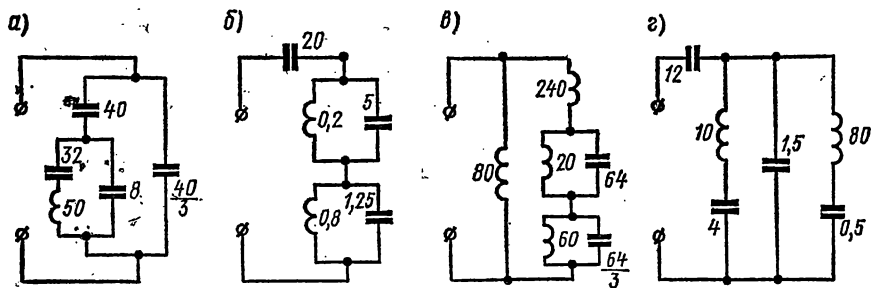


Рис. 13.11

13.12. Для каждой из схем рис. 13.11 найти класс двухполюсника, каноническую схему и ее параметры, резонансные частоты и составить уравнение сопротивления двухполюсника. На рис. 13.11, а—г индуктивности даны в мГн, емкости — в мкФ.

Указание. При расчете обратить внимание на то, что в схемах рис. 13.11, б и в параллельные контуры, а в схеме рис. 13.11, г последовательные контуры подобны между собой, т. е. отношение сопротивлений соответствующих элементов на любой частоте есть величина постоянная, или, что то же самое, отношение индуктивностей обратно отношению емкостей контуров. Поэтому каждая пара указанных контуров может быть заменена одним эквивалентным контуром. Для расчета его параметров следует составить выражение эквивалентного сопротивления соответствующих двух контуров.

13.13. Для двухполюсника рис. 13.12, а найти каноническую схему, ее параметры и составить уравнение его сопротивления. Даны:

$$C_1 = C_2 = 0,2 \text{ мкФ}, C_3 = 0,4 \text{ мкФ}, C_4 = 1 \text{ мкФ}, L = 40 \text{ мГн.}$$

Решение. Задача может быть решена наиболее просто, если треугольник емкостей $C_1C_2C_3$ преобразовать в эквивалентную звезду, затем использовать эквивалентные преобразования.

На рис. 13.12, б изображена схема, в которой осуществлена замена треугольника емкостей $C_1C_2C_3$ эквивалентной звездой, емкости которой C_5 , C_6 и C_7 вычисляются по известным формулам:

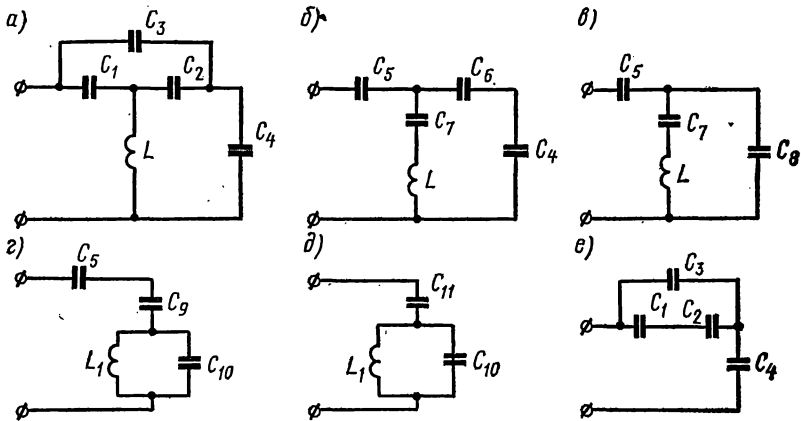


Рис. 13.12

$$Z_5 = \frac{Z_1 Z_3}{Z_1 + Z_2 + Z_3} \quad \text{или} \quad \frac{1}{j\omega C_5} = \frac{\frac{1}{j\omega C_1} \cdot \frac{1}{j\omega C_3}}{\frac{1}{j\omega C_1} + \frac{1}{j\omega C_2} + \frac{1}{j\omega C_3}};$$

отсюда

$$C_5 = C_1 + C_3 + \frac{C_1 C_3}{C_2} = 0,2 + 0,4 + \frac{0,2 \cdot 0,4}{0,2} = 1 \text{ мкф.}$$

Аналогично найдем емкости C_6 и C_7 :

$$C_6 = C_2 + C_3 + \frac{C_2 C_3}{C_1} = 1 \text{ мкф}, \quad C_7 = C_1 + C_2 + \frac{C_1 C_2}{C_3} = 0,5 \text{ мкф.}$$

Объединив последовательно соединенные емкости C_6 и C_4 в эквивалентную емкость

$$C_8 = \frac{C_4 C_6}{C_4 + C_6} = \frac{1 \cdot 1}{2} = 0,5 \text{ мкф,}$$

получим схему рис. 13.12, в.

Далее используем эквивалентные преобразования, для чего осуществим замену схемы из элементов C_7 , L , C_8 схемой из C_9 , L_1 , C_{10} (рис. 13.12, д). Для расчетов воспользуемся формулами (13.3) и схемами в и г табл. 13.1, в которых

$$Z_1 = \frac{1}{j\omega C_7}, \quad Z_2 = j\omega L, \quad \text{а } Z_3 = \frac{1}{j\omega C_8}.$$

Тогда необходимый для расчетов коэффициент

$$a = \frac{aZ_1}{Z_1} = \frac{1}{\frac{j\omega C_8}{1}} = \frac{C_7}{C_8} = \frac{0,5}{0,5} = 1.$$

По формулам (13.3) находим коэффициенты b , c и d :

$$b = \frac{a^2}{1+a} = 0,5; \quad c = \left(\frac{a}{1+a}\right)^2 = 0,25; \quad d = \frac{a}{1+a} = 0,5.$$

Теперь находим неизвестные L_1 , C_9 и C_{10} [см. формулы (13.3)]:

$$dZ_1 = 0,5 \frac{1}{j\omega C_7} = \frac{1}{j\omega C_9}, \quad \text{отсюда } C_9 = 2C_7 = 2 \cdot 0,5 = 1 \text{ мкф};$$

$$bZ_1 = 0,5 \frac{1}{j\omega C_7} = \frac{1}{j\omega C_{10}}, \quad \text{откуда } C_{10} = 2C_7 = 1 \text{ мкф};$$

$$cZ_2 = 0,25j\omega L = j\omega L_1, \quad \text{т. е. } L_1 = 0,25L = 0,25 \cdot 40 = 10 \text{ мГн}.$$

Наконец, объединив в схеме рис. 13.12, *г* емкости C_5 и C_9 в эквивалентную емкость $C_{11} = \frac{C_5 C_9}{C_5 + C_9}$, получим каноническую схему рис. 13.12, *д*.

Каноническая схема содержит три элемента, следовательно, число резонансных частот равно двум. Так как схема не имеет пути для постоянного тока, то первым будет резонанс напряжений с частотой ω_1 , которую найдем, приравняв ее входное сопротивление нулю:

$$Z(j\omega) = \frac{1}{j\omega C_{11}} + \frac{j\omega L_1 \frac{1}{j\omega C_{10}}}{j\omega L_1 + \frac{1}{j\omega C_{10}}} = 0.$$

Решая это уравнение, найдем

$$\omega_1 = \frac{1}{\sqrt{L_1(C_{10} + C_{11})}} = \frac{1}{\sqrt{10 \cdot 10^{-3} (1 + 0,5) 10^{-6}}} = 8170 \text{ сек}^{-1}.$$

Далее вычисляем частоту резонанса токов

$$\omega_2 = \frac{1}{\sqrt{L_1 C_{10}}} = \frac{1}{\sqrt{10 \cdot 10^{-3} \cdot 1 \cdot 10^{-6}}} = 10^4 \text{ сек}^{-1}.$$

Найдем коэффициент H . Для этого выясним характер сопротивления схемы рис. 13.12, *д* при $\omega \rightarrow \infty$. Очевидно, сопротивление схемы имеет емкостный характер, поэтому $H = \frac{1}{C_9}$, где C_9 находится из схемы рис. 13.12, *г*, в которой отключена индуктивность L_1 :

$$C_9 = \frac{C_{10} C_{11}}{C_{10} + C_{11}} = \frac{1 \cdot 0,5}{1,5} = \frac{1}{3} \text{ мкф} = \frac{1}{3} 10^{-6} \text{ ф}.$$

$$H = \frac{1}{C_3} = 3 \cdot 10^6 \text{ ф}^{-1}.$$

В целях проверки найдем H из заданной схемы, в которой индуктивность отключена (рис. 13.12, *е*). Эквивалентная емкость

$$C_0 = \frac{\left(\frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} + C_3 \right) C_4}{\frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} + C_3 + C_4} = \frac{\left(\frac{0,2 \cdot 0,2}{0,4} + 0,4 \right) 1}{\frac{0,2 \cdot 0,2}{0,4} + 0,4 + 1} = \frac{1}{3} \text{ мкф}.$$

Тогда $H = 1/C_0 = 3 \cdot 10^6$.

Как видно, получен тот же результат.

Составим выражение сопротивления схемы $Z(j\omega)$, при этом учтем, что первым был резонанс напряжений, поэтому множитель $j\omega$ должен быть записан в знаменателе этого выражения:

$$Z(j\omega) = \frac{H}{j\omega} \cdot \frac{\omega_1^2 - \omega^2}{\omega_2^2 - \omega^2} = \frac{3 \cdot 10^6}{j\omega} \cdot \frac{8170^2 - \omega^2}{10000^2 - \omega^2}.$$

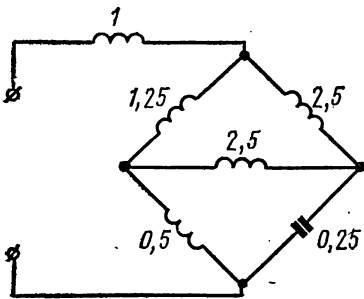


Рис. 13.13

13.14. Для двухполюсника рис. 13.13 найти каноническую схему, ее параметры и составить уравнение его сопротивления. На рис. 13.13 значения индуктивностей даны в мГн, емкости — в мкф.

13.15. Найти класс двухполюсника рис. 13.14, его каноническую схему, ее параметры и составить уравнение его сопротивления. Даны: $C_1 = C_2 = C_3 = 0,2 \text{ мкф}$, $C_4 = 0,6 \text{ мкф}$, $L = 15 \text{ мГн}$.

Решение. Определим класс двухполюсника. Для этого выясним

характер сопротивления и его величину при $\omega \rightarrow 0$ и $\omega \rightarrow \infty$. Из заданной схемы видно, что постоянный ток через двухполюсник проходить не может, следовательно, при $\omega \rightarrow 0$ его сопротивление стремится к бесконечности, т. е. оно имеет емкостный характер; при $\omega \rightarrow \infty$ сопротивление двухполюсника стремится к нулю, т. е. оно также имеет емкостный характер. Сопоставляя эти результаты с табл. 13.2, устанавливаем, что двухполюсник относится к классу III.

Заданная схема не является канонической, так как для тока бесконечно большой частоты имеется два (а не один) пути (один — через $C_1 C_3$, другой — через $C_2 C_4$).

Для определения канонической схемы двухполюсника выберем независимые контуры согласно рис. 13.14, *а*, составим уравнения по методу контурных токов и решим их совместно, установив связь между \dot{U} и \dot{I}_1 :

$$\begin{aligned} \dot{J}_1 \left(\frac{1}{j\omega C_1} + \frac{1}{j\omega C_3} \right) - \dot{J}_2 \left(\frac{1}{j\omega C_1} + \frac{1}{j\omega C_3} \right) - \dot{J}_3 \frac{1}{j\omega C_1} &= \dot{U}; \\ -\dot{J}_1 \left(\frac{1}{j\omega C_1} + \frac{1}{j\omega C_3} \right) + \dot{J}_2 \left(\frac{1}{j\omega C_1} + \frac{1}{j\omega C_2} + \frac{1}{j\omega C_3} + \frac{1}{j\omega C_4} \right) &+ \\ + \dot{J}_3 \left(\frac{1}{j\omega C_1} + \frac{1}{j\omega C_2} \right) &= 0; \\ -\dot{J}_1 \frac{1}{j\omega C_1} + \dot{J}_2 \left(\frac{1}{j\omega C_1} + \frac{1}{j\omega C_2} \right) + \dot{J}_3 \left(\frac{1}{j\omega C_1} + \frac{1}{j\omega C_2} + \right. & \\ \left. + j\omega L \right) &= 0. \end{aligned}$$

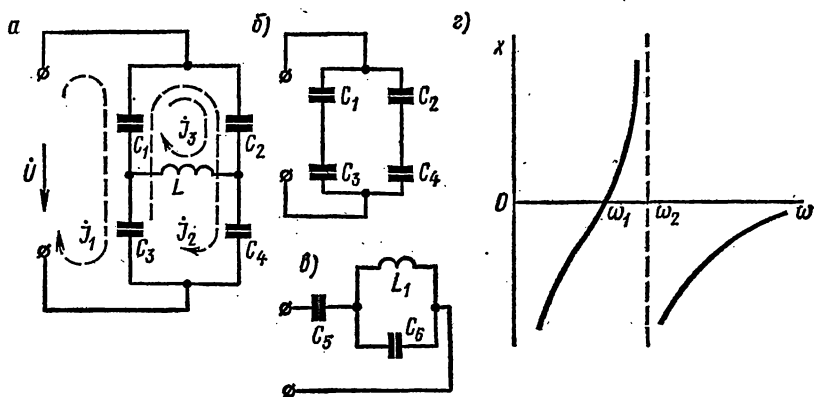


Рис. 13.14

Подставляя числовые значения и умножая все члены уравнений на $j\omega \cdot 10^{-6}$, получим:

$$10\dot{J}_1 - 10\dot{J}_2 - 5\dot{J}_3 = j\omega 10^{-6}\dot{U};$$

$$3\dot{J}_1 + 5\dot{J}_2 + 3\dot{J}_3 = 0;$$

$$-10\dot{J}_1 + 10\dot{J}_2 + (10 - 15\omega^2 10^{-9})\dot{J}_3 = 0.$$

Решая эту систему уравнений, находим \dot{J}_1 . Беря отношение \dot{U} к \dot{J}_1 , определим входное сопротивление

$$Z(j\omega) = \frac{1}{j\omega \cdot 0,25 \cdot 10^{-6}} \cdot \frac{\frac{1}{4} 10^9 - \omega^2}{\frac{2}{75} \cdot 10^{10} - \omega^2}.$$

В этой формуле

$$H = \frac{1}{C_9} = \frac{1}{0,25 \cdot 10^{-8}} = 4 \cdot 10^6 \text{ ф}^{-1}.$$

Проверим правильность найденной величины C_9 . Для этого в заданной схеме следует разомкнуть индуктивность L (так как схема при $\omega \rightarrow \infty$ имеет емкостный характер, см. основные положения стр. 407) и найти C_9 (рис. 13.14, б):

$$C_9 = \frac{C_1 C_3}{C_1 + C_3} + \frac{C_2 C_4}{C_2 + C_4} = \frac{0,2 \cdot 0,2}{0,4} + \frac{0,2 \cdot 0,6}{0,8} = 0,25 \text{ мкф}.$$

Это совпадает с ранее найденной величиной C_9 .

Из полученного для $Z(j\omega)$ выражения видно, что оно имеет две резонансные частоты: первая — частота резонанса напряжений $\omega_1 = \sqrt{\frac{1}{4} \cdot 10^{-9}} = 15800 \text{ сек}^{-1}$, вторая — частота резонанса токов $\omega_2 = \sqrt{\frac{2}{75} \cdot 10^{10}} = 16300 \text{ сек}^{-1}$, и схема относится к трехэлементному двухполюснику класса III. График реактивного сопротивления в функции частоты и каноническая схема двухполюсника показаны на рис. 13.14, в и г.

Для определения параметров канонической схемы рис. 13.14, в поступим так: выразим значение ее постоянной H и резонансные частоты через L_1 , C_5 и C_6 . Постоянную H найдем, если в схеме рис. 13.14, в отбросить ветвь с индуктивностью:

$$H = \frac{1}{C_9} = \frac{C_5 + C_6}{C_5 C_6} = \frac{1}{0,25 \cdot 10^{-8}} = 4 \cdot 10^6 \text{ ф}^{-1}. \quad (1)$$

Находим резонансные частоты:

$$\omega_1 = \frac{1}{\sqrt{L_1 (C_5 + C_6)}} = 15800 \text{ сек}^{-1}; \quad (2)$$

$$\omega_2 = \frac{1}{\sqrt{L_1 C_6}} = 16300 \text{ сек}^{-1}. \quad (3)$$

Решая уравнения (1)–(3), найдем:

$$C_5 = \frac{1}{H} \left(\frac{\omega_2}{\omega_1} \right)^2 = \frac{4}{15} \cdot 10^{-8} \text{ ф} \approx 0,267 \text{ мкф};$$

$$C_6 = \frac{1}{H \left[1 - \left(\frac{\omega_1}{\omega_2} \right)^2 \right]} = 4 \cdot 10^{-8} \text{ ф} = 4 \text{ мкф};$$

$$L_1 = \frac{1}{C_6 \omega_2^2} = \frac{15}{16} \cdot 10^{-3} \text{ гн} \approx 0,94 \text{ мгн}.$$

13.16. При какой емкости C в цепи рис. 13.15 имеет место резонанс токов на частоте 5 Мгц. Даны: $L_1 = 0,4 \text{ мгн}$ и $L_2 = 0,5 \text{ мгн}$. Опре-

делить класс двухполюсника и составить уравнение его сопротивления.

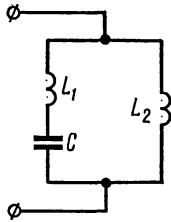


Рис. 13.15

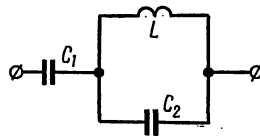


Рис. 13.16

13.17. Определить элементы двухполюсника (рис. 13.16), если известны его резонансные частоты $\omega_1 = 4080 \text{ сек}^{-1}$, $\omega_2 = 7070 \text{ сек}^{-1}$, а при заданной частоте $\omega_{\text{зад}} = 3200 \text{ сек}^{-1}$ — модуль его сопротивления 510 ом.

В. Частотные характеристики двухполюсников

13.18. Получить выражения и построить кривые зависимостей эквивалентных активного $R(\omega)$ и реактивного $X(\omega)$ сопротивлений от частоты, а также амплитудно-частотной $Z(\omega)$ и фазочастотной $\varphi(\omega)$ характеристик цепей рис. 13.17, а и б. Принять $r_1 = r_2 = r$. Построить годограф входного сопротивления при изменении частоты.

Решение. Рассмотрим схему рис. 13.17, а. Ее комплексное входное сопротивление

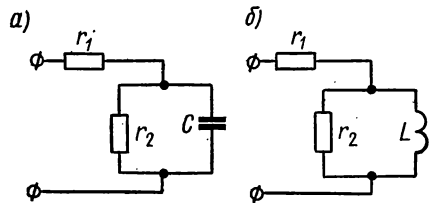


Рис. 13.17

$$Z(j\omega) = r_1 + \frac{r_2 \frac{1}{j\omega C}}{r_2 + \frac{1}{j\omega C}} = r + \frac{r}{1 + (\omega Cr)^2} - j \frac{\omega Cr^2}{1 + (\omega Cr)^2} = \\ = R(\omega) + jX(\omega).$$

Здесь

$$R(\omega) = r + \frac{r}{1 + (\omega Cr)^2}, \quad (1)$$

$$X(\omega) = - \frac{\omega Cr^2}{1 + (\omega Cr)^2}. \quad (2)$$

Модуль полного сопротивления

$$Z(\omega) = \sqrt{R^2(\omega) + X^2(\omega)} \quad (3)$$

и его фаза

$$\varphi(\omega) = \arctg \frac{X(\omega)}{R(\omega)}. \quad (4)$$

По формулам (1)—(4) на рис. 13.18, а построены соответствующие кривые. Результаты вычислений сведены в табл. 13.4.

Т а б л и ц а 13.4

ω	ωCr	$(\omega Cr)^2$	$1+(\omega Cr)^2$	$R(\omega)$	$X(\omega)$	$Z(\omega)$	$\operatorname{tg}\varphi(\omega)$	$\varphi(\omega)$
0	0	0	1	$2r$	0	$2r$	0	0
$\frac{1}{rC}$	1	1	2	$1,5r$	$-0,5r$	$1,58r$	$-0,333$	$-18^\circ 25'$
$\frac{2}{rC}$	2	4	5	$1,2r$	$-0,4r$	$1,27r$	$-0,333$	$-18^\circ 25'$
$\frac{3}{rC}$	3	9	10	$1,1r$	$-0,3r$	$1,14r$	$-0,273$	$-15^\circ 20'$
∞	∞	∞	∞	r	0	r	0	0

Найдем уравнение годографа. Из совместного решения уравнений (1) и (2) вычисляем

$$\omega Cr = \frac{X(\omega)}{R(\omega) - r}.$$

Подставляя это в (1), после преобразований получим

$$\left[R(\omega) - \frac{3}{2} r \right]^2 + X^2(\omega) = \left(\frac{r}{2} \right)^2.$$

Это — уравнение окружности, центр которой расположен на оси $R(\omega)$ в точке с абсциссой, равной $3r/2$, и радиусом $r/2$. Годограф входного сопротивления изображен на рис. 13.18, б.

13.19. Показать, что для цепи рис. 13.19 изображение $Z(j\omega) = R(\omega) + jX(\omega)$ является окружностью на плоскости (R, X) , т. е. годографом, k — числовой коэффициент.

13.20. Найти входные сопротивления цепей рис. 13.20, а и б, выраженные через три параметра R , a и b , где

$$R = \sqrt{\frac{L}{C}}, \quad a^2 = \frac{L}{Cr^2}, \quad b = \omega \sqrt{LC}.$$

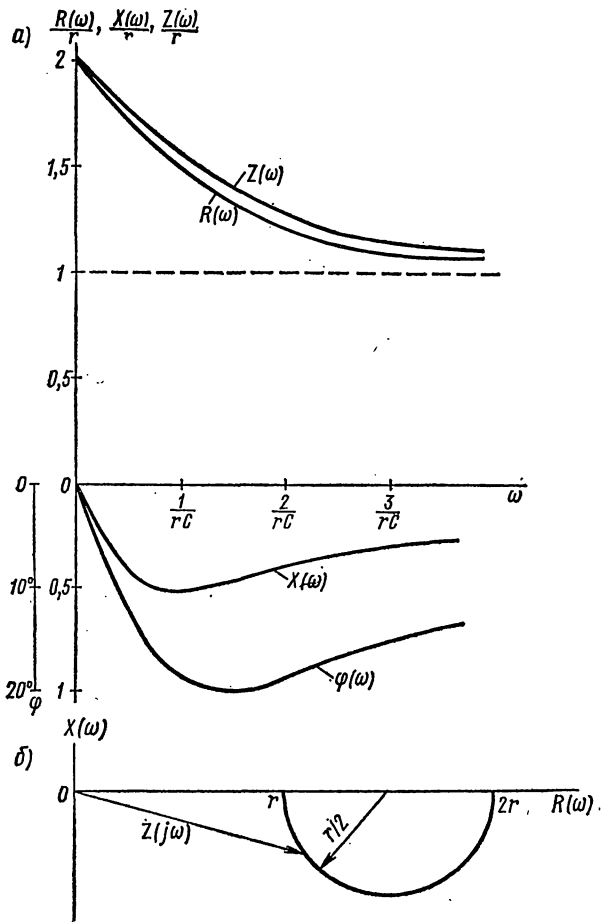


Рис. 13.18

Начертить график модуля сопротивления $Z(\omega)$ при изменении ω от нуля до бесконечности и рассмотреть влияние a на характер кривой.

Решение. Рассмотрим схему рис. 13.20, а. Ее комплексное входное сопротивление

$$Z(j\omega) = j\omega L + \frac{r \frac{1}{j\omega C}}{r + \frac{1}{j\omega C}} = \frac{r - \omega^2 LCr + j\omega L}{1 + j\omega Cr}$$

Полученное $Z(j\omega)$ преобразуем, введя вместо r , ωL и ωC их выражения через заданные параметры. Сопротивление r найдем в результате

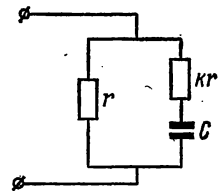


Рис. 13.19

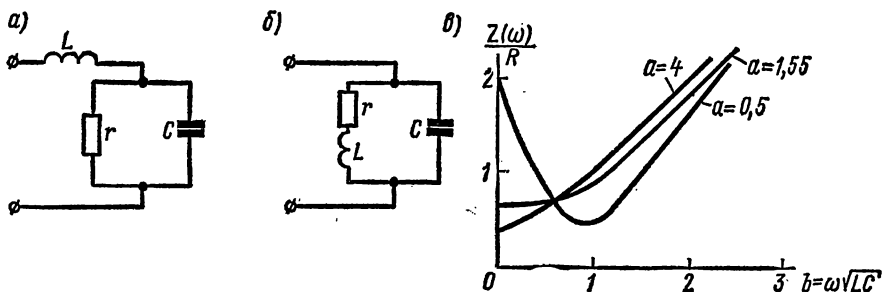


Рис. 13.20

деления R на a , величины ωL и ωC — в результате соответственного перемножения и деления b на R . Действительно,

$$\frac{R}{a} = \frac{\sqrt{\frac{L}{C}}}{\sqrt{\frac{L}{Cr^2}}} = r; \quad bR = \omega \sqrt{LC} \sqrt{\frac{L}{C}} = \omega L;$$

$$\frac{b}{R} = \frac{\omega \sqrt{LC}}{\sqrt{\frac{L}{C}}} = \omega C.$$

Итак, после соответствующей подстановки получим

$$Z(j\omega) = R \frac{1 - b^2 + jab}{a + jb}.$$

Модуль полного сопротивления

$$Z(\omega) = R \sqrt{\frac{(1 - b^2)^2 + a^2 b^2}{a^2 + b^2}}.$$

Рассматривая a как параметр, построим $Z(\omega)$ в функции b . Для определения минимума $Z(\omega)$ приравняем $\frac{dZ(\omega)}{d\omega} = 0$.

В результате получим

$$b^2 = -a^2 + \sqrt{2a^2 + 1}.$$

Величина b^2 должна быть положительной, поэтому $2a^2 + 1 \geq a^4$, или, решая это уравнение, найдем $a \leq 1,55$. Это предельное значение a , при котором функция еще имеет минимум.

По уравнению $Z(\omega)$ рассчитано семейство кривых при разных a , которые изображены на рис. 13.20, в.

Глава четырнадцатая ЧЕТЫРЕХПОЛЮСНИКИ

ОСНОВНЫЕ ПОЛОЖЕНИЯ И СООТНОШЕНИЯ

В этой главе рассматриваются линейные, пассивные и активные неавтономные четырехполюсники.

Активным неавтономным четырехполюсником называется четырехполюсник, внутри которого содержатся зависимые источники энергии например схемы замещения электронных ламп и полупроводниковых триодов (транзисторов). У таких четырехполюсников после их отключения от остальной части цепи на входных и выходных зажимах нет напряжения.

1. Основные уравнения четырехполюсника. Связь между входными и выходными напряжениями и токами \dot{U}_1 и \dot{I}_1 , \dot{U}_2 и \dot{I}_2 линейного активного (неавтономного) и пассивного четырехполюсников (при положительных направлениях напряжений и токов, указанных на рис. 14.1*) может быть выражена одной из следующих шести основных уравнений и й (или уравнений передачи).

Форма *Y*:

$$\left. \begin{aligned} \dot{I}_1 &= Y_{11} \dot{U}_1 + Y_{12} \dot{U}_2; \\ \dot{I}_2 &= Y_{21} \dot{U}_1 + Y_{22} \dot{U}_2. \end{aligned} \right\} \quad (14.1a)$$

Форма *Z*:

$$\dot{U}_1 = Z_{11} \dot{I}_1 + Z_{12} \dot{I}_2; \quad \dot{U}_2 = Z_{21} \dot{I}_1 + Z_{22} \dot{I}_2; \quad (14.1б)$$

Форма *H*:

$$\dot{U}_1 = H_{11} \dot{I}_1 + H_{12} \dot{U}_2; \quad \dot{I}_2 = H_{21} \dot{I}_1 + H_{22} \dot{U}_2. \quad (14.1в)$$

Форма *F*:

$$\dot{I}_1 = F_{11} \dot{U}_1 + F_{12} \dot{I}_2; \quad \dot{U}_2 = F_{21} \dot{U}_1 + F_{22} \dot{I}_2. \quad (14.1г)$$

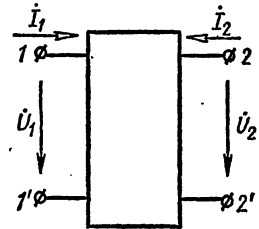


Рис. 14.1

* В литературе используются различные варианты выбора положительных направлений первичного и вторичного токов четырехполюсника. В книге принято так называемое *встречное* направление первичного и вторичного токов. Используются также другие варианты: вариант *прямой* передачи, при котором положительные направления первичного и вторичного токов выбираются направленными слева направо; вариант *обратной* передачи, при котором первичный и вторичный токи выбираются направленными справа налево.

Форма А:

$$\left. \begin{aligned} \dot{U}_1 &= A_{11}\dot{U}_2 - A_{12}\dot{I}_2; \\ \dot{I}_1 &= A_{21}\dot{U}_2 - A_{22}\dot{I}_2. \end{aligned} \right\} \quad (14.1д)$$

Форма В:

$$\left. \begin{aligned} \dot{U}_2 &= B_{11}\dot{U}_1 - B_{12}\dot{I}_1; \\ \dot{I}_2 &= B_{21}\dot{U}_1 - B_{22}\dot{I}_1. \end{aligned} \right\} \quad (14.1е)$$

Вместо коэффициентов A_{11} , A_{12} , A_{21} , A_{22} используется часто их запись в виде A , B , C и D .

При выбранных положительных направлениях напряжений и токов, согласно рис. 14.1, при нагрузке четырехполюсника со стороны вторичных зажимов на сопротивление Z_n последнее связано с выходным напряжением и током соотношением

$$\dot{U}_2 = -\dot{I}_2 Z_n. \quad (14.2)$$

Коэффициенты основных уравнений четырехполюсника (14.1 а—е) называются *параметрами четырехполюсника*. Они определяются только схемой самого четырехполюсника. В общем случае все коэффициенты четырехполюсника комплексны.

Связь коэффициентов различных форм уравнений (при выборе положительных направлений напряжений и токов согласно рис. 14.1 и записи основных уравнений четырехполюсника в виде уравнений 14.1, а—е) приведена в табл. 14.1.

Здесь

$$\begin{aligned} |Y| &= Y_{11}Y_{22} - Y_{12}Y_{21}; & |Z| &= Z_{11}Z_{22} - Z_{12}Z_{21}; \\ |H| &= H_{11}H_{22} - H_{12}H_{21}; & |F| &= F_{11}F_{22} - F_{12}F_{21}; \\ |A| &= A_{11}A_{22} - A_{12}A_{21}; & |B| &= B_{11}B_{22} - B_{12}B_{21} \end{aligned}$$

есть определители, составленные из коэффициентов соответствующих уравнений четырехполюсников.

Определители, составленные из Y - и Z -параметров, а также из H - и F -параметров и A - и B -параметров взаимно обратны, т. е.

$$|Y| = \frac{1}{|Z|}, \quad |H| = \frac{1}{|F|}, \quad |A| = \frac{1}{|B|}. \quad (14.3)$$

Для обратимого четырехполюсника существует следующая связь между коэффициентами каждой формы:

$$\left. \begin{aligned} Y_{12} &= Y_{21}; \quad Z_{12} = Z_{21}; \quad H_{12} = -H_{21}; \quad F_{12} = -F_{21}; \\ A_{11}A_{22} - A_{12}A_{21} &= 1, \quad B_{11}B_{22} - B_{12}B_{21} = 1. \end{aligned} \right\} \quad (14.4)$$

Таким образом, обратимый несимметричный четырехполюсник характеризуется тремя независимыми коэффициентами.

Таблица 14.1

Опреде- ляемые параметры матрицы	В зависимости от параметров											
	Y		Z		H		F		A		B	
Y	Y ₁₁	Y ₁₂	Z ₂₂	-Z ₁₂	1	-H ₁₂	F	F ₁₂	A ₂₂	- A	B ₁₁	-1
		Y ₂₁	Y ₂₂	Z	Z	H ₁₁	H ₁₁	F ₂₂	F ₂₂	A ₁₂	A ₁₂	B ₁₂
			-Z ₂₁	Z ₁₁	H ₂₁	H	-F ₂₁	1	-1	A ₁₁	- B	B ₂₂
			Z	Z	H ₁₁	H ₁₁	F ₂₂	F ₂₂	A ₁₂	A ₁₂	B ₁₂	B ₁₂
Z	Y ₂₂	-Y ₁₂	Z ₁₁	Z ₁₂	H	H ₁₂	1	-F ₁₂	A ₁₁	A	B ₂₂	1
	Y	Y			H ₂₂	H ₂₂	F ₁₁	F ₁₁	A ₂₁	A ₂₁	B ₂₁	B ₂₁
	Y ₂₁	Y ₁₁	Z ₂₁	Z ₂₂	-H ₂₁	1	F ₂₁	F	1	A ₂₂	B	B ₁₁
	Y	Y			H ₂₂	H ₂₂	F ₁₁	F ₁₁	A ₂₁	A ₂₁	B ₂₁	B ₂₁
H	1	-Y ₁₂	Z	Z ₁₂	H ₁₁	H ₁₂	F ₂₂	-F ₁₂	A ₁₂	A	B ₁₂	1
	Y ₁₁	Y ₁₁	Z ₂₂	Z ₂₂	H ₁₁	H ₁₂	F	F	A ₂₂	A ₂₂	B ₁₁	B ₁₁
	Y ₂₁	Y	-Z ₂₁	1	H ₂₁	H ₂₂	-F ₂₁	F ₁₁	-1	A ₂₁	- B	B ₂₁
	Y ₁₁	Y ₁₁	Z ₂₂	Z ₂₂	H ₂₁	H ₂₂	F	F	A ₂₂	A ₂₂	B ₁₁	B ₁₁
F	Y	-Y ₁₂	1	-Z ₁₂	H ₂₂	-H ₁₂	F ₁₁	F ₁₂	A ₂₁	- A	B ₂₁	-1
	Y ₂₂	Y ₂₂	Z ₁₁	Z ₁₁	H	H			A ₁₁	A ₁₁	B ₂₂	B ₂₂
	Y ₂₁	1	Z ₂₁	Z	-H ₂₁	H ₁₁	F ₂₁	F ₂₂	1	A ₁₂	B	B ₁₂
	Y ₂₂	Y ₂₂	Z ₁₁	Z ₁₁	H	H			A ₁₁	A ₁₁	B ₂₂	B ₂₂
A	-Y ₂₂	-1	Z ₁₁	Z	- H	-H ₁₁	1	F ₂₂	A ₁₁	A ₁₂	B ₂₂	B ₁₂
	Y ₂₁	Y ₂₁	Z ₂₁	Z ₂₁	H ₂₁	H ₂₁	F ₂₁	F ₂₁			B	B
	- Y	-Y ₁₁	1	Z ₂₂	-H ₂₂	-1	F ₁₁	F	A ₂₁	A ₂₂	B ₂₁	B ₁₁
	Y ₂₁	Y ₂₁	Z ₂₁	Z ₂₁	H ₂₁	H ₂₁	F ₂₁	F ₂₁			B	B
B	-Y ₁₁	-1	Z ₂₂	Z	1	H ₁₁	- F	-F ₂₂	A ₂₂	A ₁₂	B ₁₁	B ₁₂
	Y ₁₂	Y ₁₂	Z ₁₂	Z ₁₂	H ₁₂	H ₁₂	F ₁₂	F ₁₂	A	A		
	- Y	-Y ₂₂	1	Z ₁₁	H ₂₂	H	-F ₁₁	-1	A ₂₁	A ₁₁	B ₂₁	B ₂₂
	Y ₁₂	Y ₁₂	Z ₁₂	Z ₁₂	H ₁₂	H ₁₂	F ₁₂	F ₁₂	A	A		

- В симметричном обратном четырехполюснике помимо зависимостей (14.4) имеется еще следующая связь между его параметрами:

$$\begin{aligned}
 Y_{11} = Y_{22}, \quad Z_{11} = Z_{22}, \quad H_{11} = H_{22}, \quad F_{11} = F_{22}, \quad A_{11} = A_{22}, \\
 B_{11} = B_{22}.
 \end{aligned}
 \tag{14.5}$$

Поэтому симметричный обратимый четырехполюсник характеризуется лишь двумя независимыми параметрами.

Напомним, что пассивные линейные четырехполюсники всегда обратимы.

2. Способы определения коэффициентов четырехполюсника. Коэффициенты четырехполюсников могут быть определены различными способами:

1) составлением уравнений по законам Кирхгофа (либо методом контурных токов или узловых потенциалов) и представлением их решения в виде одной из форм уравнений (14.1, а—е);

2) по значениям напряжений и токов в режимах холостого хода и короткого замыкания [см. формулы (14.6)];

3) разбивкой сложного четырехполюсника на более простые четырехполюсники, параметры которых известны, и определение его параметров по формулам табл. 14.3;

4) способом эквивалентных преобразований (например, путем преобразования треугольника сопротивлений в эквивалентную звезду).

В табл. 14.2 приводятся формулы коэффициентов формы А некоторых простейших пассивных четырехполюсников.

Примеры даны в задачах 14.1 и 14.2.*

Коэффициенты четырехполюсника могут быть определены по известным напряжениям и токам в режимах холостого хода и короткого замыкания по формулам, которые получаются из формул (14.1, а—е):

$$Y_{11} = \left(\frac{\dot{i}_1}{\dot{U}_1} \right)_{\dot{U}_2=0}, \quad Y_{12} = \left(\frac{\dot{i}_1}{\dot{U}_2} \right)_{\dot{U}_1=0}, \quad Y_{21} = \left(\frac{\dot{i}_2}{\dot{U}_1} \right)_{\dot{U}_2=0},$$

$$Y_{22} = \left(\frac{\dot{i}_2}{\dot{U}_2} \right)_{\dot{U}_1=0}; \quad (14.6a)$$

$$Z_{11} = \left(\frac{\dot{U}_1}{\dot{i}_1} \right)_{\dot{i}_2=0}, \quad Z_{12} = \left(\frac{\dot{U}_1}{\dot{i}_2} \right)_{\dot{i}_1=0}, \quad Z_{21} = \left(\frac{\dot{U}_2}{\dot{i}_1} \right)_{\dot{i}_2=0},$$

$$Z_{22} = \left(\frac{\dot{U}_2}{\dot{i}_2} \right)_{\dot{i}_1=0}; \quad (14.6б)$$

$$H_{11} = \left(\frac{\dot{U}_1}{\dot{i}_1} \right)_{\dot{U}_2=0}, \quad H_{12} = \left(\frac{\dot{U}_1}{\dot{U}_2} \right)_{\dot{i}_1=0}, \quad H_{21} = \left(\frac{\dot{i}_2}{\dot{i}_1} \right)_{\dot{U}_2=0},$$

$$H_{22} = \left(\frac{\dot{i}_2}{\dot{U}_2} \right)_{\dot{i}_1=0}; \quad (14.6в)$$

$$F_{11} = \left(\frac{\dot{i}_1}{\dot{U}_1} \right)_{\dot{i}_2=0}, \quad F_{12} = \left(\frac{\dot{i}_1}{\dot{i}_2} \right)_{\dot{U}_1=0}, \quad F_{21} = \left(\frac{\dot{U}_2}{\dot{U}_1} \right)_{\dot{i}_2=0},$$

$$F_{22} = \left(\frac{\dot{U}_2}{i_2} \right)_{\dot{U}_1=0} ; \quad (14.6r)$$

$$A_{11} = \left(\frac{\dot{U}_1}{\dot{U}_2} \right)_{i_2=0}, \quad A_{12} = \left(\frac{\dot{U}_1}{-i_2} \right)_{\dot{U}_2=0}, \quad A_{21} = \left(\frac{i_1}{\dot{U}_2} \right)_{i_2=0},$$

$$A_{22} = \left(\frac{i_1}{-i_2} \right)_{\dot{U}_2=0} ; \quad (14.6д)$$

$$B_{11} = \left(\frac{\dot{U}_2}{\dot{U}_1} \right)_{i_1=0}, \quad B_{12} = \left(\frac{\dot{U}_2}{-i_1} \right)_{\dot{U}_1=0}, \quad B_{21} = \left(\frac{i_2}{\dot{U}_1} \right)_{i_1=0},$$

$$B_{22} = \left(\frac{i_2}{-i_1} \right)_{\dot{U}_1=0} ; \quad (14.6e)$$

Примеры приведены в задачах 14.1 и 14.2.

3. Матричная форма записи уравнений четырехполюсника; виды соединения четырехполюсников. Основные уравнения четырехполюсника могут быть записаны в матричной форме (основные понятия о матрицах даны в приложении 4).

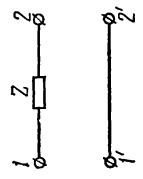
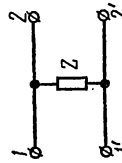
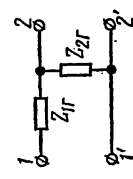
В табл. 14.3 приведены матричные формы записи основных уравнений четырехполюсника (14.1). Там же даны схемы сложных соединений двух четырехполюсников и формулы для определения их матриц. Аналогичные формулы справедливы при соединении любого числа четырехполюсников. Следует иметь в виду, что указанные формулы нахождения матриц сложных четырехполюсников справедливы лишь при выполнении условий регулярности их соединений. Соединение четырехполюсника регулярно в случае, когда токи, протекающие через оба первичных и оба вторичных зажима каждого из четырехполюсников, равны по величине и обратны по направлению.

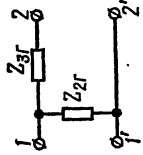
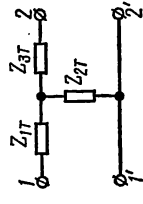
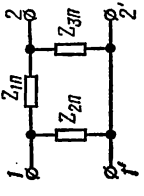
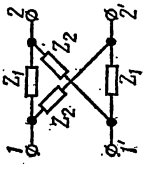
Далее указаны некоторые случаи регулярного соединения четырехполюсников:

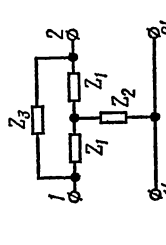
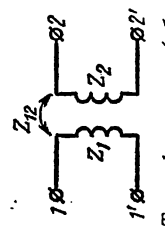
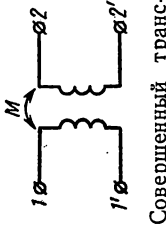
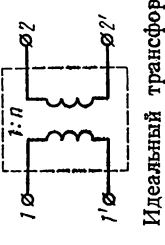
- 1) каскадное соединение любых четырехполюсников;
- 2) параллельное соединение: а) уравновешенных четырехполюсников (т. е. имеющих горизонтальную ось симметрии), б) подобных четырехполюсников (схемы одинаковы, а сопротивления соответствующих элементов пропорциональны), в) треугольных четырехполюсников, причем так, что их общие зажимы соединены накоротко (таковы Т- и П-образные схемы);
- 3) последовательное соединение треугольных четырехполюсников, общие зажимы которых объединены (например, Т- или П-образные и соответственно перевернутые Т- или П-образные);
- 4) соединение любым способом произвольного четырехполюсника с другим, у которого на входе или (и) выходе включен трансформатор.

Примеры приведены в задачах 14.15, 14.18 и 14.22.

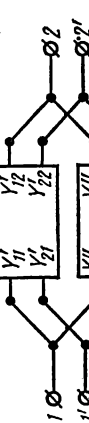
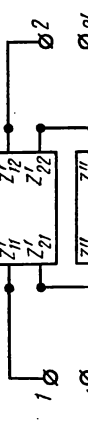
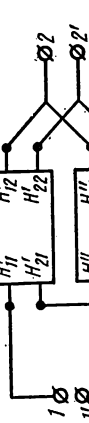
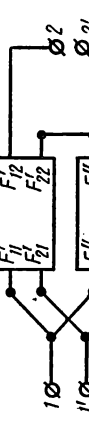
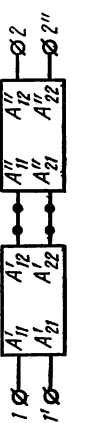
Таблица 14.2

Номер рису- нка	Параметры (коэффициенты)				Номер формулы	
	A_{11}	A_{12}	A_{21}	A_{22}		
1	 <p>Одноэлементный по- следовательный</p>	1	Z	0	1	(14.7a)
2	 <p>Одноэлементный па- раллельный</p>	1	0	$\frac{1}{Z}$	1	(14.7б)
3	 <p>Г-образный с Т-входом</p>	$1 + \frac{Z_{1Г}}{Z_{2Г}}$	$Z_{1Г}$	$\frac{1}{Z_{2Г}}$	1	(14.7в)

4	 <p>Г-образный с П-выходом</p>	1	$Z_{3Г}$	$\frac{1}{Z_{2Г}}$	$1 + \frac{Z_{3Г}}{Z_{2Г}}$	(14.7Г)
5	 <p>Т-образный</p>	$1 + \frac{Z_{1Г}}{Z_{2Г}}$	$Z_{1Г} + Z_{3Г} + \frac{Z_{1Г} Z_{3Г}}{Z_{2Г}}$	$\frac{1}{Z_{2Г}}$	$1 + \frac{Z_{3Г}}{Z_{2Г}}$	(14.7Д)
6	 <p>П-образный</p>	$1 + \frac{Z_{1П}}{Z_{3П}}$	$Z_{1П}$	$\frac{1}{Z_{2П}} + \frac{1}{Z_{3П}} + \frac{Z_{1П}}{Z_{2П} Z_{3П}}$	$1 + \frac{Z_{1П}}{Z_{2П}}$	(14.7Е)
7	 <p>Мостовой</p>	$1 + \frac{Z_1 + Z_2}{Z_2 - Z_1}$	$\frac{2Z_1 Z_2}{Z_2 - Z_1}$	$\frac{2}{Z_2 - Z_1}$	$\frac{Z_1 + Z_2}{Z_2 - Z_1}$	(14.7Ж)

Номер рису- нка	Параметры (коэффициенты)				Номер формулы	
	A_{11}	A_{12}	A_{21}	A_{22}		
8	 <p>Т-образный мостовой</p>	$\frac{Z_1 Z_3}{\rho} + 1$	$\frac{Z_1 Z_3 (Z_1 + 2Z_2)}{\rho}$	$\frac{2Z_1 + Z_3}{\rho}$	$\frac{Z_1 Z_3}{\rho} + 1$	(14.7з)
	<p>где $\rho = Z_1^2 + 2Z_1 Z_2 + Z_2 Z_3$</p>					
9	 <p>Трансформатор (об- щий случай)</p>	$\pm \frac{Z_1}{Z_{12}}$	$\pm \frac{Z_1 Z_2 - Z_{12}^2}{Z_{12}}$	$\pm \frac{1}{Z_{12}}$	$\pm \frac{Z_2}{Z_{12}}$	(14.7и)
10	 <p>Совершенный транс- форматор $M = \sqrt{L_1 L_2}$</p>	$\pm \sqrt{\frac{L_1}{L_2}}$	0	$\pm \frac{1}{j\omega \sqrt{L_1 L_2}}$	$\pm \sqrt{\frac{L_2}{L_1}}$	(14.7к)
11	 <p>Идеальный трансфор- матор</p>	$\pm \frac{1}{n}$	0	0	±n	(14.7л)

Пр и м е ч а н и е. В схемах трансформаторов знак плюс соответствует встречному включению, знак минус — согласному.

Форма	Матричная форма записи основных уравнений четырехполосника	Использование различных форм основных уравнений четырехполосника при определении параметров схем сложных четырехполосников	
		соединение	
		схема	
		матричное уравнение параметров сложного четырехполосника	
Y	$\begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{U}_1 \\ \dot{U}_2 \end{bmatrix} = [Y] \begin{bmatrix} \dot{U}_1 \\ \dot{U}_2 \end{bmatrix}$	<p>Параллельное</p>  $[Y] = [Y'] + [Y'']$	$[Y] = [Y'] + [Y'']$
Z	$\begin{bmatrix} \dot{U}_1 \\ \dot{U}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} = [Z] \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix}$	<p>Последовательное</p>  $[Z] = [Z'] + [Z'']$	$[Z] = [Z'] + [Z'']$
H	$\begin{bmatrix} \dot{U}_1 \\ i_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} \\ H_{21} & H_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ \dot{U}_2 \end{bmatrix} = [H] \begin{bmatrix} i_1 \\ \dot{U}_2 \end{bmatrix}$	<p>Последовательно-параллельное</p>  $[H] = [H'] + [H'']$	$[H] = [H'] + [H'']$
F	$\begin{bmatrix} i_1 \\ \dot{U}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} \\ F_{21} & F_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{U}_1 \\ i_2 \end{bmatrix} = [F] \begin{bmatrix} \dot{U}_1 \\ i_2 \end{bmatrix}$	<p>Параллельно-последовательное</p>  $[F] = [F'] + [F'']$	$[F] = [F'] + [F'']$
A	$\begin{bmatrix} \dot{U}_1 \\ i_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{U}_2 \\ -i_2 \end{bmatrix} = [A] \begin{bmatrix} \dot{U}_2 \\ -i_2 \end{bmatrix}$	<p>Каскадное (цепочечное)</p>  $[A] = [A'] \cdot [A'']$	$[A] = [A'] \cdot [A'']$

4. Характеристические параметры четырехполюсника. Помимо параметров, указанных в п. 1, широко применяются характеристические параметры четырехполюсника: характеристические сопротивления Z_{1c} и Z_{2c} и характеристическая (или собственная) постоянная передачи g , которые также полностью характеризуют четырехполюсник. Постоянная передачи

$$g = a + jb, \quad (14.8)$$

где a — характеристическое (или собственное) затухание, *нп* или *дб*;
 b — характеристический (или собственный) коэффициент фазы, *рад* или *град*.

Характеристические параметры можно определить через параметры формы A :

$$Z_{1c} = \sqrt{\frac{A_{11}A_{12}}{A_{21}A_{22}}}; \quad Z_{2c} = \sqrt{\frac{A_{22}A_{12}}{A_{21}A_{11}}}; \quad (14.9)$$

$$\text{th } g = \sqrt{\frac{A_{12}A_{21}}{A_{11}A_{22}}}; \quad g = \ln(\sqrt{A_{11}A_{22}} + \sqrt{A_{12}A_{21}}), \quad (14.10)$$

и, наоборот, коэффициенты формы A могут быть выражены через характеристические параметры:

$$\left. \begin{aligned} A_{11} &= \sqrt{\frac{Z_{1c}}{Z_{2c}}} \text{ch } g; & A_{12} &= \sqrt{Z_{1c}Z_{2c}} \text{sh } g; \\ A_{21} &= \frac{1}{\sqrt{Z_{1c}Z_{2c}}} \text{sh } g; & A_{22} &= \sqrt{\frac{Z_{2c}}{Z_{1c}}} \text{ch } g. \end{aligned} \right\} \quad (14.11)$$

Примеры даны в задачах 14.23 и 14.25.

5. Параметры холостого хода и короткого замыкания. В расчетах используются также параметры холостого хода $Z_{1x,x}$ и $Z_{2x,x}$ и короткого замыкания $Z_{1к,з}$ и $Z_{2к,з}$, измеренные соответственно со стороны первичных и вторичных зажимов, которые связаны между собой соотношением

$$\frac{Z_{1x,x}}{Z_{2x,x}} = \frac{Z_{1к,з}}{Z_{2к,з}}. \quad (14.12)$$

Характеристические параметры выражаются через параметры холостого хода и короткого замыкания:

$$Z_{1c} = \sqrt{Z_{1x,x}Z_{1к,з}}; \quad Z_{2c} = \sqrt{Z_{2x,x}Z_{2к,з}}; \quad (14.13)$$

$$\text{th } g = \sqrt{\frac{Z_{1к,з}}{Z_{1x,x}}} = \sqrt{\frac{Z_{2к,з}}{Z_{2x,x}}}. \quad (14.14)$$

Сопротивления холостого хода и короткого замыкания определяются через характеристические параметры или коэффициенты A_{11} , A_{12} , A_{21} и A_{22} :

$$\left. \begin{aligned} Z_{1x.x} &= Z_{1c} \operatorname{cth} g = \frac{A_{11}}{A_{21}}; & Z_{1к.з} &= Z_{1c} \operatorname{th} g = \frac{A_{12}}{A_{22}}; \\ Z_{2x.x} &= Z_{2c} \operatorname{cth} g = \frac{A_{22}}{A_{21}}; & Z_{2к.з} &= Z_{2c} \operatorname{th} g = \frac{A_{12}}{A_{11}} \end{aligned} \right\} (14.15)$$

Коэффициенты A четырехполюсника вычисляются по сопротивлениям холостого хода и короткого замыкания:

$$\left. \begin{aligned} A_{11} &= \frac{Z_{1x.x}}{\sqrt{Z_{2x.x}(Z_{1x.x} - Z_{1к.з})}}; & A_{12} &= Z_{1к.з} \sqrt{\frac{Z_{2x.x}}{Z_{1x.x} - Z_{1к.з}}}; \\ A_{21} &= \frac{1}{\sqrt{Z_{2x.x}(Z_{1x.x} - Z_{1к.з})}}; & A_{22} &= \sqrt{\frac{Z_{2x.x}}{Z_{1x.x} - Z_{1к.з}}} \end{aligned} \right\} (14.16)$$

Примеры даны в задачах 14.8, 14.11.

6. Симметричные четырехполюсники. В частном случае симметричного четырехполюсника все приведенные выше формулы упрощаются, если учесть, что при этом имеются равенства:

$$\left. \begin{aligned} A_{11} &= A_{22}, & Z_{1c} &= Z_{2c} = Z_c, & Z_{1x.x} &= Z_{2x.x} = Z_{x.x}, \\ & & Z_{1к.з} &= Z_{2к.з} = Z_{к.з} \end{aligned} \right\} (14.17)$$

В частности, для симметричного T-образного четырехполюсника, у которого $Z_{1T} = Z_{3T} = \frac{Z_1}{2}$, $Z_{2T} = Z_2$ (см. рис. 5 в табл. 14.2),

$$\operatorname{sh} \frac{g}{2} = \sqrt{\frac{Z_1}{4Z_2}}, \quad Z_c = Z_T = \sqrt{Z_1 Z_2 \left(1 + \frac{Z_1}{4Z_2}\right)}. \quad (14.18)$$

Для симметричного П-образного четырехполюсника, у которого $Z_{2П} = Z_{3П} = 2Z_2$ (см. рис. 6 в табл. 14.2),

$$\operatorname{sh} \frac{g}{2} = \sqrt{\frac{Z_1}{4Z_2}}; \quad Z_c = Z_{П} = \sqrt{\frac{Z_1 Z_2}{1 + \frac{Z_1}{4Z_2}}}. \quad (14.19)$$

Для симметричного мостового четырехполюсника (см. рис. 7 в табл. 14.2)

$$\operatorname{th} \frac{g}{2} = \sqrt{\frac{Z_1}{Z_2}}; \quad Z_c = Z_{м} = \sqrt{Z_1 Z_2} \quad (14.20)$$

7. Эквивалентность четырехполюсников. Четырехполюсники эквивалентны, если они имеют одинаковые: а) параметры коэффициентов одной из форм основных уравнений (Y , Z , H , F , A или B), либо б) ха-

ракетистические параметры, либо в) параметры холостого хода и короткого замыкания.

8. **Входное сопротивление четырехполюсника.** (рис. 14.2,а) со стороны зажимов 1—1' может быть определено либо через его А-коэффициенты, или через параметры х.х. и к.з., либо через характеристические параметры:

$$Z_{1вх} = \frac{A_{11}Z_H + A_{12}}{A_{21}Z_H + A_{22}} = Z_{1х.х} \frac{Z_{2к.з} + Z_H}{Z_{2х.х} + Z_H} = Z_{1с} \operatorname{th}(g + n), \quad (14.21a)$$

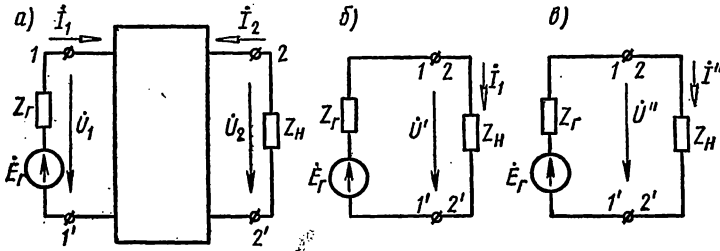


Рис. 14.2

где

$$n = \frac{1}{2} \ln \frac{Z_{2с} + Z_H}{Z_{2с} - Z_H}; \quad (14.21б)$$

Z_H — сопротивление нагрузки.

Если сопротивление генератора Z_r не равно характеристическому сопротивлению четырехполюсника $Z_{1с}$ со стороны входных зажимов $I=1'$, то имеет место несогласованность сопротивлений на входе, и если сопротивление нагрузки $Z_H \neq Z_{2с}$, то несогласованность на выходе. Относительная величина несогласованности определяется коэффициентами отражения (несогласованности) на входе ρ_r и на выходе ρ_H :

$$\rho_r = \frac{Z_r - Z_{1с}}{Z_r + Z_{1с}}; \quad \rho_H = \frac{Z_H - Z_{2с}}{Z_H + Z_{2с}}. \quad (14.22)$$

Погрешность входного сопротивления — относительная величина отклонения $Z_{1вх}$ от $Z_{1с}$, определяемая по формуле

$$\frac{Z_{1вх} - Z_{1с}}{Z_{1вх} + Z_{1с}} = \rho_H e^{-2g}. \quad (14.23a)$$

Отсюда

$$Z_{1вх} = Z_{1с} \frac{1 + \rho_H e^{-2g}}{1 - \rho_H e^{-2g}}. \quad (14.23б)$$

Примеры даны в задачах 14.13 и 14.37.

Таблица 14.4

Определяемые величины	Расчетные формулы
Входное напряжение \dot{U}_1	$\dot{E}_Г \frac{A_{11}Z_H + A_{12}}{A_{11}Z_H + A_{12} + A_{21}Z_H Z_\Gamma + A_{22}Z_\Gamma}$
Входной ток \dot{I}_1	$\dot{E}_Г \frac{A_{21}Z_H + A_{22}}{A_{11}Z_H + A_{12} + A_{21}Z_H Z_\Gamma + A_{22}Z_\Gamma}$
Выходное напряжение \dot{U}_2	$\dot{E}_Г \frac{Z_H}{A_{11}Z_H + A_{12} + A_{21}Z_H Z_\Gamma + A_{22}Z_\Gamma}$
Выходной ток \dot{I}_2	$\dot{E}_Г \frac{-1}{A_{11}Z_H + A_{12} + A_{21}Z_H Z_\Gamma + A_{22}Z_\Gamma}$
Входное сопротивление $Z_{1вх} = \dot{U}_1 / \dot{I}_1$	$\frac{A_{11}Z_H + A_{12}}{A_{21}Z_H + A_{22}}$
Выходное сопротивление $Z_{2вых}$	$\frac{A_{12} + A_{22}Z_\Gamma}{A_{11} + A_{21}Z_\Gamma}$
Коэффициент передачи на- пряжения $\tilde{K}_U = \dot{U}_2 / \dot{U}_1$	$\frac{Z_H}{A_{11}Z_H + A_{12}}$
Коэффициент передачи тока $\tilde{K}_I = \dot{I}_2 / \dot{I}_1$	$\frac{-1}{A_{21}Z_H + A_{22}}$
Передаточная проводимость $Y_{пер} = \dot{I}_2 / \dot{U}_1$	$\frac{-1}{A_{11}Z_H + A_{12}}$
Передаточное сопротивле- ние $Z_{пер} = \dot{U}_2 / \dot{I}_1$	$\frac{Z_H}{A_{21}Z_H + A_{22}}$

9. Выражение различных величин четырехполюсника, подключенного к генератору с э. д. с. E_Γ и внутренним сопротивлением Z_Γ и нагруженного на сопротивление Z_H . Для такого четырехполюсника (см. рис. 14.2, а) в табл. 14.4 приводятся некоторые важные расчетные формулы, выраженные через A -параметры.

10. Рабочая и вносимая постоянные передачи. Рабочей постоянной передачи при включении четырехполосника между нагрузкой Z_H и генератором с э.д.с. E_r и сопротивлением Z_r (см. рис. 14.2, а) называется величина, равная

$$g_p = \frac{1}{2} \ln \frac{\dot{U}' \dot{I}'}{\dot{U}_2 \dot{I}_2} = \frac{1}{2} \ln \frac{\dot{E}_r^2}{4 Z_r \dot{I}_2^2} = \ln \frac{\dot{E}_r}{2 \dot{U}_2} + \frac{1}{2} \ln \frac{Z_H}{Z_r}. \quad (14.24)$$

Здесь \dot{U}' и \dot{I}' относятся к схеме 14.2, б, в которой сопротивление нагрузки берется равным сопротивлению генератора Z_r и подключается непосредственно к генератору. Напряжение \dot{U}_2 и ток \dot{I}_2 относятся к схеме рис. 14.2, а, в которой нагрузка Z_H подключается к генератору через четырехполосник.

Рабочая постоянная передачи четырехполосника может быть вычислена по формуле

$$g_p = g + \ln \frac{Z_r + Z_{1c}}{2 \sqrt{Z_r Z_{1c}}} + \ln \frac{Z_H + Z_{2c}}{2 \sqrt{Z_H Z_{2c}}} + \ln (1 - \rho_r \rho_H e^{-2g}) = a_p + j b_p, \quad (14.25)$$

где g — характеристическая постоянная передачи четырехполосника;

a_p — рабочее затухание;

b_p — рабочая фазовая постоянная;

ρ_r и ρ_H — коэффициенты несогласованности [см. формулы (14.22)].

Рабочее затухание может быть определено по одной из формул:

$$a_p = \ln \frac{E_r}{2 U_2} + \frac{1}{2} \ln \left| \frac{Z_H}{Z_r} \right|, \quad (14.26a)$$

$$a_p = a + \ln \left| \frac{Z_r + Z_{1c}}{2 \sqrt{Z_r Z_{1c}}} \right| + \ln \left| \frac{Z_H + Z_{2c}}{2 \sqrt{Z_H Z_{2c}}} \right| + \ln |1 - \rho_r \rho_H e^{-2g}|, \quad (14.26b)$$

где a — характеристическое затухание четырехполосника;

ρ_r и ρ_H — коэффициенты отражения (несогласованности) на входе и выходе.

Вносимая постоянная передачи

$$g_{вн} = \frac{1}{2} \ln \frac{\dot{U}_2'' \dot{I}_2''}{\dot{U}_2 \dot{I}_2} = a_{вн} + j b_{вн}, \quad (14.27)$$

где \dot{U}_2'' и \dot{I}_2'' — напряжение и ток на нагрузке при непосредственном подключении ее к генератору (рис. 14.2, в);

\dot{U}_2 и \dot{I}_2 — напряжение и ток в той же нагрузке при подключении ее к генератору через четырехполосник (см. рис. 14.2, а);

$a_{вн}$ — вносимое затухание;

$b_{вн}$ — вносимая фазовая постоянная.

Вносимое затухание

$$a_{\text{вн}} = \frac{1}{2} \ln \frac{U_2'' I_2''}{U_2 I_2} = a + \ln \left| \frac{Z_r + Z_{1c}}{2 \sqrt{Z_r Z_{1c}}} \right| + \ln \left| \frac{Z_H + Z_{2c}}{2 \sqrt{Z_H Z_{2c}}} \right| + \ln \left| 1 - \rho_r \rho_H e^{-2g} \right| - \ln \left| \frac{Z_r + Z_H}{2 \sqrt{Z_r Z_H}} \right|. \quad (14.28)$$

Вносимое и рабочее затухания могут быть отрицательными даже для пассивной цепи, что характеризует изменение условий согласования генератора с нагрузкой при включении между ними четырехполюсника.

Пример дан в задаче 14.37.

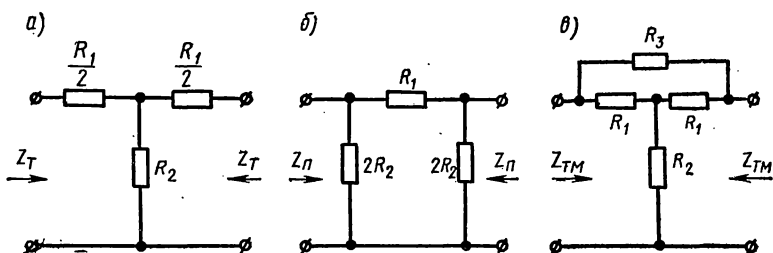


Рис. 14.3

11. Удлинитель — четырехполюсники, составленные из чисто активных сопротивлений. Они выполняются по схемам рис. 14.3, а—в. При расчете удлинителя обычно задаются его характеристическим затуханием и модулем характеристического сопротивления. В этом случае элементы удлинителя рассчитываются по формулам:

для схемы рис. 14.3, а

$$R_1 = 2Z_T \operatorname{th} \frac{a}{2}, \quad R_2 = \frac{Z_T}{\operatorname{sh} a}; \quad (14.29a)$$

для схемы рис. 14.3, б

$$R_1 = Z_{\Pi} \operatorname{sh} a, \quad R_2 = \frac{Z_{\Pi}}{2 \operatorname{th} \frac{a}{2}}; \quad (14.29б)$$

для схемы рис. 14.3, в

$$R_1 = Z_{\text{ТМ}}, \quad R_2 = \frac{R_1}{2} \left(\operatorname{cth} \frac{a}{2} - 1 \right), \quad R_3 = R_1^2 / R_2. \quad (14.29в)$$

12. Трансформаторы для согласования сопротивления генератора Z_r и нагрузки Z_H .

А. Идеальный трансформатор ИТ (рис. 14.4) не имеет потерь и рассеяния, индуктивности катушек бесконечно велики, но их отношение

конечно и равно квадрату чисел витков:

$$L_2/L_1 = \omega_2^2/\omega_1^2 = n^2, \quad n = \sqrt{L_2/L_1}. \quad (14.30)$$

Если задаться коэффициентом трансформации

$$n = U_2/U_1 = \sqrt{Z_H/Z_r}, \quad (14.31)$$

то Z_H и Z_r окажутся подключенными согласованно, т. е.

$$Z_{1вх} = \frac{Z_H}{n^2} = Z_r, \quad Z_{2вх} = n^2 Z_r = Z_H. \quad (14.32)$$

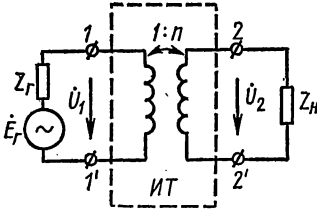


Рис. 14.4

Б. Переходный трансформатор служит для согласования модулей сопротивлений аппаратуры и цепей связи. При согласовании по модулю сопротивления генератора $|Z_r|$ с нагрузкой $|Z_H|$ коэффициент трансформации

$$n = \sqrt{\left| \frac{Z_H}{Z_{1вх}} \right|} = \sqrt{\left| \frac{Z_H}{Z_r} \right|}. \quad (14.33)$$

Расчет трансформатора ведется по заданной величине рабочего затухания, которое определяется по формуле*

$$a_p = a_1 + a_2 + a_3, \quad (14.34)$$

где $a_1 = \ln \left(1 + \frac{r_1}{|Z_r|} \right)$ — постоянная составляющая рабочего затухания;

$a_2 = \frac{1}{2} \ln \left(1 + \frac{|Z_r|^2}{4\omega^2 L_1^2} \right)$ — переменная составляющая в области низких частот;

$a_3 = \frac{1}{2} \ln \left(1 + \frac{\omega^2 \sigma^2 L_1}{4|Z_r|^2} \right)$ — переменная составляющая в области высоких частот.

Оптимальная величина индуктивности определяется из равенства $a_2 = a_3$. В этом случае для расчета параметров обмоток трансформатора используются следующие формулы:

$$\left. \begin{aligned} r_1 = |Z_r| (e^{a_1} - 1); \quad \sigma = 4 \frac{\omega_1}{\omega_2} (e^{2a_2} - 1); \quad L_1 = \frac{|Z_r|}{\sqrt{\omega_1 \omega_2 \sigma}}; \\ r_2 = r_1 n^2; \quad L_2 = L_1 n^2. \end{aligned} \right\} \quad (14.35)$$

Здесь σ — коэффициент рассеяния;

ω_1 и ω_2 — соответственно наименьшая и высшая угловые частоты, при которых должен работать трансформатор.

* Вывод этой формулы можно найти, например, в [10].

Примеры приведены в задачах 14.45 и 14.46.

13. **Минимально-фазовый четырехполюсник.** *Минимально-фазовым* называют четырехполюсник, у которого все нули функции передачи, записанной в операторной форме, лежат в левой части комплексной плоскости p .

Неминимально-фазовым четырехполюсником называют такой четырехполюсник, у которого хотя бы один нуль передаточной функции лежит в правой части плоскости p .

Примеры даны в задачах 14.48 и 14.49.

УПРАЖНЕНИЯ И ЗАДАЧИ

А. Параметры четырехполюсника. Т- и П-схемы замещения четырехполюсника

14.1. Найти параметры-коэффициенты A_{11} , A_{12} , A_{21} и A_{22} Т-образного четырехполюсника (рис. 14.5), если $r = 100$ ом, $x_L = 200$ ом, $x_C = 100$ ом. Проверить выполнимость соотношения $A_{11}A_{22} - A_{12}A_{21} = 1$.

Решение. Расчет параметров-коэффициентов проведем по формулам (14.7д), в которых

$$Z_{1T} = r = 100 \text{ ом}, \quad Z_{2T} = jx_L = j200 \text{ ом},$$

$$Z_{3T} = -jx_C = -j100 \text{ ом}.$$

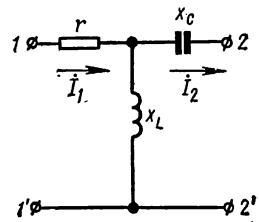


Рис. 14.5

$$A_{11} = 1 + \frac{Z_{1T}}{Z_{2T}} = 1 + \frac{100}{j200} = 1 - j0,5,$$

$$A_{12} = Z_{1T} + Z_{3T} + \frac{Z_{1T}Z_{3T}}{Z_{2T}} = (50 - j100) \text{ ом},$$

$$A_{21} = \frac{1}{Z_{2T}} = -j0,005 \text{ сим}, \quad A_{22} = 1 + \frac{Z_{3T}}{Z_{2T}} = 0,5,$$

Проверка.

$$A_{11}A_{22} - A_{12}A_{21} = (1 - j0,5) 0,5 - (50 - j100) (-j0,005) = 1.$$

Искомые коэффициенты можно найти также по формулам (14.6д):

$$A_{11} = \left(\frac{\dot{U}_1}{\dot{U}_2} \right)_{i_2=0} = \frac{\dot{U}_1}{\frac{\dot{U}_1}{r + jx_L} jx_L} = \frac{r + jx_L}{jx_L} = \frac{100 + j200}{j200} = 1 - j0,5$$

Для определения коэффициента A_{12} предварительно найдем ток \dot{i}_2 в режиме короткого замыкания:

$$(\dot{i}_2)_{\dot{U}_2=0} = - \frac{\dot{U}_1}{r + \frac{x_L x_C}{jx_L - jx_C}} \cdot \frac{jx_L}{jx_L - jx_C} = - \frac{jx_L}{x_L x_C + jr(x_L - x_C)};$$

$$A_{12} = \left(\frac{\dot{U}_1}{-\dot{i}_2} \right)_{\dot{U}_2=0} = \frac{x_L x_C + jr(x_L - x_C)}{jx_L} = (50 - j100) \text{ ом};$$

$$A_{21} = \left(\frac{\dot{i}_1}{\dot{U}_2} \right)_{\dot{i}_2=0} = \frac{\dot{i}_1}{ix_L \dot{i}_1} = -j0,005 \text{ сим};$$

$$A_{22} = \left(-\frac{\dot{i}_1}{\dot{i}_2} \right)_{\dot{U}_2=0} = - \frac{\dot{i}_1}{\dot{i}_1 \frac{jx_L}{jx_L - jx_C}} = \frac{x_L - x_C}{x_L} = 0,5$$

14.2. Для четырехполюсника задачи 14.1 вычислить Y -, Z -, H - и F -параметры.

Решение. Используя соотношения из табл. 14.1, найдем:

$$Y_{11} = \frac{A_{22}}{A_{12}} = \frac{0,5}{50 - j100} = (2 + j4) 10^{-3} \text{ сим};$$

$$Y_{12} = -\frac{1}{A_{12}} = (-4 - j8) 10^{-3} \text{ сим} = Y_{21};$$

$$Y_{22} = \frac{A_{11}}{A_{12}} = (8 + j6) 10^{-3} \text{ сим};$$

$$Z_{11} = \frac{A_{11}}{A_{21}} = (100 + j200) \text{ ом}; \quad Z_{12} = \frac{1}{A_{21}} = j200 \text{ ом} = Z_{21};$$

$$Z_{22} = \frac{A_{22}}{A_{21}} = j100 \text{ ом};$$

$$H_{11} = \frac{A_{12}}{A_{22}} = (100 - j200) \text{ ом}; \quad H_{12} = \frac{1}{A_{22}} = 2 = -H_{21};$$

$$H_{22} = \frac{A_{21}}{A_{22}} = -j0,05 \text{ сим};$$

$$F_{11} = \frac{A_{21}}{A_{11}} = (2 - j4) 10^{-3} \text{ сим}; \quad F_{12} = -\frac{1}{A_{11}} = -0,8 - j0,4 = -F_{21};$$

$$F_{22} = \frac{A_{12}}{A_{11}} = (80 - j60) \text{ ом}.$$

14.3. Для четырехполюсников рис. 14.6, а и б вычислить A -, Z -, Y -, H - и F -параметры. Значения сопротивлений в омах указаны на рисунках.

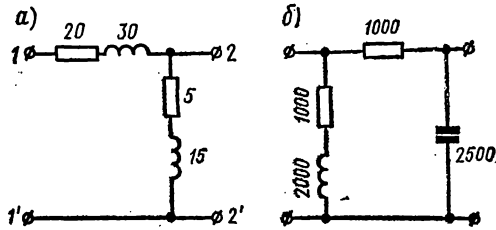


Рис. 14.6

14.4. Найти комплексные сопротивления Т- и П-образных схем, эквивалентных четырехполюснику, коэффициенты которого

$$A_{11} = 0,6 + j0,1, \quad A_{12} = (17 + j72) \text{ ом}, \quad A_{22} = 0,5 + j0,2.$$

Указание. Искомые сопротивления найти из формул (14.7д, е).

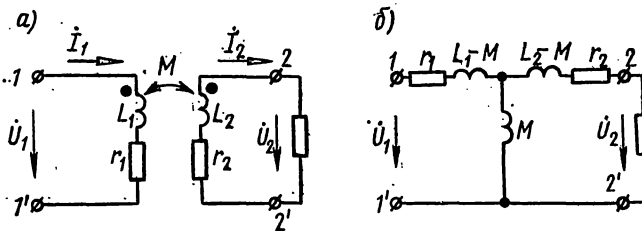


Рис. 14.7

14.5. Параметры трансформатора без стального сердечника (рис. 14.7, а):

$$r_1 = 2 \text{ ом}, \quad L_1 = 0,5 \text{ мГн}, \quad r_2 = 3 \text{ ом} \quad \text{и} \quad L_2 = 0,72 \text{ мГн}.$$

Коэффициент связи между обмотками трансформатора $k = 0,5$. Чему равны A -коэффициенты четырехполюсника, эквивалентного указанному трансформатору, при частоте $f = 10 \text{ кГц}$? Определить комплексные сопротивления Т- и П-образных четырехполюсников, эквивалентных трансформатору.

Указание. Заданная схема может быть заменена эквивалентной схемой рис. 14.7, б (см. п. 5 основных положений гл. 5).

14.6. Вычислить комплексные сопротивления при частоте $f = 10 \text{ кГц}$ для Т-образной схемы, эквивалентной автотрансформатору без стального сердечника (рис. 14.8), параметры которого $r_1 = 2 \text{ ом}$, $L_1 = 0,35 \text{ мГн}$, $r_2 = 3 \text{ ом}$, $L_2 = 0,5 \text{ мГн}$ и $M = 0,25 \text{ мГн}$.

У к а з а н и е. Составить уравнения Кирхгофа, затем совместно их решить так, чтобы первичные напряжения и ток были выражены через вторичные напряжение и ток. Сравнив коэффициенты полученных уравнений с (14.1д), получить А-параметры. Зная их, найти искомые сопротивления по формулам (14.7д).

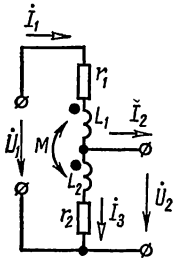


Рис. 14.8

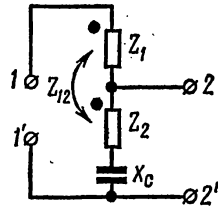


Рис. 14.9

14.7. В месте соединения воздушных и кабельных линий связи используются автотрансформаторы с конденсаторами (рис. 14.9). Вычислить коэффициенты A_{11} , A_{12} , A_{21} , A_{22} четырехполюсника, если $Z_1 = Z_2 = (5 + j20)$ ом, $Z_{12} = j10$ ом, $Z_3 = -jx_c = -j30$ ом.

Б. Входное сопротивление четырехполюсника

14.8. Известны коэффициенты четырехполюсника (см. задачу 14.1) $A_{11} = 1 - j0,5$, $A_{21} = -j0,005$ сим, $A_{22} = 0,5$. Определить сопротивления холостого хода и короткого замыкания со стороны первичных и вторичных зажимов. Проверить выполнимость соотношения $Z_{1к.х} : Z_{1к.з} = Z_{2к.х} : Z_{2к.з}$.

Р е ш е н и е. Из формулы (14.4) находим коэффициент

$$A_{12} = \frac{A_{11}A_{22} - 1}{A_{21}} = (50 - j100) \text{ ом.}$$

Искомые сопротивления вычисляем по формулам(14.15):

$$Z_{1к.х} = \frac{A_{11}}{A_{21}} = \frac{1 - j0,5}{-j0,005} = (100 + j200) \text{ ом; } Z_{2к.х} = \frac{A_{22}}{A_{21}} = j100 \text{ ом;}$$

$$Z_{1к.з} = \frac{A_{12}}{A_{22}} = (100 - j200) \text{ ом; } Z_{2к.з} = \frac{A_{12}}{A_{11}} = (80 - j60) \text{ ом.}$$

П р о в е р к а.

$$\frac{Z_{1к.х}}{Z_{1к.з}} = \frac{100 + j200}{100 - j200} = -0,6 + j0,8, \quad \frac{Z_{2к.х}}{Z_{2к.з}} = \frac{j100}{80 - j60} = -0,6 + j0,8.$$

14.9. Вычислить сопротивления холостого хода и короткого замыкания со стороны первичных и вторичных зажимов четырех-

полюсника, коэффициенты которого $A_{11} = 0,2 - j0,4$, $A_{12} = (-16 - j28)$ ом, $A_{22} = -0,6 - j0,8$.

14.10. Для схем рис. 14.6, а и б вычислить входные сопротивления при холостом ходе и коротком замыкании двумя способами: непосредственным вычислением указанных сопротивлений; с помощью А-параметров.

14.11. У несимметричного четырехполюсника со стороны первичных зажимов были измерены напряжения, токи и мощности при холостом ходе и коротком замыкании, а также со стороны вторичных зажимов — напряжение, ток и мощность при холостом ходе. Определить А-коэффициенты четырехполюсника, если измерения показали:

$$U_{1x.x} = 10 \text{ в}, I_{1x.x} = 316 \text{ ма}, P_{1x.x} = 3 \text{ вт} (\varphi_{1x.x} > 0);$$

$$U_{1к.з} = 5 \text{ в}, I_{1к.з} = 139 \text{ ма}, P_{1к.з} = 0,576 \text{ вт} (\varphi_{1к.з} > 0);$$

$$U_{2x.x} = 6 \text{ в}, I_{2x.x} = 600 \text{ ма}, P_{2x.x} = 0 (\varphi_{2x.x} < 0).$$

Решение.

$$Z_{1x.x} = \frac{U_{1x.x}}{I_{1x.x}} = \frac{10}{0,316} = 31,6 \text{ ом};$$

$$\cos \varphi_{1x.x} = \frac{P_{1x.x}}{U_{1x.x} I_{1x.x}} = \frac{3}{10 \cdot 0,316} = 0,949;$$

$$\varphi_{1x.x} = 18^\circ 25', Z_{1x.x} = z_{1x.x} e^{j\varphi_{1x.x}} = 31,6 e^{j18^\circ 25'} = (30 + j10) \text{ ом};$$

$$Z_{1к.з} = \frac{U_{1к.з}}{I_{1к.з}} = \frac{5}{0,139} = 36 \text{ ом};$$

$$\cos \varphi_{1к.з} = \frac{P_{1к.з}}{U_{1к.з} I_{1к.з}} = \frac{0,576}{5 \cdot 0,139} = 0,83, \varphi_{1к.з} = 33^\circ 50';$$

$$Z_{1к.з} = z_{1к.з} e^{j\varphi_{1к.з}} = 36 e^{j33^\circ 50'} = (30 + j20) \text{ ом};$$

$$z_{2x.x} = \frac{U_{2x.x}}{I_{2x.x}} = \frac{6}{0,6} = 10 \text{ ом}.$$

Так как $P_{2x.x} = 0$, то $Z_{2x.x}$ имеет чисто реактивный (емкостный) характер, т. е. $\varphi_{2x.x} = -90^\circ$, поэтому

$$Z_{2x.x} = z_{2x.x} e^{j\varphi_{2x.x}} = 10 e^{-j90^\circ} = -j10 \text{ ом}.$$

Коэффициенты четырехполюсника определяются по формулам (14.16):

$$A_{11} = \frac{30 + j10}{\sqrt{-j10[(30 + j10) - (30 + j20)]}} = 1 - j3;$$

$$A_{21} = \frac{A_{11}}{Z_{1x.x}} = \frac{1 - j3}{30 + j10} = -j0,1 \text{ сим};$$

$$A_{22} = A_{21}Z_{2x,x} = -j0,1(-j10) = -1;$$

$$A_{12} = A_{22}Z_{1x,3} = -1(30 + j20) = (-30 - j20) \text{ ом.}$$

14.12. Для симметричного четырехполюсника опыты холостого хода и короткого замыкания дали результаты: $U_{1x,x} = 10 \text{ в}$, $I_{1x,x} = 1 \text{ а}$, $P_{1x,x} = 10 \text{ вт}$, $U_{1x,3} = 10 \text{ в}$, $I_{1x,3} = 0,8 \text{ а}$, $P_{1x,3} = 8 \text{ вт}$.

Вычислить A -коэффициенты этого четырехполюсника и начертить T -образную схему замещения.

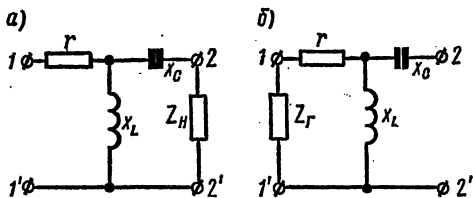


Рис. 14.10

Решение. Входное сопротивление со стороны зажимов 1-1' (рис. 14.10, а) определяем по формуле (см. табл. 14.4).

$$Z_{1вх} = \frac{A_{11}Z_H + A_{12}}{A_{21}Z_H + A_{22}} = \frac{(1 - j0,5)200 + (50 - j100)}{-j0,005 \cdot 200 + 0,5} = (260 + j120) \text{ ом.}$$

Проверка.

$$Z_{1вх} = r + \frac{jx_L(r_H - jx_C)}{r_H + j(x_L - x_C)} = 100 + \frac{j200(200 - j100)}{200 + j(200 - 100)} = (260 + j120) \text{ ом.}$$

Входное сопротивление со стороны зажимов 2-2' (рис. 14.10, б)

$$Z_{2вх} = \frac{A_{22}Z_r + A_{12}}{A_{21}Z_r + A_{11}} = \frac{0,5 \cdot 150 + (50 - j100)}{-j0,005 \cdot 150 + 1 - j0,5} = (97,7 + j21,8) \text{ ом.}$$

Проверка.

$$Z_{2вх} = -jx_C + \frac{jx_L(r_r + r)}{r_r + r + jx_L} = -j100 + \frac{j200(150 + 100)}{250 + j200} = (97,7 + j21,8) \text{ ом.}$$

14.14. Определить сопротивление четырехполюсника (см. рис. 14.10, а) со стороны первичных зажимов (прямая передача) при нагрузке вторичных зажимов на активное сопротивление $Z_H = 10 \text{ ом}$. То же со стороны зажимов 2-2' (обратная передача) при нагрузке зажимов 1-1' на $Z_r = 6 \text{ ом}$.

В. Схемы соединения четырехполюсников

14.15. Два одинаковых четырехполюсника задачи 14.1 соединены каскадно по схемам, изображенным на рис. 14.11, а, б, в. Для каждого из случаев определить A -параметры сложного четырехполюсника.

Решение. а) Входные зажимы первого четырехполюсника соединены с входными зажимами второго (рис. 14.11, а).

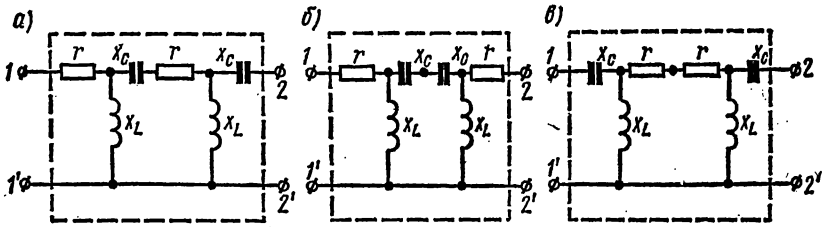


Рис. 14.11

При каскадном соединении четырехполюсников матрица $[A_a]$ результирующего четырехполюсника равна произведению соответствующих матриц соединяемых четырехполюсников*:

$$\begin{aligned}
 [A_a] &= [A'] \cdot [A''] = \begin{bmatrix} A'_{11} & A'_{12} \\ A'_{21} & A'_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A''_{11} & A''_{12} \\ A''_{21} & A''_{22} \end{bmatrix} = \\
 &= \begin{bmatrix} A'_{11}A''_{11} + A'_{12}A''_{21} & A'_{11}A''_{12} + A'_{12}A''_{22} \\ A'_{21}A''_{11} + A'_{22}A''_{21} & A'_{21}A''_{12} + A'_{22}A''_{22} \end{bmatrix};
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 A_{11a} &= A'_{11}A''_{11} + A'_{12}A''_{21} = (1 - j0,5)^2 + (50 - j100)(-j0,005) = 0,25 - \\
 &\quad - j1,25;
 \end{aligned}$$

$$A_{12a} = A'_{11}A''_{12} + A'_{12}A''_{22} = (25 - j175) \text{ ом};$$

$$A_{21a} = A'_{21}A''_{11} + A'_{22}A''_{21} = -(25 + j75) \cdot 10^{-4} \text{ см};$$

$$A_{22a} = A'_{21}A''_{12} + A'_{22}A''_{22} = -0,25 - j0,25.$$

б) Выходные зажимы первого четырехполюсника соединены с выходными зажимами второго (рис. 14.11, б).

В этом случае в матрице второго четырехполюсника коэффициенты A''_{11} и A''_{22} меняются местами:

$$[A_b] = [A'] \cdot [A''] = \begin{bmatrix} A'_{11} & A'_{12} \\ A'_{21} & A'_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A''_{22} & A''_{12} \\ A''_{21} & A''_{11} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A'_{11}A''_{22} + A'_{12}A''_{21} & A'_{11}A''_{12} + A'_{12}A''_{11} \\ A'_{21}A''_{22} + A'_{22}A''_{21} & A'_{21}A''_{12} + A'_{22}A''_{11} \end{bmatrix};$$

$$A_{11b} = A'_{11}A''_{22} + A'_{12}A''_{21} = -j0,5;$$

$$A_{12b} = A'_{11}A''_{12} + A'_{12}A''_{11} = -j250 \text{ ом};$$

* См. приложение 4.

$$A_{216} = A'_{21}A''_{22} + A'_{22}A''_{21} = -j0,005 \text{ сим};$$

$$A_{226} = A'_{21}A''_{12} + A'_{22}A''_{11} = -j0,5.$$

в) Входные зажимы первого четырехполюсника соединены с входными зажимами второго (рис. 14.11, θ).

В этом случае в матрице первого четырехполюсника коэффициенты A'_{11} и A'_{22} меняются местами:

$$\begin{aligned} [A_B] &= [A'] [A''] = \begin{bmatrix} A'_{22} & A'_{12} \\ A'_{21} & A'_{11} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A''_{11} & A''_{12} \\ A''_{21} & A''_{22} \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} A'_{22}A''_{11} + A'_{12}A''_{21} & A'_{22}A''_{12} + A'_{12}A''_{22} \\ A'_{21}A''_{11} + A'_{11}A''_{21} & A'_{21}A''_{12} + A'_{11}A''_{22} \end{bmatrix}; \\ A_{11B} &= -j0,5; \quad A_{12B} = (50 - j100) \text{ ом}, \quad A_{21B} = \\ &= (-0,005 - j0,01) \text{ сим}; \quad A_{22B} = -j0,5. \end{aligned}$$

14.16. Решить предыдущую задачу, применив ее условия к двум одинаковым четырехполюсникам рис. 14.6, a .

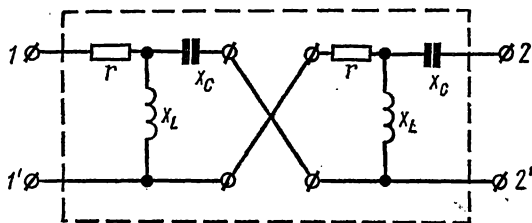


Рис. 14.12

14.17. Два одинаковых четырехполюсника задачи 14.1 соединены каскадно, но так, что выходные зажимы первого перекрещены (рис. 14.12). Определить A -параметры результирующего четырехполюсника.

Решение. При перекрещивании выходных зажимов первого четырехполюсника у всех его A -параметров знаки меняются на обратные (перекрещенные параметры имеют верхний индекс в виде крестика):

$$A_{11}^{\times} = -A'_{11}, \quad A_{12}^{\times} = -A'_{12}, \quad A_{21}^{\times} = -A'_{21}, \quad A_{22}^{\times} = -A'_{22}.$$

Поэтому коэффициенты результирующего четырехполюсника будут отличаться от полученных в задаче 14.15; a только знаками:

$$A_{11} = A_{11}^{\times}A'_{11} + A_{12}^{\times}A'_{21} = -0,25 + j1,25;$$

$$A_{12} = (-25 + j175) \text{ ом}; \quad A_{21} = (25 + j75) 10^{-4} \text{ сим};$$

$$A_{22} = 0,25 + j0,25.$$

14.18. Два одинаковых четырехполюсника из задачи 14.1 соединены: а) последовательно, б) параллельно, в) последовательно-параллельно, г) параллельно-последовательно. Для каждого из случаев начертить схему регулярного соединения и определить А-коэффициенты сложного четырехполюсника.

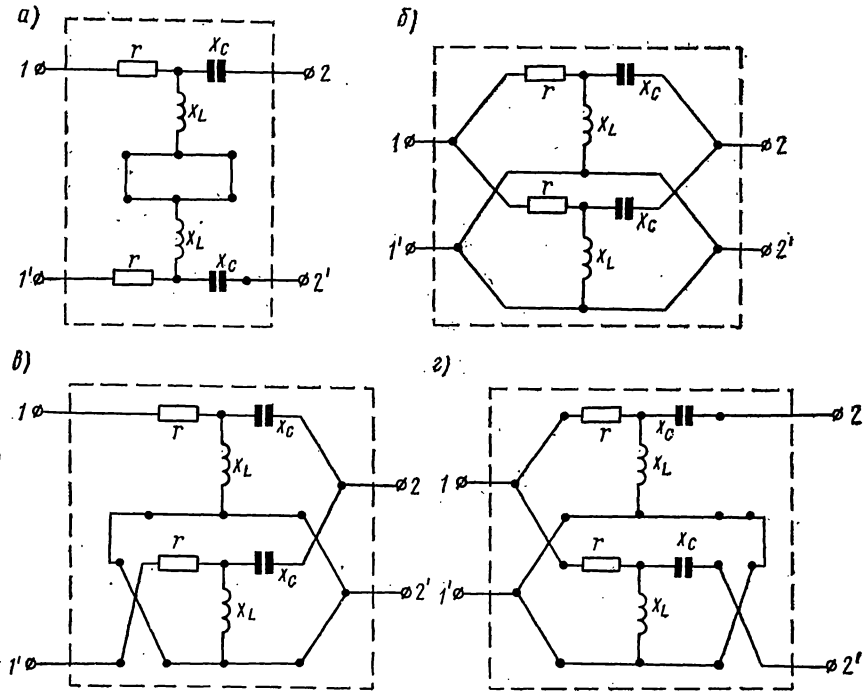


Рис. 14.13

Решение. а) Схема последовательного соединения четырехполюсника приведена на рис. 14.13, а. При последовательном соединении четырехполюсников матрица $[Z]$ результирующего четырехполюсника равна сумме матриц соединяемых четырехполюсников:

$$[Z] = [Z'] + [Z''];$$

$$[Z] = \begin{bmatrix} Z'_{11} & Z'_{12} \\ Z'_{21} & Z'_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} Z''_{11} & Z''_{12} \\ Z''_{21} & Z''_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2Z'_{11} & 2Z'_{12} \\ 2Z'_{21} & 2Z'_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{bmatrix},$$

отсюда

$$Z_{11} = 2Z'_{11}, \quad Z_{12} = 2Z'_{12}, \quad Z_{21} = 2Z'_{21}, \quad Z_{22} = 2Z'_{22}.$$

Для определения элементов матрицы $[A]$ результирующего четырехполюсника используем соотношения из табл. 14.1:

$$A_{11} = \frac{Z_{11}}{Z_{21}} = \frac{2Z'_{11}}{2Z'_{21}} = \frac{Z'_{11}}{Z'_{21}} = A'_{11} = 1 - j0,5;$$

$$A_{12} = \frac{|Z|}{Z_{21}} = \frac{Z_{11}Z_{22} - Z_{12}Z_{21}}{Z_{21}} = 2A'_{12} = (100 - j200) \text{ ом};$$

$$A_{21} = \frac{1}{Z_{21}} = \frac{1}{2Z'_{21}} = 0,5A'_{21} = -j0,0025 \text{ см};$$

$$A_{22} = \frac{Z_{22}}{Z_{21}} = \frac{2Z'_{22}}{2Z'_{21}} = \frac{Z'_{22}}{Z'_{21}} = A'_{22} = 0,5.$$

б) Схема параллельного соединения дана на рис. 14.13, б. При параллельном соединении четырехполюсников складываются матрицы $[Y]$:

$$[Y] = [Y'] + [Y''] = \begin{bmatrix} Y'_{11} & Y'_{12} \\ Y'_{21} & Y'_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} Y''_{11} & Y''_{12} \\ Y''_{21} & Y''_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2Y'_{11} & 2Y'_{12} \\ 2Y'_{21} & 2Y'_{22} \end{bmatrix}.$$

Для определения элементов матрицы $[A]$ результирующего четырехполюсника используем соотношения из табл. 14.1:

$$A_{11} = -\frac{Y_{22}}{Y_{21}} = A'_{11} = 1 - j0,5; \quad A'_{12} = -\frac{1}{Y_{21}} = 0,5A'_{12} =$$

$$= (25 - j50) \text{ ом};$$

$$A_{21} = -\frac{|Y|}{Y_{21}} = 2A'_{21} = -j0,01 \text{ см}; \quad A_{22} = -\frac{Y_{11}}{Y_{21}} = A'_{22} = 0,5.$$

в) Схема последовательно-параллельного соединения четырехполюсников приведена на рис. 14.13, в. Для обеспечения регулярности соединения потребовалось перекрещивание входных зажимов второго четырехполюсника. При этом, как известно, все коэффициенты матрицы $[A'']$ этого четырехполюсника меняют знак на обратный:

$$A''_{11} \times = -A'_{11}, \quad A''_{12} \times = -A'_{12}, \quad A''_{21} \times = -A'_{21}, \quad A''_{22} \times = -A'_{22}.$$

Коэффициенты матрицы $[H'']$ определяются по формулам табл. 14.1:

$$H''_{11} \times = \frac{A''_{12} \times}{A''_{22} \times} = \frac{-A'_{12}}{-A'_{22}} = H'_{11}; \quad H''_{12} \times = \frac{1}{A''_{22} \times} = -\frac{1}{A'_{22}} = -H'_{12};$$

$$H''_{21} \times = -\frac{1}{A''_{22} \times} = \frac{1}{A'_{22}} = -H'_{21}; \quad H''_{22} \times = \frac{A''_{21} \times}{A''_{22} \times} = \frac{-A'_{21}}{A'_{22}} = H'_{22}.$$

Отсюда видно, что при перекрещивании входных зажимов коэффициенты $H''_{11} \times$ и $H''_{22} \times$ сохраняют свой знак, а коэффициенты $H''_{12} \times$ и $H''_{21} \times$ меняют знак на обратный.

При последовательно-параллельном соединении складываются матрицы $[H]$:

$$[H] = [H'] + [H'' \times] = \begin{bmatrix} H'_{11} & H'_{12} \\ H'_{21} & H'_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} H''_{11} \times & H''_{12} \times \\ H''_{21} \times & H''_{22} \times \end{bmatrix} = \\ = \begin{bmatrix} 2H'_{11} & 0 \\ 0 & 2H'_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} \\ H_{21} & H_{22} \end{bmatrix},$$

отсюда

$$H_{11} = 2H'_{11} = (200 - j400) \text{ ом}, \quad H_{12} = 0,$$

$$H_{21} = 0, \quad H_{22} = 2H'_{22} = -j0,02 \text{ сим.}$$

Коэффициенты матрицы $[A]$ равны:

$$A_{11} = \frac{|H|}{H_{21}} = \infty; \quad A_{12} = -\frac{H_{11}}{H_{21}} = \infty;$$

$$A_{21} = -\frac{H_{22}}{H_{21}} = \infty; \quad A_{22} = -\frac{1}{H_{21}} = \infty.$$

Равенство коэффициентов матрицы $[A]$ бесконечности означает, что у результирующего четырехполюсника матрица $[A]$ не существует.

г) Схема параллельно-последовательного соединения четырехполюсников приведена на рис. 14.13, г. В целях обеспечения регулярности соединения выходные зажимы второго четырехполюсника перекрещены. При параллельно-последовательном соединении складываются матрицы $[F]$:

$$[F] = [F'] + [F'' \times] = \begin{bmatrix} F'_{11} & F'_{12} \\ F'_{21} & F'_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} F''_{11} \times & F''_{12} \times \\ F''_{21} \times & F''_{22} \times \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F'_{11} + F''_{11} \times F'_{12} + F''_{12} \times \\ F'_{21} + F''_{21} \times F'_{22} + F''_{22} \times \end{bmatrix}.$$

В результате перекрещивания выходных зажимов второго четырехполюсника получаем:

$$A''_{11} \times = -A'_{11}; \quad A''_{12} \times = -A'_{12}; \quad A''_{21} \times = -A'_{21}; \quad A''_{22} \times = -A'_{22}.$$

Элементы матрицы $[F]$ второго четырехполюсника (см. табл. 14.1):

$$F''_{11} \times = \frac{A''_{21} \times}{A''_{11} \times} = \frac{A'_{21}}{A'_{11}} = F'_{11}; \quad F''_{12} \times = -\frac{1}{A''_{11} \times} = \frac{1}{A'_{11}} = F'_{12};$$

$$F''_{21} \times = \frac{1}{A''_{11} \times} = -\frac{1}{A'_{11}} = -F'_{21}; \quad F''_{22} \times = \frac{A''_{12} \times}{A''_{11} \times} = \frac{A'_{12}}{A'_{11}} = F'_{22}.$$

Элементы матрицы $[F]$ результирующего четырехполюсника:

$$F_{11} = 2F'_{11} = (4 - j8) 10^{-3} \text{ сим}; \quad F_{12} = 0;$$

$$F_{21} = 0; \quad F_{22} = 2F'_{22} = (-160 + j120) \text{ ом}.$$

Коэффициенты матрицы $[A]$:

$$A_{11} = \frac{1}{F_{21}} = \infty; \quad A_{12} = \frac{F_{22}}{F_{21}} = \infty; \quad A_{21} = \frac{F_{11}}{F_{21}} = \infty; \quad A_{22} = \frac{[F]}{F_{21}} = \infty.$$

14.19. Решить задачу 10.18, применив ее условия к двум одинаковым четырехполосникам рис. 14.6.

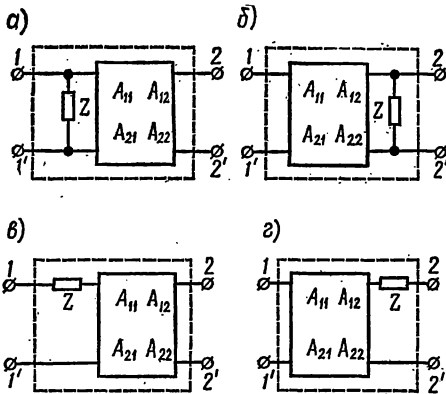


Рис. 14.14

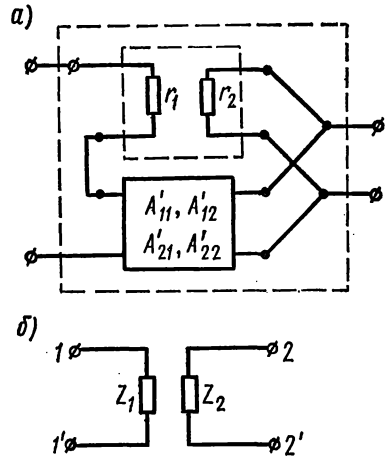


Рис. 14.15

14.20. Дан четырехполосник, параметры которого A_{11} , A_{12} , A_{21} и A_{22} известны. Определить A -параметры результирующего четырехполосника, обведенного штриховой линией на рис. 14.14, а, б, в и г.

14.21. Разорванный четырехполосник, параметры которого $r_1 = 150 \text{ ом}$, $r_2 = 200 \text{ ом}$, соединен по схеме рис. 14.15, а с четырехполосником задачи 14.1. Найти параметры A_{11} , A_{12} , A_{21} , A_{22} сложного четырехполосника.

Примечание. Разорванным называется четырехполосник, входные и выходные зажимы которого не связаны между собой. Схема разорванного четырехполосника приведена на рис. 14.15, б. Его параметры:

$$Y_{11} = \frac{1}{Z_1}, \quad Y_{12} = Y_{21} = 0, \quad Y_{22} = \frac{1}{Z_2},$$

$$Z_{11} = Z_1, \quad Z_{12} = Z_{21} = 0, \quad Z_{22} = Z_2,$$

$$H_{11} = Z_1, \quad H_{12} = H_{21} = 0, \quad H_{22} = \frac{1}{Z_2}.$$

Указание. Соединение, показанное на рис. 14.15, а, является последовательно-параллельным соединением четырехполосников. Поэтому матрица $[H]$ результирующего четырехполосника должна быть равна сумме соответствующих матриц соединяемых четырехполосников.

14.22. Четырехполосник задачи 14.1 соединен каскадно с идеальным трансформатором, коэффициент трансформации которого

$1:n = 0,5$ (рис. 14.16, а и б). Найти A -параметры результирующего четырехполюсника.

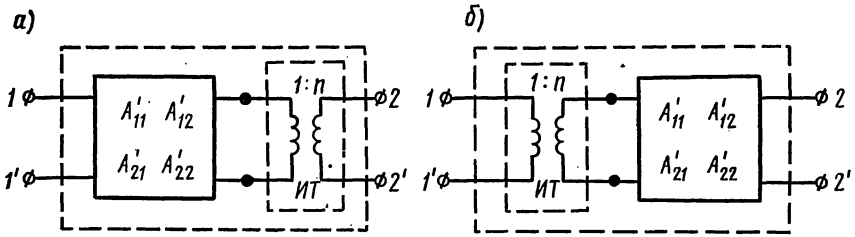


Рис. 14.16

Решение. а) Для рис. 14.16, а. Матрица $[A]$ результирующего четырехполюсника равна произведению матриц $[A']$ соединяемого четырехполюсника и $[A'']$ идеального трансформатора:

$$[A] = [A'] [A''] = \begin{bmatrix} A'_{11} & A'_{12} \\ A'_{21} & A'_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{n} & 0 \\ 0 & n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A'_{11} \frac{1}{n} & A'_{12} n \\ A'_{21} \frac{1}{n} & A'_{22} n \end{bmatrix};$$

$$A_{11} = A'_{11} \frac{1}{n} = (1 - j0,5)0,5 = 0,5 - j0,25, \quad A_{12} = A'_{12} n = (100 - j200) \text{ ом};$$

$$A_{21} = A'_{21} \frac{1}{n} = -j0,0025 \text{ сим}; \quad A_{22} = A'_{22} n = 1.$$

б) Для рис. 14.16, б:

$$[A] = [A''] [A'] = \begin{bmatrix} \frac{1}{n} & 0 \\ 0 & n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A'_{11} & A'_{12} \\ A'_{21} & A'_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{n} A'_{11} & \frac{1}{n} A'_{12} \\ n A'_{21} & n A'_{22} \end{bmatrix};$$

$$A_{11} = \frac{1}{n} A'_{11} = 0,5 - j0,25; \quad A_{12} = \frac{1}{n} A'_{12} = (25 - j50) \text{ ом};$$

$$A_{21} = n A'_{21} = -j0,01 \text{ сим}; \quad A_{22} = n A'_{22} = 1.$$

Примечание. Следует обратить внимание, что лишь при $n = 1$ матрица $[A]$ четырехполюсника не изменяется, независимо от того, где включен идеальный трансформатор: на входе или на выходе.

Г. Характеристические параметры, их связь с другими параметрами четырехполюсника. Повторные параметры

14.23. Для четырехполюсника задачи 14.1 найти характеристические параметры Z_{1c} , Z_{2c} , g .

Решение. Способ 1. Использование A -параметров четырехполюсника. По формулам (14.9) получим:

$$Z_{1c} = \sqrt{\frac{A_{11}A_{12}}{A_{21}A_{22}}} = \sqrt{\frac{(1-j0,5)(50-j100)}{-j0,005 \cdot 0,5}} = \sqrt{5 \cdot 10^4} = 224 \text{ ом};$$

$$Z_{2c} = \sqrt{\frac{A_{22}A_{12}}{A_{21}A_{11}}} = \sqrt{\frac{0,5(50-j100)}{-j0,005(1-j0,5)}} = \sqrt{\frac{56e^{-j63^\circ 30'}}{0,0056e^{-j116^\circ 30'}}} = \\ = \sqrt{10^4 e^{j53^\circ}} = 100e^{j26^\circ 30'} \text{ ом}.$$

Их формулы (14.10):

$$e^g = e^a \cdot e^{jb} = \sqrt{A_{11}A_{22}} + \sqrt{A_{12}A_{21}} = \sqrt{(1-j0,5)0,5} + \\ + \sqrt{-j0,005(50-j100)} = \sqrt{0,56e^{-j26^\circ 30'}} + \sqrt{0,56e^{-j153^\circ 30'}} = \\ = 0,748e^{-j13^\circ 15'} + 0,748e^{-j76^\circ 45'} = 0,902 - j0,902 = 1,275e^{-j45^\circ};$$

$$e^a = 1,275, \quad a = \ln 1,275 = 0,244 \text{ nep};$$

$$e^{jb} = e^{-j45^\circ}, \quad b = -45^\circ = -0,785 \text{ рад};$$

$$g = a + jb = 0,244 - j0,785.$$

Способ 2. Использование параметров холостого хода и короткого замыкания. Они были найдены в задаче 14.8. По формулам (14.13) получим:

$$Z_{1c} = \sqrt{Z_{1x,x}Z_{1k,3}} = \sqrt{(100 + j200)(100 - j200)} = 224 \text{ ом};$$

$$Z_{2c} = \sqrt{Z_{2x,x}Z_{2k,3}} = \sqrt{j100(80 - j60)} = \sqrt{10^4 e^{j53^\circ}} = 100e^{j26^\circ 30'} \text{ ом}.$$

По формуле (14.14) найдем

$$\text{th } g = \sqrt{\frac{Z_{2k,3}}{Z_{2x,x}}} = \sqrt{\frac{80 - j60}{j100}} = \sqrt{e^{-j127^\circ}} = e^{-j63^\circ 30'} = \\ = 0,446 - j0,895.$$

Отсюда для определения g , поступим так:

$$\text{th } g = \frac{\text{sh } g}{\text{ch } g} = \frac{e^g - e^{-g}}{e^g + e^{-g}} \cdot \frac{e^g}{e^g} = \frac{e^{2g} - 1}{e^{2g} + 1},$$

откуда

$$e^{2g} = e^{2a}e^{j2b} = \frac{1 + \text{th } g}{1 - \text{th } g} = \frac{1 + 0,446 - j0,895}{1 - 0,446 + j0,895} = 1,63e^{-j90^\circ};$$

$$e^{2a} = 1,63, \quad 2a = \ln 1,63 = 0,488, \quad a = 0,244 \text{ nep};$$

$$e^{j2b} = e^{-j90^\circ}, \quad 2b = -90^\circ, \quad b = -45^\circ = -0,785 \text{ рад}.$$

14.24. Определить характеристические параметры четырехполюсников рис. 14.6, a и b .

14.25. Известны характеристические параметры четырехполюсника:

$$Z_{1c} = 224 \text{ ом}, Z_{2c} = 100e^{j26^\circ 30'}, g = 0,244 - j0,785.$$

Найти его A -параметры.

Решение. Искомые параметры найдем по формулам (14.11). Для этого вначале вычислим $\text{sh } g$ и $\text{ch } g$ (см. приложение 3):

$$\begin{aligned} \text{sh } g &= \text{sh} (0,244 - j0,785) = \text{sh } 0,244 \cdot \cos (-0,785) + \\ &+ j \text{ch } 0,244 \sin (-0,785) = 0,243 \cdot 0,707 + j1,032 (-0,707) = \\ &= 0,172 - j0,73 = 0,75e^{-j76^\circ 45'}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{ch } g &= \text{ch} (0,244 - j0,785) = \text{ch } 0,244 \cdot \cos (-0,785) + \\ &+ j \text{sh } 0,244 \sin (-0,785) = 0,75e^{-j13^\circ 15'}; \end{aligned}$$

$$A_{11} = \sqrt{\frac{Z_{1c}}{Z_{2c}}} \text{ch } g = \sqrt{\frac{224}{100e^{j26^\circ 30'}}} 0,75e^{-j13^\circ 15'} = 1,12e^{-j26^\circ 30'};$$

$$A_{12} = 112e^{-j63^\circ 30'} \text{ ом}; A_{21} = -j0,005 \text{ сим}; A_{22} = 0,5.$$

14.26. Определить A -параметры симметричного четырехполюсника, если

$$Z_c = 680e^{j3^\circ 26'} \text{ ом и } g = 18,35e^{j86^\circ 15'}.$$

14.27. Найти характеристические параметры сложных четырехполюсников задач 14.15, 14.18, 14.21, 14.22.

Указание. При решении задачи 14.14 было установлено, что при последовательно-параллельном соединении у результирующего четырехполюсника A -параметры не существуют, поэтому расчет рекомендуется вести по формулам (14.13) и (14.14). Для определения параметров холостого хода и короткого замыкания удобно схему рис. 14.13, θ представить в виде, изображенном на рис. 14.17, a . При параллельно-последовательном соединении четырехполюсников схема, удобная для определения параметров холостого хода и короткого замыкания, приведена на рис. 14.17, b .

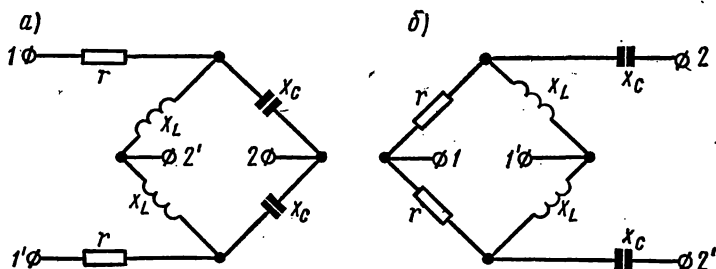


Рис. 14.17

14.28. Опыты холостого хода и короткого замыкания для симметричного четырехполюсника дали результаты:

$$\begin{aligned} U_{x.x} &= 10 \text{ в}, I_{x.x} = 0,447 \text{ а}, P_{x.x} = 2 \text{ вт} (\varphi_{x.x} > 0), U_{k.s} = \\ &= 10 \text{ в}, I_{k.s} = 0,5 \text{ а}, P_{k.s} = 3 \text{ вт} (\varphi_{k.s} > 0). \end{aligned}$$

Определить характеристическое сопротивление и характеристическую постоянную передачи четырехполюсника.

14.29. Для несимметричного четырехполюсника задачи 14.1 найти повторные сопротивления.

Примечание. Повторным сопротивлением называется такое сопротивление нагрузки, при котором входное сопротивление равно этому нагрузочному.

14.30. При каком сопротивлении нагрузки Z_n , подключенной ко вторичным зажимам симметричного четырехполюсника рис. 14.11, б, входное сопротивление $Z_{вх}$ равно Z_n ?

14.31. Коэффициенты четырехполюсника $A_{11} = 1,2 + j0,2$, $A_{12} = (16 + j6) \text{ ом}$, $A_{21} = 0,05 \text{ сим}$. Определить, какое чисто реактивное сопротивление надо подключить к его выходным зажимам, чтобы первичные напряжение и ток совпадали по фазе.

14.32. Коэффициенты четырехполюсника $A_{11} = 1,3 + j0,2$, $A_{21} = 0,05 \text{ сим}$, $A_{22} = 1 - j0,5$. При каком чисто активном сопротивлении нагрузки напряжение U_1 и ток I_1 совпадают по фазе?

Д. Эквивалентность четырехполюсников

14.33. Показать, что четырехполюсник задачи 14.1 и четырехполюсник, изображенный на рис. 14.18, эквивалентны. Величины сопротивлений на рисунке даны в омах.

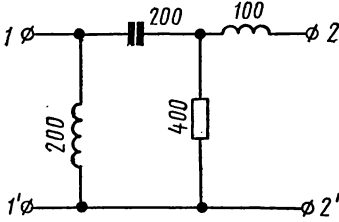


Рис. 14.18

14.34. Показать, что четырехполюсник задачи 14.1 не может быть физически реализован в виде эквивалентного П-образного четырехполюсника.

14.35. Найти сопротивления Z_1 и Z_2 мостового четырехполюсника (см. рис. 7 в табл. 14.2), эквивалентного симметричному Т-образному четырехполюснику (см. рис. 5 в табл. 14.2), элементы которого $Z_{1T} = Z_{3T}$, Z_{2T} известны.

14.36. Несимметричный четырехполюсник рис. 14.19, а имеет сопротивления: $Z_1 = (100 + j200) \text{ ом}$, $Z_2 = 200 \text{ ом}$, $Z_3 = (1000 + j800) \text{ ом}$. Преобразовать его в эквивалентный симметричный четырехполюсник, соединенный каскадно с идеальным трансформатором.

Решение. Рассмотрим два варианта преобразования.

1. Идеальный трансформатор присоединен к выходным зажимам симметричного четырехполюсника (рис. 14.19, б).

Коэффициенты матрицы $[A]$ заданного несимметричного четырехполюсника находим по формулам (14.7д):

$$A_{11} = 1,5 + j, \quad A_{12} = 800 (1 + j3) \text{ ом}, \quad A_{21} = 0,005 \text{ сим}, \quad A_{22} = 6 + j4.$$

Матрица $[A]$ несимметричного четырехполюсника должна быть равна матрице сложного четырехполюсника:

$$\begin{bmatrix} A_{11}A_{12} \\ A_{21}A_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A'_{11}A'_{12} \\ A'_{21}A'_{11} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{n} & 0 \\ 0 & n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A'_{11} \frac{1}{n} & A'_{12} n \\ A'_{21} \frac{1}{n} & A'_{11} n \end{bmatrix}.$$

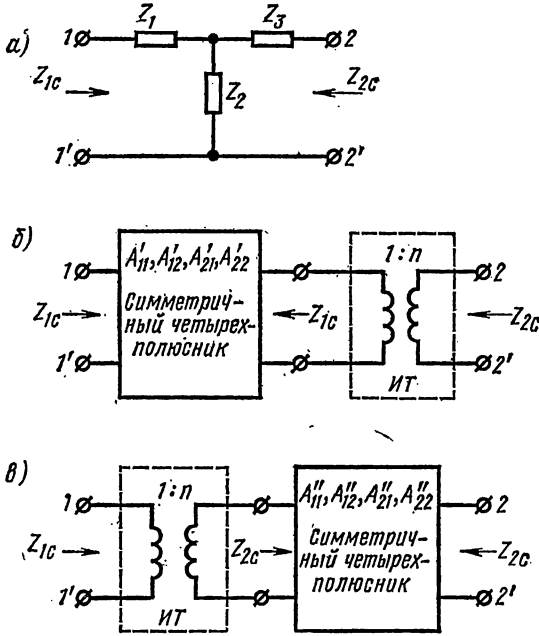


Рис. 14.19

Отсюда следует

$$A'_{11} \frac{1}{n} = A_{11} \quad (1), \quad A'_{12} n = A_{12} \quad (2), \quad A'_{21} \frac{1}{n} = A_{21} \quad (3), \quad A'_{11} n = A_{22} \quad (4).$$

Путем деления формулы (4) на (1) получаем

$$n^2 = \frac{A_{22}}{A_{11}} = \frac{6 + j4}{1,5 + j} = 4, \quad n = 2.$$

Из соотношений (1), (2), (3) следует:

$$A'_{11} = A'_{22} = nA_{11} = 2(1,5 + j) = 3 + j2;$$

$$A'_{12} = \frac{A_{12}}{n} = 400(1 + j3) \text{ ом};$$

$$A'_{21} = nA_{21} = 0,01 \text{ сим.}$$

2. Идеальный трансформатор присоединен к входным зажимам симметричного четырехполюсника (рис. 14.19, в), тогда

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{n} & 0 \\ 0 & n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A'_{11} & A'_{12} \\ A'_{21} & A'_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{n} A'_{11} & \frac{1}{n} A'_{12} \\ n A'_{21} & n A'_{22} \end{bmatrix};$$

$$\frac{1}{n} A'_{11} = A_{11}, \quad \frac{1}{n} A'_{12} = A_{12}, \quad n A'_{21} = A_{21}, \quad n A'_{22} = A_{22};$$

$$n^2 = \frac{A_{22}}{A_{11}} = 4, \quad n = 2;$$

$$A'_{11} = A'_{22} = n A = 3 + j2;$$

$$A'_{12} = n A_{12} = 1600(1 + j3) \text{ ом};$$

$$A'_{21} = \frac{A_{21}}{n} = 0,0025 \text{ см.}$$

Е. Коэффициенты отражения, эхо. Вносимое и рабочее затухания. Коэффициенты передачи напряжения, тока

14.37. Четырехполюсник задачи 14.1 включен между генератором, сопротивление которого $Z_r = R_r = 150 \text{ ом}$, и нагрузкой $Z_n = R_n = 200 \text{ ом}$. Определить коэффициенты отражения со стороны нагрузки ρ_n и генератора ρ_r . Вычислить входное сопротивление четырехполюсника $Z_{\text{вх}}$ и его отклонение (по модулю в процентах) от характеристического сопротивления Z_{1c} . Найти затухание эха $a_{\text{эхо}}$. Найти вносимое $a_{\text{вн}}$ и рабочее a_p затухания. Подсчитать коэффициенты передачи напряжения K_U и тока K_I .

Решение. Требуемые в дальнейших расчетах величины Z_{1c} , Z_{2c} и g были найдены в решении задачи 14.23. По формулам (14.22) находим:

$$\rho_n = \frac{Z_n - Z_{2c}}{Z_n + Z_{2c}} = \frac{200 - 100e^{j26^\circ 30'}}{200 + 100e^{j26^\circ 30'}} = 0,407e^{-j30^\circ 45'};$$

$$\rho_r = \frac{Z_r - Z_{1c}}{Z_r + Z_{1c}} = \frac{150 - 224}{150 + 224} = -0,27.$$

Входное сопротивление было вычислено в задаче 14.13:

$$Z_{\text{вх}} = 260 + j120 = 286e^{j24^\circ 50'} \text{ ом.}$$

Отклонение входного сопротивления от характеристического по модулю в процентах равно

$$\frac{|Z_{\text{вх}}| - |Z_{1c}|}{|Z_{1c}|} 100 = \frac{286 - 224}{224} 100 = 27,7\%.$$

Затухание эха $\alpha_{\text{эхо}}$ — величина, обратная модулю натурального логарифма ρ :

$$\rho = \frac{Z_{\Gamma} - Z_{\text{вх}}}{Z_{\Gamma} + Z_{\text{вх}}} = \frac{150 - (260 + j120)}{150 + 260 + j120} = 0,382e^{-j116^{\circ}10'}$$

$$\alpha_{\text{эхо}} = \ln \frac{1}{|\rho|} = \ln \frac{1}{0,382} = \ln 2,62 = 0,963 \text{ неп.}$$

Рабочее и вносимое затухание находим по (14.26б) и (14.28). Для этого предварительно вычисляем значения отдельных слагаемых, входящих в эти выражения; $a = 0,244 \text{ неп}$ найдено в задаче 14.23:

$$a_1 = \ln \left| \frac{Z_{\Gamma} + Z_{1c}}{2 \sqrt{Z_{\Gamma} Z_{1c}}} \right| = \ln \left| \frac{150 + 224}{2 \sqrt{150 \cdot 224}} \right| = \ln 1,02 = 0,0198 \text{ неп.}$$

$$a_2 = \ln \left| \frac{Z_{\text{н}} + Z_{2c}}{2 \sqrt{Z_{\text{н}} Z_{2c}}} \right| = \ln \left| \frac{200 + 89,5 + j44,6}{2 \sqrt{200 \cdot 100e^{j26^{\circ}30'}}} \right| =$$

$$= \ln \left| \frac{289,5 + j44,6}{2 \cdot 141e^{j13^{\circ}15'}} \right| = \ln \frac{292,5}{282} = \ln 1,038 = 0,0375 \text{ неп.}$$

$$a_3 = \ln |1 - \rho_{\Gamma} \rho_{\text{н}} e^{-2g}| = \ln |1 + 0,27 \cdot 0,407e^{-j30^{\circ}45'} \cdot e^{-2(0,244 - j0,785)}| =$$

$$= \ln |1 + 0,0495e^{j59^{\circ}10'}| = \ln |1,0254 + j0,0425| = \ln 1,026 =$$

$$= 0,248 \text{ неп.}$$

$$a_4 = \ln \left| \frac{Z_{\Gamma} + Z_{\text{н}}}{2 \sqrt{Z_{\Gamma} Z_{\text{н}}}} \right| = \ln \left| \frac{150 + 200}{2 \sqrt{150 \cdot 200}} \right| = \ln 1,012 = 0,012 \text{ неп.}$$

Итак,

$$\alpha_{\text{вн}} = a + a_1 + a_2 + a_3 - a_4 = 0,244 + 0,0198 + 0,0375 +$$

$$+ 0,0248 - 0,012 = 0,314 \text{ неп.}$$

Рабочее затухание

$$\alpha_{\text{р}} = \alpha_{\text{вн}} + \alpha_4 = 0,314 + 0,012 = 0,326 \text{ неп.}$$

Коэффициент передачи напряжения и тока находим по формулам табл. 14.4:

$$K_U = \frac{\dot{U}_2}{\dot{U}_1} = \frac{Z_{\text{н}}}{A_{11}Z_{\text{н}} + A_{12}} = \frac{200}{(1 - j0,5)200 + 50 - j100} =$$

$$= 0,625e^{j38^{\circ}40'};$$

$$K_I = \frac{\dot{i}_2}{\dot{i}_1} = \frac{1}{A_{21}Z_{\text{н}} + A_{22}} = \frac{1}{-j0,005 \cdot 200 + 0,5} = 0,893e^{j63^{\circ}30'}$$

14.38. Решить задачу 14.37, применив ее условие к четырехполюснику рис. 14.6, *a*, который включен между $Z_r = R_r = 6 \text{ ом}$ и $Z_n = R_n = 10 \text{ ом}$.

14.39. Два симметричных четырехполюсника, параметры которых $A'_{11}, A'_{12}, A'_{21}, A'_{22}$ и $A''_{11}, A''_{12}, A''_{21}, A''_{22}$, соединены в цепочку. К входным зажимам первого четырехполюсника подведен источник напряжения с внутренним сопротивлением Z_r , а к выходным зажимам второго присоединена нагрузка с сопротивлением Z_n .

Определить входное сопротивление со стороны генератора, коэффициенты передачи напряжения и тока, если характеристические сопротивления четырехполюсников равны ($Z_{1c} = Z_{2c} = Z_c$) и выполняются условия согласования на входе и выходе ($Z_r = Z_{1c} = Z_n = Z_{2c} = Z_c$).

14.40. Вычислить рабочее и вносимое затухания четырехполюсника (см. рис. 14.2, *a*), если $E_r = 3 \text{ в}$, $Z_r = 600 \text{ ом}$, $U_2 = 0,1 \text{ в}$ и $Z_n = 400 \text{ ом}$.

14.41. Определить рабочее и вносимое затухание четырехполюсника рис. 14.2, *a*, если $I_1 = 1 \text{ ма}$, $Z_r = Z_{1c} = 10^3 \text{ ом}$, $I_2 = 0,08 \text{ ма}$, $Z_n = Z_{2c} = 10^5 \text{ ом}$.

Ж. Удлинитель

14.42. Найти значения сопротивлений, требующихся для составления Т-, П-образных и Т-образного мостового симметричных уравновешенных удлинителей, имеющих характеристическое сопротивление 500 ом и затухание 1 неп .

14.43. На рис. 14.20 изображен симметричный уравновешенный Т-образный удлинитель, используемый в трактах аппаратуры телемеханики КП—59, собранный из активных сопротивлений $\frac{1}{4} r_1 = 138,5 \text{ ом}$, $r_2 = 510 \text{ ом}$.

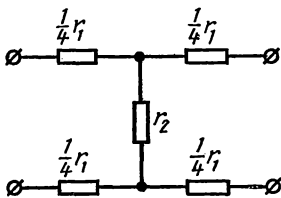


Рис. 14.20

Определить характеристическое сопротивление и затухание удлинителя. Рассчитать его входное сопротивление при нескольких значениях нагрузки R_n , изменяющейся в пределах от $R_n = 0,5Z_{2c}$ до $R_n = 2Z_{2c}$, и построить график зависимости входного сопротивления удлинителя от нагрузки, указав на нем точки, соответствующие $R_n = Z_{2c}$, а также режимам холостого хода и короткого замыкания.

14.44. Для изменения степени подавления сигналов используют удлинитель, входное сопротивление которого должно оставаться постоянным при регулировании уровня сигнала. Рассчитать симметричный

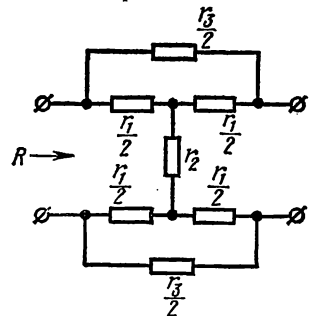


Рис. 14.21

уравновешенный Т-образный мостовой удлинитель (рис. 14.21) с входным сопротивлением $R = 600 \text{ ом}$ в двух случаях:

1) уровень напряжения на выходе должен быть меньше, чем на входе, на 20 дБ; 2) на 40 дБ.

При расчете положить, что удлинитель имеет два переменных сопротивления r_2 и r_3 и что $r_1^2 = r_2 r_3$. Для каждого из рассчитанных случаев указать, во сколько раз напряжение на выходе меньше, чем напряжение на входе.

Решение.

1. Расчет ведем по формулам (14.29в):

$$a = 20 \text{ дБ} = 0,115 \cdot 20 \text{ nep} = 2,3 \text{ nep}; \quad r_1 = R = 600 \text{ ом};$$

$$r_2 = \frac{r_1}{2} \left(\operatorname{cth} \frac{a}{2} - 1 \right) = 300 (\operatorname{cth} 1,15 - 1) = 67 \text{ ом};$$

$$r_3 = \frac{r_1^2}{r_2} = \frac{600^2}{67} = 5380 \text{ ом}; \quad \frac{U_2}{U_1} = e^{-a} = e^{-2,3} = 0,1.$$

$$2. \quad a = 40 \text{ дБ} = 0,115 \cdot 40 \text{ nep} = 4,6 \text{ nep}; \quad r_1 = R = 600 \text{ ом}; \\ r_2 = 6,06 \text{ ом}; \quad r_3 = 5,94 \cdot 10^4 \text{ ом}; \quad U_2/U_1 = 0,01.$$

3. Трансформаторы для согласования сопротивлений четырехполюсника и нагрузки

14.45. Определить коэффициент трансформации идеального трансформатора, включенного между генератором с сопротивлением $Z_r = 200 \text{ ом}$ и нагрузкой с сопротивлением $Z_H = 150 \text{ ом}$ для согласования модулей сопротивлений (рис. 14.22). Показать, что при найденной величине коэффициента трансформации происходит согласование.

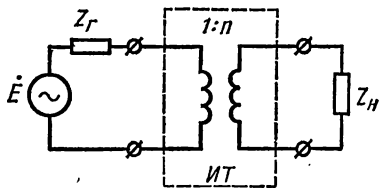


Рис. 14.22

Решение. Коэффициент трансформации [см. формулу (14.31)]

$$n = \sqrt{\frac{|Z_H|}{|Z_r|}} = \sqrt{\frac{150}{200}} = 0,865.$$

Входное сопротивление трансформатора

$$Z_{\text{вх}} = \frac{A_{11}Z_H + A_{12}}{A_{21}Z_H + A_{22}} = \frac{\frac{1}{n} Z_H + 0}{0 \cdot Z_H + n} = \frac{Z_H}{n^2} = \frac{150}{0,865^2} = 200 \text{ ом}.$$

Таким образом,

$$Z_{\text{вх}} = Z_r = 200 \text{ ом}.$$

14.46. Рассчитать выходной трансформатор усилителя, работающего в диапазоне частот 100—4000 *гц*. Внутреннее сопротивление усилителя $r_i = 10^4 \text{ ом}$, сопротивление нагрузки $r_n = 10^3 \text{ ом}$. При рас-

чете принять, что постоянная составляющая рабочего затухания трансформатора $a_1 = 0,05 \text{ nep}$, а переменные составляющие рабочего затухания на нижней и верхней частотах $a_2 = a_3 = 1 \text{ db}$.

Решение. Расчет ведем по формулам (14.35). Коэффициент рассеяния

$$\sigma = 4 \frac{\omega_1}{\omega_2} (e^{2a} - 1) = 4 \frac{100}{4000} (e^{0,23} - 1) = 0,0259.$$

Параметры первичной обмотки трансформатора равны:

$$r_1 = |Z_r| (e^{a_1} - 1) = r_i (e^{a_1} - 1) = 10^4 (e^{0,05} - 1) = 513 \text{ ом};$$

$$L_1 = \frac{|Z_r|}{\sqrt{\omega_1 \omega_2 \sigma}} = \frac{r_1}{\sqrt{\omega_1 \omega_2 \sigma}} = \frac{10^4}{2\pi \sqrt{4 \cdot 10^6 \cdot 0,0259}} = 15,6 \text{ мк}.$$

Коэффициент трансформации

$$n = \sqrt{\frac{|Z_H|}{|Z_r|}} = \sqrt{\frac{r_H}{r_i}} = \sqrt{\frac{10^8}{10^4}} = 0,316.$$

Параметры вторичной обмотки трансформатора:

$$r_2 = n^2 r_1 = 0,316^2 \cdot 513 = 51,3 \text{ ом};$$

$$L_2 = n^2 L_1 = 0,316^2 \cdot 15,6 = 1,56 \text{ мк}.$$

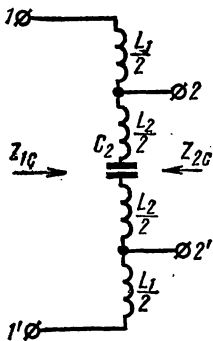


Рис. 14.23

14.47. Рассчитать автотрансформатор рис. 14.23 для согласования модуля волнового сопротивления воздушной линии $|Z_{в1}| = 600 \text{ ом}$ с модулем волнового сопротивления кабеля $|Z_{в2}| = 200 \text{ ом}$ в диапазоне частот 300 — 10 000 гц.

Указание. Характеристические сопротивления автотрансформатора:

$$Z_{1c} = |Z_{в1}| = 600 \text{ ом}, \quad Z_{2c} = |Z_{в2}| = 200 \text{ ом}.$$

Расчет параметров автотрансформатора ведется по формулам:

$$n = \sqrt{\frac{Z_{1c}}{Z_{2c}}} - 1; \quad L_1 = \frac{n}{\omega} \sqrt{Z_{1c} Z_{2c}}; \quad L_2 = \frac{L_1}{n^2}; \quad C_2 = \frac{1}{L_2 \omega^2}.$$

II. Полусно-нулевое изображение передаточных и входной функций. Минимально- и неминимально-фазовые четырехполюсники

14.48. Четырехполюсник задачи 14.1 используется на частоте $f = 1600 \text{ гц}$. Найти передаточную функцию $U_2(p)/E(p)$ в режиме холостого хода и при активной нагрузке $r_H = 200 \text{ ом}$. Определить нули и полюсы этой функции и показать на рисунке полусно-нулевое изображение.

Решение 1. В режиме холостого хода (рис. 14.24, а):

$$U_2(p) = I(p) \rho L = \frac{U_1(p)}{r + \rho L} \rho L;$$

$$K(p) = \frac{U_2(p)}{U_1(p)} = \frac{\rho L}{r + \rho L} = \frac{Q(p)}{P(p)}.$$

Нули функции являются корнями уравнения $Q(p) = 0$, а полюсы — корнями уравнения $P(p) = 0$. В данном случае $\rho L = 0$, $\rho_1 = 0$, $r + \rho L = 0$,

$$\begin{aligned} \rho_2 &= -\frac{r}{L} = -\frac{r\omega}{x_L} = \\ &= -\frac{100 \cdot 2\pi \cdot 1600}{200} = -5020 \text{ сек}^{-1}. \end{aligned}$$

Полюсно-нулевое изображение показано на рис. 14.24, б.

2. В режиме нагрузки (рис. 14.24, в):

$$\begin{aligned} Z(p) &= r + \frac{\rho L \left(r_H + \frac{1}{\rho C} \right)}{\rho L + r_H + \frac{1}{\rho C}} = \\ &= \frac{\rho^2 LC (r + r_H) + \rho (L + r r_H C)}{\rho^2 LC + \rho r_H C + 1}; \end{aligned}$$

$$I_2(p) = I_1(p) \frac{\rho L}{r_H + \rho L + \frac{1}{\rho C}} = \frac{U_1(p)}{Z(p)} \cdot \frac{\rho^2 LC}{\rho^2 LC + \rho r_H C + 1};$$

$$U_2(p) = I_2(p) r = \frac{U_1(p)}{Z(p)} \cdot \frac{\rho^2 r_H LC}{\rho^2 LC + \rho r_H C + 1};$$

$$K(p) = \frac{U_2(p)}{U_1(p)} = \frac{\rho^2 r_H LC}{\rho^2 LC (r + r_H) + \rho (L + r r_H C) + r} = \frac{Q(p)}{P(p)}.$$

Определяем нули функции $K(p)$: $Q(p) = \rho^2 r_H LC = 0$, $\rho_1 = 0$, Находим полюсы функции $K(p)$. Для этого вначале вычисляем L и C :

$$L = \frac{x_L}{\omega} = \frac{200}{2\pi 1600} = 0,02 \text{ гн}; \quad C = \frac{1}{\omega x_C} = \frac{1}{2\pi 1600 \cdot 100} = 10^{-6} \text{ ф};$$

$$\begin{aligned} P(p) &= \rho^2 LC (r + r_H) + \rho (L + r r_H C) + r = \\ &= 6 \cdot 10^{-6} \rho^2 + 0,04 \rho + 100 = 0. \end{aligned}$$

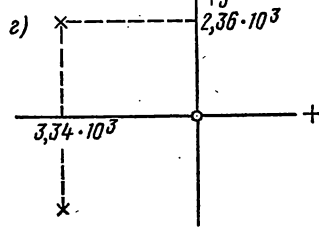
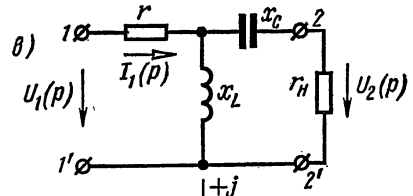
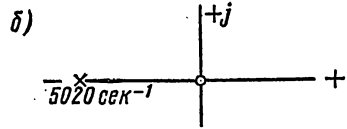
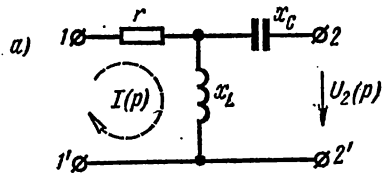


Рис. 14.24

Корни этого квадратного уравнения равны:

$$p_2 = (-3,34 + j2,36) 10^3 \text{ сек}^{-1}; p_4 = (-3,34 - j2,36) 10^3 \text{ сек}^{-1}.$$

Полосно-нулевое изображение показано на рис. 14.24, з.

14.49. В схеме, изображенной на рис. 14.25, а, $r = 100 \text{ ом}$, $L = 20 \text{ мГн}$, $C = 1 \text{ мкФ}$, $R_H = 200 \text{ ом}$. Построить амплитудно-частотную и фазочастотную характеристики коэффициента передачи напряжения $K_U(j\omega)$. Определить передаточное сопротивление при $\omega = 10^4 \text{ сек}^{-1}$.

Решение. Расчет $K_U(j\omega)$ ведем по формуле (см. табл. 14.4)

$$K_U(j\omega) = \frac{U_2(j\omega)}{U_1(j\omega)} = \frac{1}{A_{11} + \frac{A_{12}}{Z_H}}.$$

Предварительно по (14.7д) находим выражения коэффициентов A_{11} и A_{12} в функции угловой частоты:

$$A_{11} = 1 + \frac{r}{j\omega L} = 1 + \frac{100}{j\omega 20 \cdot 10^{-3}} = 1 - j \frac{5000}{\omega};$$

$$A_{12} = r - j \frac{1}{\omega C} - j \frac{r}{j\omega L} = \left(100 - \frac{5 \cdot 10^9}{\omega^2}\right) - j \frac{10^8}{\omega}.$$

Результаты расчетов заносим в таблицу 14.5.

Таблица 14.5

$\omega, \text{сек}^{-1}$	A_{11}	$A_{12}, \text{ом}$	$A_{11} + \frac{A_{12}}{R_H}$	$K_U(j\omega)$
0	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	0
10^3	$1 - j5$	$-4900 - j1000$	$-23,5 - j10$	$0,0392e^{j157^\circ}$
10^4	$1 - j0,5$	$50 - j100$	$1,25 - j$	$0,625e^{j38^\circ 40'}$
10^5	$1 - j0,05$	$99,5 - j10$	$1,498 - j0,1$	$0,667e^{j30^\circ 50'}$
10^6	$1 - j0,005$	$100 - j$	$1,5 - j0,01$	$0,667e^{j0^\circ 23'}$
10^7	$1 - j0,0005$	$100 - 0,1j$	$1,5 - j0,001$	$0,667e^{j0^\circ 6'}$
∞	1	100	1,5	0,667

По результатам расчетов на рис. 14.25, б построен график (в логарифмическом масштабе оси абсцисс) амплитудно-частотной $K(j\omega)$ и фазочастотной $\arg K(j\omega)$ характеристик коэффициента передачи. Передаточное сопротивление — это отношение напряжения на нагрузке к входному току:

$$Z_{21} = \frac{\dot{U}_2}{\dot{I}_1} = \frac{\dot{U}_2}{A_{21}\dot{U}_2 + A_{22}\dot{I}_2} = \frac{1}{A_{21} + \frac{A_{22}}{R_H}}$$

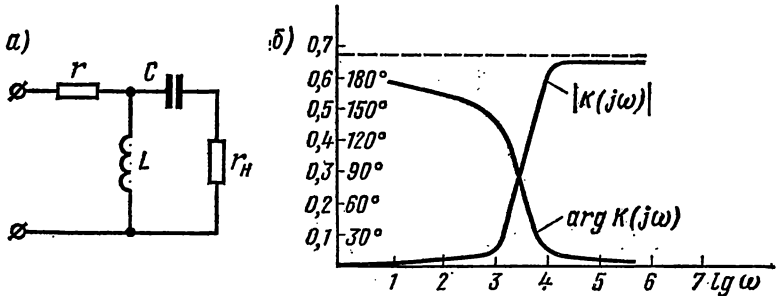


Рис. 14.25

Коэффициенты A_{21} и A_{22} находим по (14.7д): $A_{21} = -j0,005$, $A_{22} = 0,5$. Подставляя эти значения в предыдущую формулу, получим

$$Z_{21} = \frac{1}{-j0,005 + \frac{0,5}{200}} = 179e^{j63^{\circ}40'} \text{ ом.}$$

14.50. Показать, что четырехполюсник рис. 14.26 является минимально-фазовым.

Решение. Находим в операторной форме $U_2(p)$ и, беря его отношение к $U_1(p)$, получим

$$K(p) = \frac{U_2(p)}{U_1(p)} = \frac{p^2(pL + r_2)C_1C_3r_4}{p^3LC_1C_3r_4 + p^2(LC_3 + LC_1 + C_1C_3r_2r_4) + p(C_1r_2 + C_3r_2 + C_3r_4) + 1}$$

Нули функции $K(p)$ равны: $p_1 = 0$, $p_3 = -r_2/L$.

Функция $K(p)$ не имеет нулей, расположенных в правой полуплоскости. Значит, четырехполюсник является минимально-фазовым.

14.51. Показать, что четырехполюсники рис. 14.27, а и б не являются минимально-фазовыми.

Решение. Для рис. 14.27, а в режиме холостого хода $\dot{U}_1 = A_{11}\dot{U}_2$.

Следовательно,

$$K(p) = \frac{U_2(p)}{U_1(p)} = \frac{1}{A_{11}(p)}.$$

Для мостового симметричного четырехполюсника [см. формулу (14.7ж)]:

$$A_{11} = \frac{Z_1 + Z_2}{Z_2 - Z_1};$$

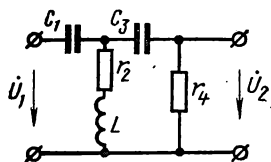


Рис. 14.26

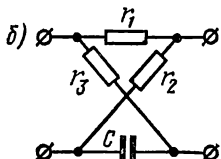
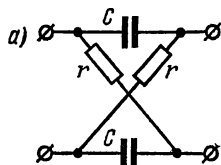


Рис. 14.27

$$A_{11}(p) = \frac{r + \frac{1}{pC}}{r - \frac{1}{pC}} = \frac{rCp + 1}{rCp - 1}; \quad K(p) = \frac{1}{A_{11}(p)} = \frac{rCp - 1}{rCp + 1}.$$

Нуль функции $K(p)$ равен $p_1 = \frac{1}{rC}$.

Нуль передаточной функции расположен в правой полуплоскости. Значит, четырехполюсник не является минимально-фазовым.

К. Активные неавтономные четырехполюсники *

14.52. Определить Y -параметры четырехполюсника с зависимым генератором тока ($S\dot{U}_1$), изображенного на рис. 14.28 (схема замещения электронной лампы в области низких частот с общим катодом, работающей без сеточного тока $\dot{I}_1 = 0$).

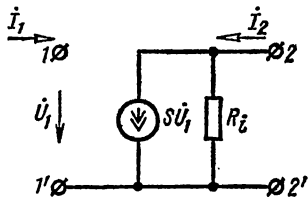


Рис. 14.28

Решение. Из первого уравнения (14.1а) при $\dot{I}_1 = 0$ следует, что $Y_{11} = 0$ и $Y_{12} = 0$. Согласно первому закону Кирхгофа,

$$\dot{I}_2 = S\dot{U}_1 + \frac{1}{R_l}\dot{U}_2,$$

где S — крутизна характеристики и R_l — внутреннее сопротивление лампы переменному току. Приравняв коэффициенты в последнем

* Задачи данной подтемы составил доц. Б. Ф. Аносович.

уравнении к коэффициентам Y_{21} и Y_{22} во втором уравнении (14.1а), получим:

$$Y_{21} = S; \quad Y_{22} = 1/R_i.$$

14.53. Определить Z -параметры четырехполюсника с зависимым генератором напряжения $\mu \dot{U}_1$, изображенного на рис. 14.29 (схема замещения электронной лампы в области низких частот с общим катодом, работающей без сеточного тока, когда к входным зажимам 1-1' (сетка — катод) подключено сопротивление Z). Здесь μ — статический коэффициент усиления, R_i — внутреннее сопротивление лампы переменному току.

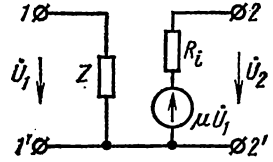


Рис. 14.29

Решение. Составим уравнения Кирхгофа для контуров 1-1' и 2-2':

$$\dot{U}_1 = Z i_1 + 0 \cdot i_2; \quad \dot{U}_2 = \mu \dot{U}_1 + R_i i_2 = \mu Z i_1 + R_i i_2.$$

Сопоставляя их с уравнениями (14.1б), имеем:

$$Z_{11} = Z; \quad Z_{12} = 0; \quad Z_{21} = \mu Z; \quad Z_{22} = R_i.$$

Примечание. Матрица $[Z]$ такой схемы при отсутствии сопротивления Z не применяется, так как она теряет смысл.

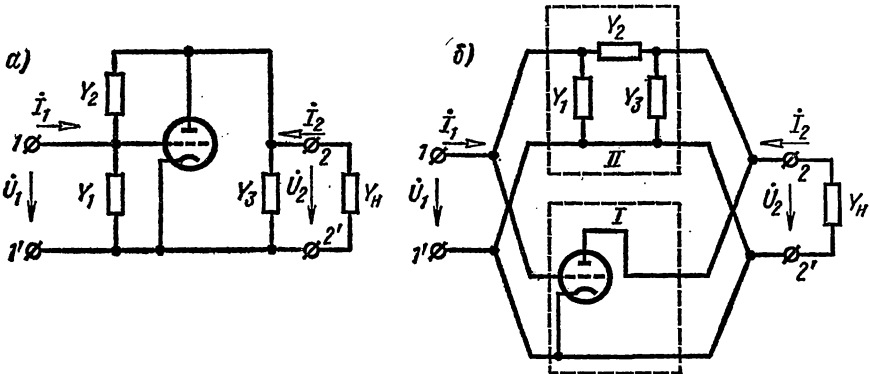


Рис. 14.30

14.54. На рис. 14.30, а изображена схема электронной лампы, параллельно электродам которой включены проводимости Y_1 , Y_2 и Y_3 (схема лампы в области высоких частот, работающей без сеточного тока). Определить Y -параметры схемы.

Решение. Заданную схему можно представить как параллельное соединение двух четырехполюсников (рис. 14.30, б). Соединение этих четырехполюсников является регулярным, поэтому можно на-

писать, что матрица $[Y]$ сложного четырехполюсника равна сумме матриц I и II четырехполюсников, соединенных параллельно:

$$[Y] = [Y'] + [Y''].$$

Уже было доказано (см. задачу 14.52), что матрица $[Y']$ лампы имеет вид

$$[Y'] = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ S & g_i \end{bmatrix},$$

где

$$g_i = 1/R_i.$$

Как известно, матрица $[Y'']$ пассивного П-образного четырехполюсника (см. табл. 14.2 п. 6)

$$[Y''] = \begin{bmatrix} Y_1 + Y_2 & -Y_2 \\ -Y_2 & Y_2 + Y_3 \end{bmatrix}.$$

Поэтому

$$[Y] = \begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_1 + Y_2 & -Y_2 \\ S - Y_2 & Y_2 + Y_3 + g_i \end{bmatrix}.$$

14.55. Определить коэффициент передачи напряжения K_U (коэффициент усиления) схемы рис. 14.30, а, когда проводимость нагрузки на выходных зажимах 2-2' равна Y_H .

Решение. Определим сначала K_U в общем виде. Так как $\dot{I}_2 = -Y_H \dot{U}_2$, то из второго уравнения (14.1а) следует

$$-Y_H \dot{U}_2 = Y_{21} \dot{U}_1 + Y_{22} \dot{U}_2.$$

Отсюда

$$K_U = \frac{\dot{U}_2}{\dot{U}_1} = -\frac{Y_{21}}{Y_{22} + Y_H}.$$

Используя найденные значения Y_{21} и Y_{22} из предыдущей задачи, получим

$$K_U = \frac{Y_2 - S}{Y_2 + Y_3 + g_i + Y_H}.$$

14.56. Определить входное сопротивление четырехполюсника, изображенного на рис. 14.30, а.

Решение. Согласно уравнениям (14.1а) и, учитывая, что $\dot{I}_2 = -Y_H \dot{U}_2$, получим:

$$\dot{I}_1 = Y_{11} \dot{U}_1 + Y_{12} \dot{U}_2; \quad 0 = Y_{21} \dot{U}_1 + (Y_{22} + Y_H) \dot{U}_2.$$

Решим эту систему уравнений относительно \dot{U}_2 :

$$\dot{U}_2 = \frac{\begin{vmatrix} Y_{11} & i_1 \\ Y_{21} & 0 \end{vmatrix}}{\Delta} = -\frac{Y_{21}}{\Delta} i_1,$$

где определитель системы $\Delta = Y_{11}(Y_{22} + Y_H) - Y_{12}Y_{21}$. Подставим это значение \dot{U}_2 в первое уравнение (14.1а) и получим

$$i_1 = Y_{11}\dot{U}_1 - \frac{Y_{12}Y_{21}}{\Delta} i_1.$$

Отсюда после простых преобразований

$$Z_{\text{вх}} = \frac{\dot{U}_1}{i_1} = \frac{Y_{22} + Y_H}{|Y| + Y_{11}Y_H},$$

где

$$|Y| = Y_{11}Y_{22} - Y_{12}Y_{21}.$$

Подставляя в последнее уравнение Y -параметры заданной схемы, получим

$$Z_{\text{вх}} = \frac{Y_2 + Y_3 + g_i + Y_H}{Y_2(Y_1 + S) + (Y_1 + Y_2)(Y_3 + g_i + Y_H)}.$$

14.57. На рис. 14.31 изображена схема Т-образного активного четырехполюсника с зависимым генератором напряжения $Z_4 i_1$. Значения элементов схемы Z_1, Z_2, Z_3 , выраженные через Z -параметры, показаны на схеме.

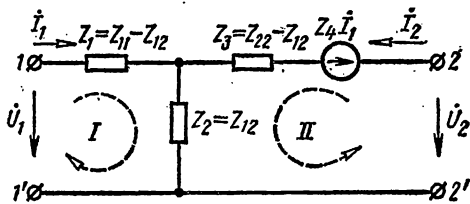


Рис. 14.31

Определить Z_4 при условии, что уравнения передачи четырехполюсника в форме Z должны соответствовать уравнениям (14.1б).

Решение. Применяя метод контурных токов, можно для приведенной схемы определить матрицу $[Z]$:

$$[Z] = \begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_4 + Z_{12} & Z_{22} \end{bmatrix}.$$

Из равенства матриц следует, что для поставленных условий должно быть

$$Z_{21} = Z_4 + Z_{12} \quad \text{или} \quad Z_4 = Z_{21} - Z_{12}.$$

Если $Z_4 = 0$, т. е. $Z_{21} = Z_{12}$, то схема превращается в обратимый пассивный четырехполюсник.

14.58. На рис. 14.32 изображена схема П-образного активного четырехполюсника с зависимым генератором тока $Y_4 \dot{U}_1$. Значения элементов схемы Y_1, Y_2, Y_3 , выраженные через Y -параметры, показаны на схеме.

Определить коэффициент Y_4 при условии, что уравнения передачи четырехполюсника в форме Y должны соответствовать уравнениям (14.16).

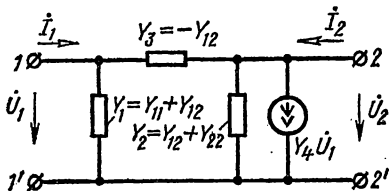


Рис. 14.32

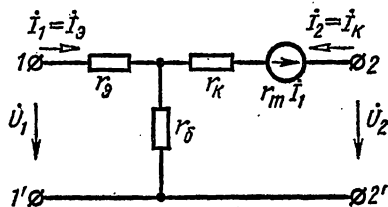


Рис. 14.33

14.59. Известны H_6 -параметры транзистора в рабочей точке, включенного по схеме с общей базой (индекс б указывает, что рассматривается схема с общей базой):

$H_{11б} = 25 \text{ ом}$, $H_{12б} = 1 \cdot 10^{-4}$, $H_{21б} = -0,95$, $H_{22б} = 0,5 \cdot 10^{-6} \text{ сим}$.
Определить Z_6 -параметры.

14.60. На рис. 14.33 изображена Т-образная схема замещения транзистора с общей базой в области низких частот с зависимым генератором напряжения $r_m I_1$. На этой схеме обозначены: $I_1 = I_3$ — ток эмиттера, $I_2 = I_k$ — ток коллектора, r_3, r_6 и r_k — соответственно сопротивления эмиттера, базы и коллектора.

Определить элементы схемы r_3, r_6, r_k и r_m при значениях Z_6 -параметров, указанных в задаче 14.59.

Решение. Элементы такой схемы через Z -параметры были в общем виде определены в задаче 14.57. Поэтому (см. рис. 14.31)

$$r_3 = Z_{1б} = Z_{11б} - Z_{12б} = 215 - 200 = 15 \text{ ом};$$

$$r_6 = Z_{2б} = Z_{12б} = 200 \text{ ом};$$

$$r_k = Z_{3б} = Z_{22б} - Z_{12б} = 2 \cdot 10^6 - 200 = 1999800 \text{ ом};$$

$$r_m = Z_{4б} = Z_{21б} - Z_{12б} = 1,9 \cdot 10^6 - 200 = 1899800 \text{ ом}.$$

14.61. Определить коэффициент передачи тока K_I при коротком замыкании зажимов 2-2' и значениях элементов схемы предыдущей задачи.

Решение. В этом случае $\dot{U}_2 = 0$. Поэтому для выходного контура можно написать уравнение

$$\dot{I}_2 (r_k + r_6) + \dot{I}_1 (r_m + r_6) = 0.$$

Отсюда

$$K_I \left| \frac{i_2}{i_1} \right|_{\dot{u}_2=0} = - \frac{r_m + r_6}{r_k + r_6} \approx - \frac{r_m}{r_k},$$

так как $r_6 \ll r_m$ и $r_6 \ll r_k$.
Следовательно,

$$K_I \left| \right|_{\dot{u}_2=0} = - \frac{1\ 899\ 800}{1\ 999\ 800} = -0,95 = 0,95e^{j\pi}.$$

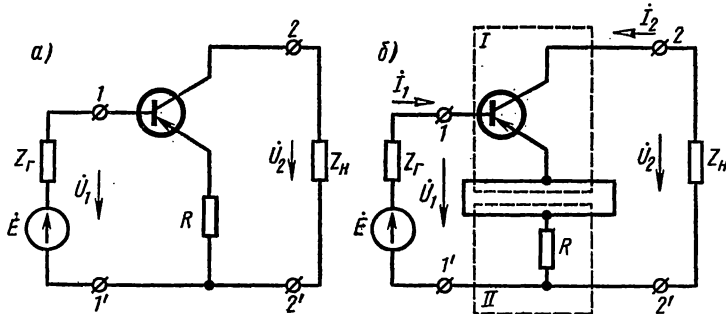


Рис. 14.34

14.62. На рис. 14.34, а изображена схема транзистора с общим эмиттером для переменного тока, в цепь которого включено сопротивление R (схема усилителя с последовательной обратной связью). Сопротивление нагрузки $Z_H = 10^4$ ом, сопротивление генератора $Z_r = 10^3$ ом, $R = 100$ ом; Z_{θ} -параметры транзистора в рабочей точке равны: $Z_{11\theta} = 275$ ом, $Z_{12\theta} = 25$ ом, $Z_{21\theta} = 969\ 975$ ом, $Z_{22\theta} = 30\ 025$ ом.

Определить: 1) входное сопротивление $Z_{вх}$; 2) коэффициенты передачи напряжения K_U и тока K_I ; 3) выходное сопротивление $Z_{вых}$.

Решение. Представленную схему можно изобразить как последовательное соединение (регулярное) двух (I и II) четырехполюсников (рис. 14.34, б) с Z -матрицами:

$$[Z'_{\theta}] = \begin{bmatrix} Z_{11\theta} & Z_{12\theta} \\ Z_{21\theta} & Z_{22\theta} \end{bmatrix} \text{ и } [Z''] = \begin{bmatrix} R & R \\ R & R \end{bmatrix}.$$

Матрица сложного четырехполюсника имеет вид

$$[Z] = [Z'_{\theta}] + [Z''] = \begin{bmatrix} Z_{11\theta} + R & Z_{12\theta} + R \\ Z_{21\theta} + R & Z_{22\theta} + R \end{bmatrix}.$$

Подставляя заданные параметры схемы, получим: $Z_{11} = 375$ ом, $Z_{12} = 125$ ом, $Z_{21} = -969\ 875$ ом, $Z_{22} = 30\ 125$ ом. Теперь восполь-

ауемса формулами табл. 14.4, заменив в ней с помощью табл. 14.2 A -параметры Z -параметрами. После преобразований получим:

$$|Z| = Z_{11}Z_{22} - Z_{12}Z_{21} = 132,5 \cdot 10^6;$$

$$Z_{1\text{вх}} = \frac{|Z| + Z_{11}Z_H}{Z_{22} + Z_H} = \frac{132,5 \cdot 10^6 + 375 \cdot 10^4}{30\,125 + 10\,000} = 3400 \text{ ом};$$

$$K_U = \frac{Z_{21}Z_H}{|Z| + Z_{11}Z_H} = \frac{-969\,875 \cdot 10^4}{132,5 \cdot 10^6 + 375 \cdot 10^4} = -70 = 70e^{i\pi};$$

$$K_I = -\frac{Z_{21}}{Z_{22} + Z_H} = \frac{969\,875}{30\,125 + 10\,000} = 24,25;$$

$$Z_{2\text{вых}} = \frac{|Z| + Z_{22}Z_{\Gamma}}{Z_{11} + Z_{\Gamma}} = \frac{132,5 \cdot 10^6 + 30\,125 \cdot 10^3}{375 + 1000} = 118 \cdot 10^3 \text{ ом}.$$

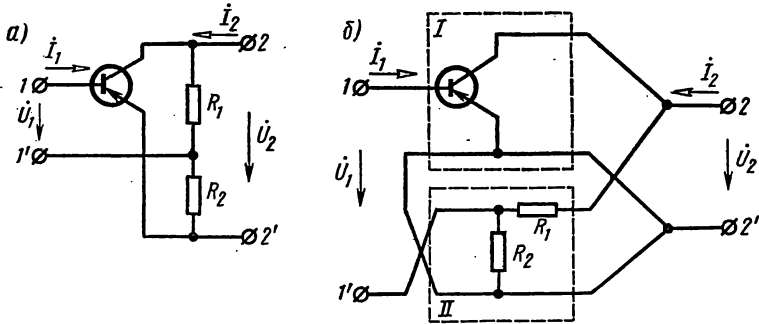


Рис. 14.35

14.63. На рис. 14.35, а изображена схема транзистора с общим эмиттером для переменного тока с последовательно-параллельной обратной связью.

Известны h -параметры транзистора в рабочей точке и сопротивления R_1 и R_2 . Определить в общем виде H -параметры сложного четырехполюсника.

Решение. На рис. 14.35, б представлена та же схема в виде последовательно-параллельного соединения двух четырехполюсников I и II. Для того чтобы соединение четырехполюсников было регулярным, провода на входе $1-1'$ четырехполюсника скрещены.

Матрица $[h_s]$ активного четырехполюсника I имеет вид

$$h_s = \begin{bmatrix} h_{11s} & h_{12s} \\ h_{21s} & h_{22s} \end{bmatrix}.$$

Матрица $[Z]$ пассивного четырехполюсника II без скрещивания проводов на входе равна

$$[Z] = \begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_2 & R_2 \\ R_2 & R_1 + R_2 \end{bmatrix}.$$

Для определения матрицы $[h]$ по известной матрице $[Z]$ четырехполюсника II воспользуемся табл. 14.1:

$$h_{11} = \frac{|Z|}{Z_{22}} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}; \quad h_{12} = \frac{Z_{12}}{Z_{22}} = \frac{R_2}{R_1 + R_2};$$

$$h_{21} = -\frac{Z_{21}}{Z_{22}} = -\frac{R_2}{R_1 + R_2}; \quad h_{22} = \frac{1}{Z_{22}} = \frac{1}{R_1 + R_2}.$$

Теперь определим h^{\times} — параметры четырехполюсника II, со скрещенными проводами на его входе:

$$h_{11}^{\times} = h_{11}, \quad h_{12}^{\times} = -h_{12}, \quad h_{21}^{\times} = -h_{21}, \quad h_{22}^{\times} = h_{22}.$$

H -параметры сложного четырехполюсника при последовательно-параллельном соединении образующих его четырехполюсников определяются уравнениями:

$$H_{11} = h_{11\text{э}} + h_{11}^{\times} = h_{11\text{э}} + \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2};$$

$$H_{12} = h_{12\text{э}} + h_{12}^{\times} = h_{12\text{э}} - \frac{R_2}{R_1 + R_2};$$

$$H_{21} = h_{21\text{э}} + h_{21}^{\times} = h_{21\text{э}} + \frac{R_2}{R_1 + R_2};$$

$$H_{22} = h_{22\text{э}} + h_{22}^{\times} = h_{22\text{э}} + \frac{1}{R_1 + R_2}.$$

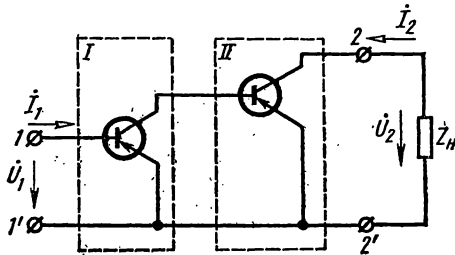


Рис. 14.36

14.64. Два транзистора, включенные по схеме с общим эмиттером, соединены каскадно (рис. 14.36). Оба транзистора по своим электрическим свойствам одинаковы и в рабочей точке имеют h -параметры: $h_{11\text{э}} = 2000 \text{ ом}$, $h_{12\text{э}} = 15 \cdot 10^{-4}$, $h_{21\text{э}} = 32,3$, $h_{22\text{э}} = 33,3 \cdot 10^6 \text{ сим}$. Сопротивление нагрузки $Z_H = 1000 \text{ ом}$.

Определить: 1) A -параметры сложного четырехполюсника; 2) входное сопротивление; 3) коэффициент передачи напряжения.

14.65. На рис. 14.37, а—в изображены три схемы включения транзистора и их эквивалентные схемы: 1) с общей базой (рис. 14.37, а), 2) с общим эмиттером (рис. 14.37, б) и 3) с общим коллектором (рис. 14.37, в).

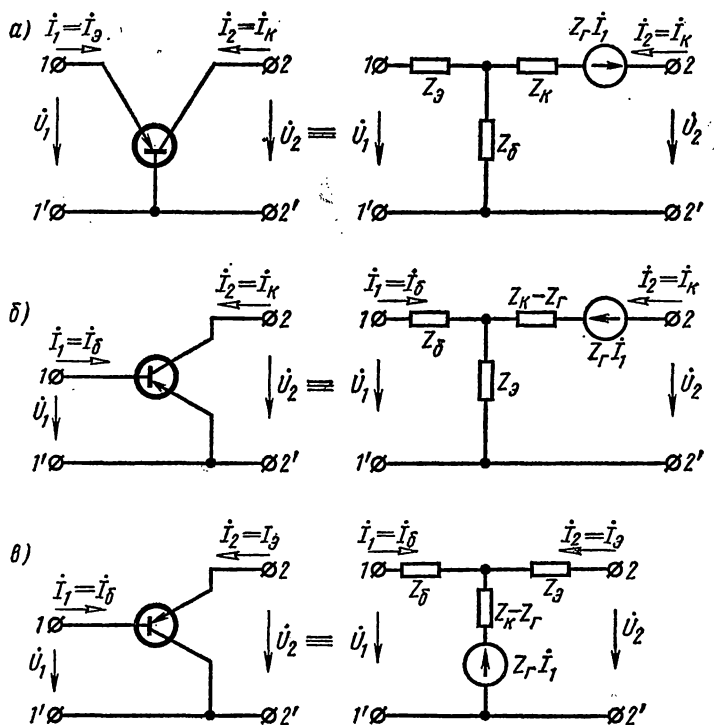


Рис. 14.37

Для каждой из схем определить Z -, Y - и A -параметры, выразив их через известные сопротивления коллектора Z_K , базы Z_6 , эмиттера Z_3 и сопротивление зависимого генератора Z_r .

Глава пятнадцатая

ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ ФИЛЬТРЫ

ОСНОВНЫЕ ПОЛОЖЕНИЯ И СООТНОШЕНИЯ

1. **Электрические фильтры** — четырехполюсники, обладающие избирательными свойствами; они пропускают токи в определенной полосе частот с небольшим затуханием (полоса пропускания, или прозрачности), а токи с частотами, лежащими вне этой полосы, — с большим затуханием (полоса затухания или задерживания).

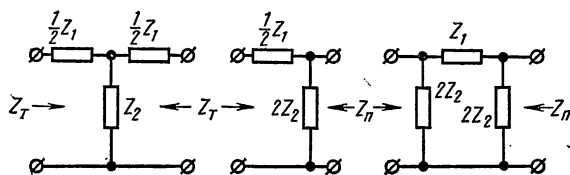


Рис. 15.1

2. **Звенья и полузвенья фильтров.** На рис. 15.1 изображены Т-, Г- и П-образные схемы фильтров. Звенья Т- и П-образные могут быть образованы цепочечным соединением соответствующих полузвеньев Г-образной формы так, что при этом выполняются условия согласования по характеристическим сопротивлениям. Это связано с тем, что для всех схем рис. 15.1 характеристические сопротивления со стороны Т- и П-входов соответственно определяются по одинаковым формулам:

$$Z_T = \sqrt{Z_1 Z_2 \left(1 + \frac{Z_1}{4Z_2} \right)}; \quad Z_{\Pi} = \sqrt{\frac{Z_1 Z_2}{1 + \frac{Z_1}{4Z_2}}}. \quad (15.1)$$

Характеристическое сопротивление реактивного фильтра в полосе пропускания — активное, а в полосе задерживания — реактивное.

Характеристическая (собственная) постоянная передачи g для Т- и П-образных схем (рис. 15.1) имеет одну и ту же величину

$$g = a + jb = g_T = g_{\Pi} \quad (15.2)$$

и вычисляется по одной из формул:

$$\operatorname{sh} \frac{g}{2} = \sqrt{\frac{Z_1}{4Z_2}}; \quad \operatorname{ch} g = 1 + \frac{Z_1}{2Z_2}, \quad (15.3)$$

а характеристическая постоянная передачи для Г-образного полу-

звена (рис. 15.1) равняется половине характеристической постоянной передачи Т- и П-образных звеньев, т. е.

$$g_{\Gamma} = \frac{g_{\text{T}}}{2} = \frac{g_{\text{П}}}{2} = \frac{g}{2} = \frac{a}{2} + j \frac{b}{2}. \quad (15.4)$$

Здесь a и b соответственно характеристическое (собственное) затухание и коэффициент фазы фильтра типа Т или П.

При изучении теории и расчете реактивных фильтров удобно ввести параметр Ω , называемый нормированной частотой, который определяется по формуле

$$\Omega = \sqrt{\left| \frac{Z_1}{4Z_2} \right|}. \quad (15.5)$$

3. Характеристики фильтров. В табл. 15.1 приведены формулы характеристик Т-, Г- и П-образных реактивных фильтров (рис. 15.1, a , b и θ), у которых $Z_1 = jx_1$, $Z_2 = jx_2$. Выражение этих характеристик в различных областях частот определяется величиной и знаком отношения $\frac{Z_1}{4Z_2}$.

Таблица 15.1

Полоса пропускания	$-1 < \frac{Z_1}{4Z_2} < 0$	$a = 0$	$\sin \frac{b}{2} = \pm \sqrt{\left \frac{Z_1}{4Z_2} \right }$
Полоса задерживания	$-\infty < \frac{Z_1}{4Z_2} < -1$	$\text{ch} \frac{a}{2} = \sqrt{\left \frac{Z_1}{4Z_2} \right }$	$b = \pm \pi$
	$0 < \frac{Z_1}{4Z_2} < \infty$	$\text{sh} \frac{a}{2} = \sqrt{\left \frac{Z_1}{4Z_2} \right }$	$b = 0$

Пример приведен в задаче 15.1.

4. Фильтрами типа k называют Т-, П- и Г-образные схемы, у которых сопротивления Z_1 последовательных и Z_2 параллельных плеч взаимно обратны, т. е.

$$Z_1 Z_2 = R^2. \quad (15.6)$$

Параметр $R = \sqrt{Z_1 Z_2}$ называется *номинальным характеристическим сопротивлением* и для данного фильтра является величиной постоянной.

В табл. 15.2 приведены схемы полувзена и формулы параметров реактивных фильтров типа k : нижних частот (ФНЧ), верхних частот (ФВЧ), полосовых (ПФ) и заграждающих (ЗФ).

Примеры даны в задачах 15.3, 15.10, 15.14.

5. Фильтры типа m (рис. 15.2, a и θ) являются производными фильтров типа k (рис. 15.2, b). Изменение плеч полувзена типа k по

схеме рис. 15.2, а приводит к последовательно-производному полузвену типа m , характеристическое сопротивление Z_T которого совпадет с сопротивлением Z_T исходного звена типа k — прототипа производного фильтра. Изменение плеч полузвена типа k по схеме рис. 15.2, в приводит к параллельно-производному полузвену типа m , у которого характеристическое сопротивление Z_{II} совпадет с соответствующим сопротивлением прототипа — исходного звена типа k .

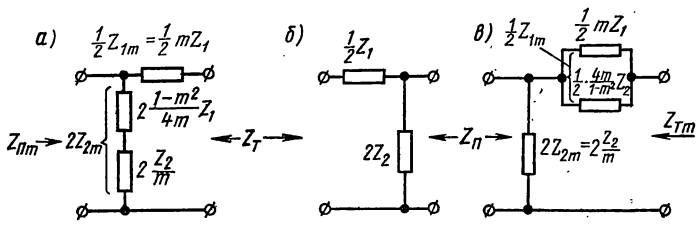


Рис. 15.2

В табл. 15.3 приведены схемы полузвеньев и характеристики фильтров типа m .

Характеристические сопротивления $Z_{II m}$ последовательно-производного и $Z_{T m}$ параллельно-производного фильтров выражаются формулами:

$$\left. \begin{aligned} Z_{II m} &= Z_{II} \left[1 + (1 - m^2) \frac{Z_1}{4Z_2} \right] = \frac{R [1 - (1 - m^2) \Omega^2]}{\sqrt{1 - \Omega^2}}; \\ Z_{T m} &= Z_T \frac{1}{1 + (1 - m^2) \frac{Z_1}{4Z_2}} = \frac{R \sqrt{1 - \Omega^2}}{1 - (1 - m^2) \Omega^2}, \end{aligned} \right\} \quad (15.7)$$

где Z_T и Z_{II} определяются по формуле (15.1).

Характеристическое затухание a в полосе задерживания и характеристическая фаза b в полосе пропускания определяются из выражений:

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{ch} \frac{a}{2} \\ \operatorname{sh} \frac{a}{2} \\ \sin \frac{b}{2} \end{aligned} \right\} &= \left. \begin{aligned} \sqrt{\left| \frac{Z_{1m}}{4Z_{2m}} \right|} &= \frac{m\Omega}{\sqrt{|1 - (1 - m^2) \Omega^2|}}; \\ \sqrt{\left| \frac{Z_{1m}}{4Z_{2m}} \right|} &= \frac{m\Omega}{\sqrt{|1 - (1 - m^2) \Omega^2|}} \end{aligned} \right\} \quad (15.8a)$$

Таблица 15.2

	ФНЧ	ФВЧ	ПФ	ЗФ
Схема полувзвена				
$R = \sqrt{Z_1 Z_2}$	$\sqrt{\frac{L_1}{C_2}}$	$\sqrt{\frac{L_2}{C_1}}$	$\sqrt{\frac{L_1}{C_2}} = \sqrt{\frac{L_2}{C_1}}$	$\sqrt{\frac{L_1}{C_2}} = \sqrt{\frac{L_2}{C_1}}$
Частоты среза	$f_c = \frac{1}{\pi \sqrt{L_1 C_2}}$	$f_c = \frac{1}{4\pi \sqrt{L_2 C_1}}$	$f_{1,2} = \frac{1}{2\pi} \left[\sqrt{\frac{1}{L_1 C_2} + \frac{1}{L_1 C_1}} \mp \frac{1}{\sqrt{L_1 C_2}} \right]$	$f_{1,2} = \frac{1}{8\pi} \left[\sqrt{\frac{1}{L_2 C_1} + \frac{16}{L_1 C_1}} \mp \frac{1}{\sqrt{L_2 C_1}} \right]$
Полоса пропускания при $a=0$	$\frac{f}{f_c}$	$-\frac{f_c}{f}$	Ω	$-\frac{1}{\Omega}$
Полоса задерживания	$\frac{f}{f_c}$	$\frac{f_c}{f}$	$ \Omega $	$\frac{1}{ \Omega }$
Z_T	$R \sqrt{1 - \left(\frac{f}{f_c}\right)^2}$	$\mp R \sqrt{1 - \left(\frac{f_c}{f}\right)^2}$	$\mp R \sqrt{1 - \Omega^2}$	$\pm R \sqrt{1 - \frac{1}{\Omega^2}}$

Z_R	$\pm \frac{R}{\sqrt{1 - \left(\frac{f}{f_c}\right)^2}}$	$\frac{R}{\sqrt{1 - \left(\frac{f_c}{f}\right)^2}}$	$\pm \frac{R}{\sqrt{1 - \Omega^2}}$	$\pm \frac{R}{\sqrt{1 - \frac{1}{\Omega^2}}}$
Формулы для расчета элементов фильтра	$B_1 = \frac{R}{\pi f_c}$	$L_2 = \frac{R}{4\pi f_c}$	$L_1 = \frac{R}{\pi(f_2 - f_1)}$ $L_2 = \frac{R(f_2 - f_1)}{4\pi f_1 f_2}$	$L_1 = \frac{R(f_2 - f_1)}{\pi f_1 f_2}$ $L_2 = \frac{R}{4\pi(f_2 - f_1)}$
	$C_2 = \frac{1}{\pi f_c R}$	$C_1 = \frac{1}{4\pi f_c R}$	$C_1 = \frac{f_2 - f_1}{4\pi f_1 f_2 R}$ $C_2 = \frac{1}{\pi(f_2 - f_1) R}$	$C_1 = \frac{1}{4\pi(f_2 - f_1) R}$ $C_2 = \frac{f_2 - f_1}{\pi f_1 f_2 R}$

Примечание. $\Omega = \frac{f - f_m}{f_m} \frac{f}{f_2 - f_m} \frac{f_m}{f_m - f_2}$, где $f_m = \sqrt{f_1 f_2}$.

Таблица 15.3

	ФНЧ	ФВЧ	ПФ	ЗФ
<p>Схема последовательно-производного полузвена типа m</p>				
<p>Схема параллельно-производного полузвена типа m</p>				

	ФНЧ	ФВЧ	ПФ	ЗФ
Характеристическое затухание				
Характеристическая фаза				
Характеристическое соотношение				

где

$$\left. \begin{aligned} \Omega &= \frac{f}{f_c} \text{ для ФНЧ, } \Omega = \frac{f_c}{f} \text{ для ФВЧ;} \\ \Omega &= \frac{\frac{f}{f_m} - \frac{f_m}{f}}{\frac{f_2}{f_m} - \frac{f_m}{f_2}} \text{ для ПФ, } \Omega = \frac{\frac{f_2}{f_m} - \frac{f_m}{f_2}}{\frac{f}{f_m} - \frac{f_m}{f}} \text{ для ЗФ} \end{aligned} \right\} (15.86)$$

при $f_m = \sqrt{f_1 f_2}$.

В выражения (15.8а) входит функция $\text{ch} \frac{a}{2}$, которая применяется при $1 > (1 - m^2)\Omega^2$, что соответствует разным знакам Z_{1m} и Z_{2m} , и функция $\text{sh} \frac{a}{2}$, используемая при $1 < (1 - m^2)\Omega^2$, что соответствует одинаковым знакам Z_{1m} и Z_{2m} .

В полосе задерживания фильтра типа m частоты f_∞ , при которых выполняется равенство

$$\frac{1}{\Omega^2} = 1 - m^2, \quad (15.9а)$$

соответствуют бесконечному затуханию.

Из (15.9 а) с учетом (15.8а) частоты бесконечного затухания вычисляются по формулам:

для ФНЧ

$$f_\infty = \frac{f_c}{\sqrt{1 - m^2}};$$

для ФВЧ

$$f_\infty = f_c \sqrt{1 - m^2};$$

для ПФ

$$f_{1,2 \infty} = \mp \frac{f_2 - f_1}{2\sqrt{1 - m^2}} + \sqrt{\frac{(f_2 - f_1)^2}{4(1 - m^2)} + f_m^2}.$$

(15.9б)

Таблица 15.4

Наибольшее отклонение Z_{Tm} и Z_{Pm} от значения номинального характеристического сопротивления R , %	Значение m	Значение нормированной частоты Ω на границах рабочей полосы частот
± 5	0,59	0,88
± 10	0,542	0,94
± 15	0,506	0,96
± 20	0,473	0,97

Фильтры типа m с величиной m в пределах 0,506—0,62 имеют значительно более стабильное значение характеристических сопротивлений Z_{Tm} и $Z_{Пm}$ в значительной части области пропускания (табл. 15.4). При $m = 1$ фильтр типа m переходит в фильтр типа k .

Фильтры типов k и m могут быть соединены каскадно на основе равенства характеристических сопротивлений при одинаковых частотах среза и номинальных характеристических сопротивлениях.

Примеры приведены в задачах 15.17, 15.19, 15.23.

6. Потери в элементах фильтра. Учет потерь в катушках индуктивности и конденсаторах может быть проведен следующим образом. Вместо идеальных реактивных элементов L и C сопротивление катушки Z_L и проводимость конденсатора Y_C рассматривают в виде:

$$\left. \begin{aligned} Z_L &= R_L + j\omega L = j\omega(1 - jd_L)L; \\ Y_C &= G_C + j\omega C = j\omega(1 - jd_C)C, \end{aligned} \right\} \quad (15.10)$$

где

$$d_L = \frac{R_L}{\omega L} = \frac{1}{Q_L}; \quad d_C = \frac{G_C}{\omega C} = \frac{1}{Q_C}.$$

Здесь d_L и Q_L , d_C и Q_C — затухание и добротность соответственно катушки и конденсатора.

Для любого Т- или П-звена фильтра формулы для расчета a и b получаются из формул (15.3), в которые вместо Z_1 и Z_2 подставляются значения входящих в них соответствующих элементов с учетом их потерь по формулам (15.10). В результате получаются следующие расчетные формулы:

$$\left. \begin{aligned} a &= 2 \ln \left| \sqrt{\frac{Z_1}{4Z_2} + 1} + \sqrt{\frac{Z_1}{4Z_2} + 1} \right|; \\ b &= 2 \arg \left(\sqrt{\frac{Z_1}{4Z_2} + 1} + \sqrt{\frac{Z_1}{4Z_2} + 1} \right). \end{aligned} \right\} \quad (15.11)$$

В этих формулах для фильтров типа m надо вместо Z_1 и Z_2 писать соответственно Z_{1m} и Z_{2m} .

Пример дан в задаче 15.28.

7. Мостовые фильтры. На рис. 15.3, a , b и $в$ показаны три эквивалентные формы (последняя — условная) изображения симметричных мостовых фильтров. Здесь Z_1 и Z_2 — соответственно продольное и

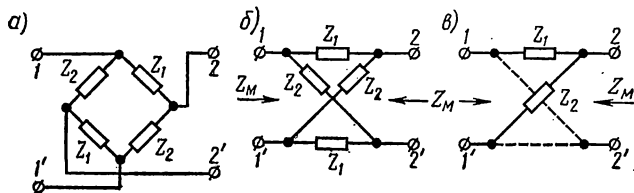


Рис. 15.3

диагональное сопротивление моста. Характеристическое сопротивление Z_M мостовой схемы и ее характеристическая постоянная передачи g определяются формулами:

$$Z_M = \sqrt{Z_1 Z_2}; \quad \operatorname{th} \frac{g}{2} = \sqrt{\frac{Z_1}{Z_2}}; \quad g = \ln \frac{1 + \sqrt{\frac{Z_1}{Z_2}}}{1 - \sqrt{\frac{Z_1}{Z_2}}}. \quad (15.12)$$

Характеристическое сопротивление Z_M реактивного мостового фильтра в полосе пропускания — активное, а в полосе задерживания — реактивное. Знак Z_M в полосе задерживания совпадает со знаком реактивного сопротивления продольного плеча x_1 .

В полосе пропускания знаки характеристической фазы b и x_1 совпадают, а в полосе непропускания знак b определяется из непрерывности функции $b = b(\omega)$, которая изменяется скачком на $\pm\pi$ только в точках бесконечного собственного затухания, т. е. при $Z_1 = Z_2$.

Свойства реактивных мостовых фильтров, имеющих реактивные сопротивления плеч $Z_1 = jx_1$, $Z_2 = jx_2$, приведены в табл. 15.5.

Таблица 15.5

Полоса пропускания	$-\infty \leq \frac{Z_1}{Z_2} \leq 0$	$a = 0$	$\operatorname{tg} \frac{b}{2} =$ $= \pm \sqrt{\left \frac{Z_1}{Z_2} \right }$	$Z_M =$ $= \sqrt{ Z_1 Z_2 }$
Полоса затухания	$0 \leq \frac{Z_1}{Z_2} < 1$	$\operatorname{th} \frac{a}{2} =$ $= \sqrt{\left \frac{Z_1}{Z_2} \right }$	$b = 0$	$Z_M =$ $= \pm j \sqrt{ Z_1 Z_2 }$
	$1 \leq \frac{Z_1}{Z_2} \leq \infty$	$\operatorname{cth} \frac{a}{2} =$ $= \sqrt{\left \frac{Z_1}{Z_2} \right }$	$b = \pm \pi$	$Z_M =$ $= j \sqrt{ Z_1 Z_2 }$

Примеры приведены в задачах 15.29, 15.30, 15.31.

Характеристическое сопротивление мостового фильтра может быть сделано постоянным и равным R в любом диапазоне частот, если сопротивления Z_1 и Z_2 выбрать взаимно обратными (т. е. $Z_1 Z_2 = R^2$).

Собственное затухание мостового фильтра бесконечно при $Z_1 = Z_2$. Это позволяет проектировать балансные схемы, имеющие бесконечное затухание при всех частотах.

Мостовой фильтр имеет наиболее общие характеристики и к его схеме может быть приведен симметричный фильтр произвольной схемы. В частности, симметричные Т- и П-образные фильтры (рис. 15.4, а

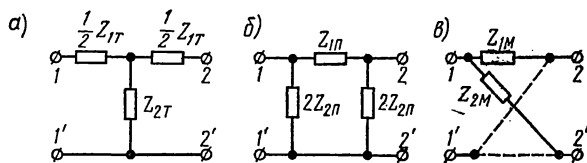


Рис. 15.4

и б) эквивалентны друг другу и мостовому фильтру (рис. 15.4, в) при условии

$$Z_{1М} = \frac{Z_{1Т}}{2} = \frac{2Z_{1П} Z_{2П}}{Z_{1П} + 4Z_{2П}}; \quad Z_{2М} = 2Z_{2Т} + \frac{Z_{1Т}}{2} = 2Z_{2П}. \quad (15.13)$$

Мостовые фильтры имеют сравнительно много элементов, поэтому их обычно реализуют эквивалентными Т-, П-образными фильтрами, а также в виде эквивалентных дифференциально мостовых схем с применением идеальных трансформаторов (ИТ), как показано на рис. 15.5.

Пример в задаче 15.34.

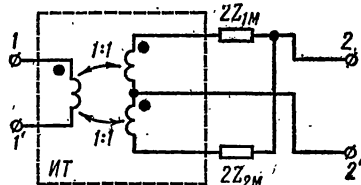


Рис. 15.5

УПРАЖНЕНИЯ И ЗАДАЧИ

А. Задачи на применение общей теории реактивных Т- и П-образных фильтров

15.1. На рис. 15.6, а—г изображены схемы звеньев симметричных цепочечных фильтров. Используя общетеоретические положения для Т- и П-образных фильтров (см. пп. 2 и 3 основных положений и со-

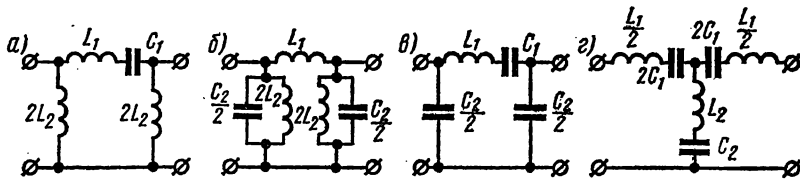


Рис. 15.6

отношений), для каждой из них определить, к какому типу по полосе пропускания она относится, и вычислить граничные частоты. Составить уравнения характеристических затухания α и сопротивления Z_c , построить соответствующие кривые в функции ω .

Даны: для схемы *a* $L_1 = 10$ мГн, $L_2 = 1,5$ мГн, $C_1 = 1$ мкФ,
 для схемы *б* $L_1 = 10$ мГн, $C_2 = 2,67$ мкФ, $L_2 = 1,5$ мГн,
 для схемы *в* $L_1 = 10$ мГн, $C_1 = 1$ мкФ, $C_2 = 2$ мкФ,
 для схемы *г* $L_1 = 10$ мГн, $L_2 = 1,5$ мГн, $C_1 = 1$ мкФ,
 $C_2 = 2,67$ мкФ.

Решение. Рассмотрим схему рис. 15.6, а.
 Сопротивления Z_1 и Z_2 соответственно равны:

$$Z_1 = \frac{L_1}{j\omega} (\omega_1^2 - \omega^2), \text{ где } \omega_1 = \frac{1}{\sqrt{L_1 C_1}}; Z_2 = j\omega L_2.$$

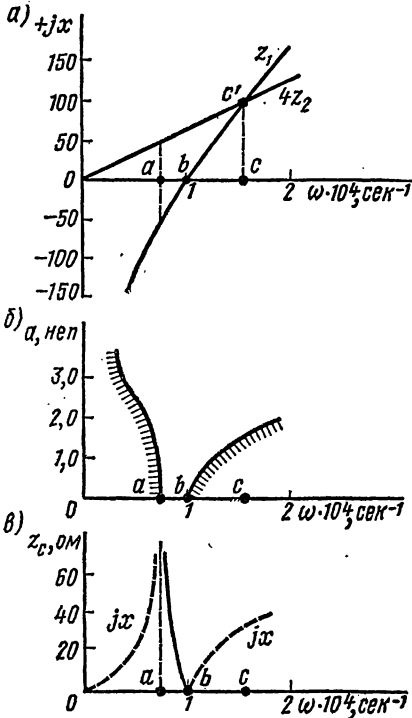


Рис. 15.7

По этим уравнениям на рис. 15.7, а построены (в масштабе) частотные зависимости Z_1 и $4Z_2$. В соответствии с табл. 15.1 устанавливаем, что граничным частотам соответствуют точка *a*, где $Z_1 = -4Z_2$, и точка *b*, где $Z_1 = 0$.

Интервал *a—b* представляет собой полосу пропускания. Итак, схема рис. 15.6, а соответствует полосовому фильтру. Вычислим частоты среза из условий:

$$Z_1 = \frac{L_1}{j\omega} (\omega_1^2 - \omega^2) = -4Z_2 = -j4\omega L_2$$

и

$$Z_1 = \frac{L_1}{j\omega} (\omega_1^2 - \omega^2) = 0.$$

Из первого условия следует

$$\omega_a = \frac{1}{\sqrt{C_1(L_1 + 4L_2)}} = \frac{1}{\sqrt{10^{-6}(10 \cdot 10^{-3} + 4 \cdot 1,5 \cdot 10^{-3})}} = 7900 \text{ сек}^{-1},$$

а из второго условия

$$\omega_b = \frac{1}{\sqrt{L_1 C_1}} = \frac{1}{\sqrt{10 \cdot 10^{-3} \cdot 10^{-6}}} = 10^4 \text{ сек}^{-1} = \omega_1.$$

Уравнение кривой характеристического затухания может быть найдено по формулам (см. табл. 15.1)

$$\left. \begin{array}{l} \operatorname{ch} \frac{a}{2} \\ \operatorname{sh} \frac{a}{2} \end{array} \right\} = \sqrt{\left| \frac{Z_1}{4Z_2} \right|} = \sqrt{\left| \frac{L_1}{4L_2} \left[1 - \left(\frac{\omega_1}{\omega} \right)^2 \right] \right|}.$$

Расчет по формуле $\operatorname{ch} \frac{a}{2}$ проводится в области частот от 0 до ω_a (где знаки Z_1 и Z_2 в полосе задерживания разные), а по формуле $\operatorname{sh} \frac{a}{2}$ — в области частот от ω_b до ∞ (где знаки Z_1 и Z_2 одинаковые). Уравнение кривой характеристического сопротивления [см. формулу (15.1)] имеет вид

$$Z_{c\Pi} = \sqrt{\frac{Z_1 Z_2}{1 + \frac{Z_1}{4Z_2}}} = \sqrt{\frac{L_1 L_2 (\omega_1^2 - \omega^2)}{1 + \frac{L_1}{4L_2} \left[1 - \left(\frac{\omega_1}{\omega} \right)^2 \right]}}.$$

Расчет кривых характеристического затухания и характеристического сопротивления сведен в табл. 15.6.

Таблица 15.6

ω	$\left 1 - \left(\frac{\omega_1}{\omega} \right)^2 \right $	$\operatorname{ch} \frac{a}{2}$	$\operatorname{sh} \frac{a}{2}$	a , неп	$Z_{c\Pi}$, ом
0	∞	∞	—	∞	0
0,5 ω_1	3	2,24	—	2,9	j 16,8
0,79 $\omega_1 = \omega_a$	0,6	1,0	—	0	∞
0,85 ω_1	0,38	—	—	—	33,4
0,9 ω_1	0,23	—	—	—	21,5
0,95 ω_1	0,105	—	—	—	13,5
$\omega_1 = \omega_b$	0	—	0	0	0
1,58 $\omega_1 = \omega_c$	0,6	—	1,0	1,78	j 33,6
2 ω_1	0,75	—	1,12	1,93	j 44,8

Кривые $a(\omega)$ и $Z_{c\Pi}(\omega)$, построенные по результатам расчета, изображены на рис. 15.7, б и 15.7, в.

Рассмотрим схему рис. 15.6, б. Сопротивления:

$$Z_1 = j\omega L_1; \quad Z_2 = \frac{j\omega}{C_2(\omega_1^2 - \omega^2)},$$

где

$$\omega_1 = \frac{1}{\sqrt{L_2 C_2}} = \frac{1}{\sqrt{1,5 \cdot 10^{-3} \cdot 2,67 \cdot 10^{-8}}} = 1,58 \cdot 10^4 \text{ сек}^{-1}.$$

Частотные зависимости Z_1 и $4Z_2$, построенные по этим уравнениям, изображены на рис. 15.8, а.

Найдем граничные частоты. Поскольку в диапазоне частот от $\omega = 0$ до $\omega = \omega_1$ сопротивления Z_1 и Z_2 имеют одинаковые знаки, условие

$Z_1 = 0$ не может быть использовано. Нижняя граница полосы пропускания определяется из условия $Z_2 = \infty$: $\omega_a = \omega_1$. Используя условие $Z_1 = -4Z_2$, получим

$$j\omega L_1 = -j \frac{4\omega}{C_2(\omega_1^2 - \omega^2)}$$

Отсюда

$$\omega_b = \sqrt{\frac{L_1 + 4L_2}{L_1 L_2 C_2}} = \sqrt{\frac{10 \cdot 10^{-3} + 4 \cdot 1,5 \cdot 10^{-3}}{10 \cdot 10^{-3} \cdot 1,5 \cdot 10^{-3} \cdot 2,67 \cdot 10^{-8}}} = 2 \cdot 10^4 \text{ сек}^{-1}$$

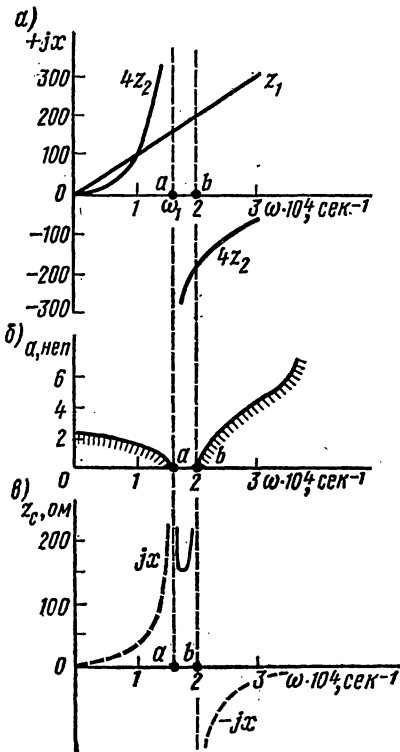


Рис. 15.8

Таким образом, полоса пропускания исследуемой схемы начинается с частоты $\omega = \omega_a$ и заканчивается на частоте $\omega = \omega_b$. Следовательно, схема рис. 15.6, б является схемой полосового фильтра. Составим уравнения кривой характеристического затухания;

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{ch} \frac{a}{2} \\ \operatorname{sh} \frac{a}{2} \end{aligned} \right\} = \sqrt{\left| \frac{Z_1}{4Z_2} \right|} = \sqrt{\left| \frac{L_1}{4L_2} \left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_1} \right)^2 \right] \right|}$$

и кривой характеристического сопротивления:

$$\begin{aligned} Z_{c\Pi} &= \sqrt{\frac{Z_1 Z_2}{1 + \frac{Z_1}{4Z_2}}} \\ &= \sqrt{\frac{-\frac{\omega^2 L_1 L_2}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_1} \right)^2}}{1 + \frac{L_1}{4L_2} \left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_1} \right)^2 \right]}} \end{aligned}$$

Расчет кривых характеристического затухания и характеристического сопротивления сведен в табл. 15.7.

Кривые $a(\omega)$ и $Z_{c\Pi}(\omega)$, построенные по результатам расчета, изображены на рис. 15.8, б и 15.8, в.

Расчеты для схем рис. 15.6, в и 15.6, г рекомендуется проделать самостоятельно.

ω	$1 - \left(\frac{\omega}{\omega_1}\right)^2$	$\operatorname{ch} \frac{a}{2}$	$\operatorname{sh} \frac{a}{2}$	$a, \text{ nep}$	$Z_{\text{сП}}, \text{ ом}$
0	1	—	1,3	2,16	0
$0,25 \omega_1$	0,937	—	1,25	2,1	$j 9,9$
$0,5 \omega_1$	0,75	—	1,12	1,93	$j 23,8$
$0,75 \omega_1$	0,437	—	0,85	1,54	$j 52,7$
ω_1	0	—	—	—	∞
$1,1 \omega_1$	-0,21	—	—	—	148
$1,2 \omega_1$	-0,44	—	—	—	176
$1,27 \omega_1 = \omega_b$	-0,6	1,0	—	—	∞
$1,5 \omega_1$	-1,25	2,08	—	2,72	$-j 79$
$2 \omega_1$	-3	5	—	4,58	$-j 28,9$

15.2. Показать, что два одинаковых индуктивно связанных контура (рис. 15.9, а) представляют собой полосовой фильтр. Определить частоты среза этого фильтра.

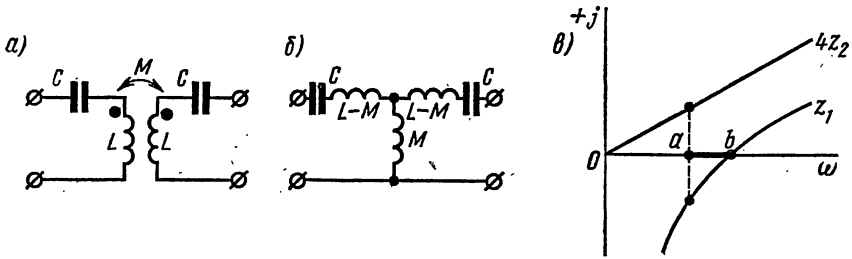


Рис. 15.9

Решение. Заданная схема может быть заменена эквивалентной схемой рис. 15.9, б. Если использовать коэффициент связи $k = M/L$, формула сопротивления продольного плеча схемы примет вид

$$Z_1 = 2 \frac{L}{j\omega} \left[\omega_0^2 - \omega^2 (1 - k) \right], \text{ где } \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}.$$

Сопротивление поперечного плеча $Z_2 = j\omega M$. Графики $z_1(\omega)$ и $4z_2(\omega)$ изображены на рис. 15.9, в. Частоты среза определяются из условий: 1) $Z_1 = -4Z_2$; 2) $Z_1 = 0$. Используя первое условие, получим

$$2 \frac{L}{j\omega} \left[\omega_0^2 - \omega^2 (1 - k) \right] = -4 j \omega M.$$

Отсюда

$$\omega_a = \frac{\omega_0}{\sqrt{1+k}}.$$

Из второго условия $Z_1 = 0$ следует

$$\omega_b = \frac{\omega_0}{\sqrt{1-k}}.$$

Таким образом, полоса пропускания расположена между частотами ω_a и ω_b , т. е. заданная схема обладает свойствами полосового фильтра.

Б. Фильтры типа k

15.3. Определить элементы Т-образного фильтра нижних частот типа k (см. табл. 15.2), номинальное характеристическое сопротивление которого $R = 600 \text{ ом}$, а частота среза $f_c = 3200 \text{ гц}$. Рассчитать затухание на частоте $f = 6400 \text{ гц}$, выразив его в неперах, децибелах и простым числом, равным отношению амплитуд входа и выхода, полагая, что при этой частоте фильтр нагружен на характеристическое сопротивление. Рассчитать и построить кривые зависимостей характеристического сопротивления Z_T , затухания a и коэффициента фазы b от частоты.

Начертить Т-схему ФНЧ в уравновешенном виде и написать на ней величины каждого из ее элементов.

Начертить П- и Г-схемы ФНЧ в уравновешенном виде, имеющие те же значения R и f_c .

Р е ш е н и е. По формулам табл. 15.2 определяем индуктивность, емкость элементов фильтра и затухание a :

$$\frac{L_1}{2} = \frac{R}{2\pi f_c} = \frac{600}{2\pi \cdot 3200} \approx 0,03 \text{ гн};$$

$$C_2 = \frac{1}{\pi f_c R} = \frac{1}{\pi \cdot 3200 \cdot 600} = 0,166 \text{ мкф};$$

$$a = 2 \operatorname{arch} f/f_c.$$

При $f = 6400 \text{ гц}$

$$a = 2 \operatorname{arch} \frac{6400}{3200} = 2 \operatorname{arch} 2 = 2,64 \text{ неп}$$

или

$$a_{\text{дб}} = 8,69 a_{\text{неп}} = 8,69 \cdot 2,64 = 23 \text{ дб}.$$

Определим отношение амплитуд напряжения входа и выхода:

$$U_1/U_2 = e^{a_{\text{неп}}} = e^{2,64} = 14.$$

Уравнение кривой $Z_T(\omega)$ имеет вид

$$Z_T = R \sqrt{1 - \left(\frac{f}{f_c}\right)^2} = R \sqrt{1 - \Omega^2}.$$

Коэффициент фазы в полосе задерживания имеет значение $+\pi$, а в полосе пропускания

$$b = 2 \arcsin \frac{f}{f_c} = 2 \arcsin \Omega.$$

Расчет зависимостей Z_T , a и b от частоты приведен в табл. 15.8.

Таблица 15.8

Полоса	$f, \text{ мц}$	Ω	$\sqrt{1-\Omega^2}$	$Z_T, \text{ ом}$	$\text{ch} \frac{a}{2}$	$a, \text{ неп}$	$\sin \frac{b}{2}$	$b, \text{ град}$
Пропускания	0	0	0	600	—	0	0	0
	800	0,25	0,97	582	—	0	0,25	29
	1600	0,5	0,865	519	—	0	0,5	60
	2400	0,75	0,66	396	—	0	0,75	97
	3200	1,0	0	0	1,0	0	1,0	180
Задерживания	4000	1,25	$\sqrt{0,75}$	$\sqrt{450}$	1,25	1,39	—	180
	4800	1,5	$\sqrt{1,12}$	$\sqrt{672}$	1,5	1,92	—	180
	5600	1,75	$\sqrt{1,44}$	$\sqrt{864}$	1,75	2,32	—	180
	6400	2,0	$\sqrt{1,73}$	$\sqrt{1040}$	2,0	2,64	—	180

По полученным результатам на рис. 15.10, а построены кривые. На рис. 15.10, б начерчены схемы фильтров в уравновешенном виде.

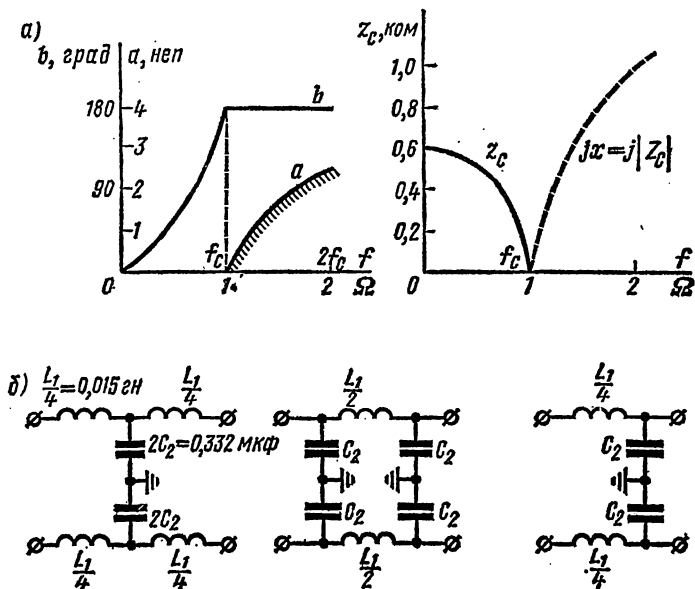


Рис. 15.10

15.4. Найти элементы П-образного фильтра нижних частот типа k , номинальное характеристическое сопротивление которого $R = 600 \text{ ом}$ и частота среза $f_c = 3200 \text{ гц}$.

Решение. Определяем индуктивность и емкость по формулам табл. 15.2:

$$L_1 = \frac{R}{\pi f_c} = \frac{600}{\pi \cdot 3200} \approx 0,06 \text{ гн};$$

$$\frac{C_2}{2} = \frac{1}{2\pi f_c R} = \frac{1}{2\pi \cdot 3200 \cdot 600} = 0,083 \text{ мкф}.$$

15.5. Определить частоту среза Т-образного фильтра нижних частот типа k , предназначенного для телеграфирования, у которого индуктивность каждого плеча равняется 3 гн , а емкость $5,3 \text{ мкф}$.

15.6. Найти индуктивность $L_1/2$ и емкость C_2 Т-образного фильтра нижних частот типа k , номинальное характеристическое сопротивление которого $R = 600 \text{ ом}$, а коэффициент затухания на частоте $5,6 \text{ кгц}$ равен 20 дб . Найти частоту среза и отношение напряжений на входе U_1 и выходе U_2 при той же частоте $5,6 \text{ кгц}$, считая, что фильтр согласован с нагрузкой.

15.7. ФНЧ типа k , составленный из двух одинаковых звеньев с номинальным характеристическим сопротивлением $R = 600 \text{ ом}$, должен иметь затухание, равное $5,28 \text{ нп}$ при частоте $f = 6,4 \text{ кгц}$. Определить частоту среза, индуктивность и емкость одного звена фильтра.

15.8. Для фильтра задачи 15.3 рассчитать и построить в функции частоты кривые модуля коэффициента передачи по напряжению $|K_U|$ и $\ln \left| \frac{1}{K_U} \right|$ в режиме холостого хода.

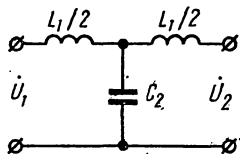


Рис. 15.11

Сравнить кривые характеристического затухания a и $\ln \left| \frac{1}{K_U} \right|$, и объяснить причины их различия.

Решение. Схема фильтра приведена на рис. 15.11. В режиме холостого хода напряжения на входе и выходе фильтра могут быть записаны в виде:

$$\dot{U}_1 = i j \left(\omega \frac{L_1}{2} - \frac{1}{\omega C_2} \right) = i \frac{L_1}{j 2\omega} (2\omega^2 - \omega^2);$$

$$\dot{U}_2 = i \frac{1}{j\omega C_2}.$$

Отсюда получим формулу модуля коэффициента передачи

$$|K_U| = \left| \frac{U_2}{U_1} \right| = \left| \frac{1}{2 \left[2 - \left(\frac{f}{f_c} \right)^2 \right]} \right|.$$

Результаты расчета зависимостей K_U и $\ln \left| \frac{1}{K_U} \right|$ от частоты приведены в табл. 15.9.

Таблица 15.9

$f, \text{гц}$	$2 - \left(\frac{f}{f_c}\right)^2$	$ K_U $	$\left \frac{1}{K_U}\right $	$\ln \left \frac{1}{K_U}\right $
0	2	0,25	4	1,386
800	1,937	0,258	3,88	1,356
1600	1,75	0,286	3,5	1,253
2400	1,437	0,348	2,88	1,058
3200	1	0,5	2,0	0,694
4000	0,438	1,14	0,88	-0,128
4530	0	∞	0	$-\infty$
4800	-0,25	2	0,5	-0,693
5600	-1,06	0,472	2,12	0,752
6400	-2	0,25	4	1,386

На рис. 15.12 по полученным данным построены кривые. Сопоставление кривой $\ln \left| \frac{1}{K_U} \right|$ рис. 15.12 с кривой a рис. 15.10, a показывает, что они существенно различаются. Причина этого в том, что кривая $\ln \left| \frac{1}{K_U} \right|$ соответствует режиму холостого хода, а кривая $a(f)$ —

режиму согласованной нагрузки.

Некоторое сближение кривых наблюдается лишь при частотах $f \gg f_c$, так как в этой области сопротивление фильтра Z_T велико, а следовательно, режим согласованной нагрузки близок к холостому ходу.

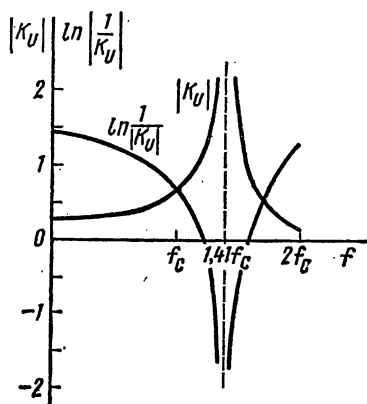


Рис. 15.12

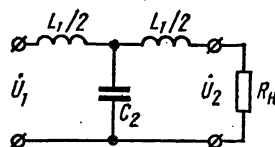


Рис. 15.13

15.9. ФНЧ нагружен на постоянное активное сопротивление R_H (рис. 15.13). Рассчитать и построить кривую модуля коэффициента передачи по напряжению $K(\omega) = U_2/U_1$ и кривую $\ln \frac{1}{K(\omega)}$ для двух значений R_H : 1) $R_H = R$; 2) $R_H = 0,8 R$.

Р е ш е н и е. Определяем коэффициенты A_{11} и A_{12} четырехполюсника (см. табл. 14.2):

$$A_{11} = 1 + \frac{Z_1}{Z_2} = 1 + j \frac{\omega L_1}{2} j \omega C_2 = 1 - \frac{\omega^2 L_1 C_2}{2};$$

$$A_{12} = 2Z_1 + \frac{Z_1^2}{Z_2} = 2j \frac{\omega L_1}{2} + \frac{\left(\frac{j\omega L_1}{2}\right)^2}{\frac{1}{j\omega C_2}} = j\omega L_1 \left(1 - \frac{\omega^2 L_1 C_2}{4}\right).$$

Если использовать выражение нормированной частоты $\Omega = \frac{\omega}{\omega_c} = \frac{\omega \sqrt{L_1 C_2}}{2}$, последние формулы примут вид:

$$A_{11} = 1 - 2\Omega^2; \quad A_{12} = j\omega L_1 (1 - \Omega^2).$$

Коэффициент передачи напряжения (см. табл. 14.4).

$$K_U = \frac{\dot{U}_2}{\dot{U}_1} = \frac{\dot{U}_2}{A_{11}\dot{U}_2 + A_{12}i_2} = \frac{1}{A_{11} + \frac{A_{12}}{R_H}}.$$

Найдем выражение модуля коэффициента передачи $K(\omega)$ для двух заданных случаев:

$$1. R_H = R = \sqrt{\frac{L_1}{C_2}};$$

$$\frac{A_{12}}{R_H} = \frac{j\omega L_1}{\sqrt{\frac{L_1}{C_2}}} (1 - \Omega^2) = j2\Omega (1 - \Omega^2);$$

$$K_U = \frac{1}{A_{11} + \frac{A_{12}}{R_H}} = \frac{1}{(1 - 2\Omega^2) + j2\Omega (1 - \Omega^2)}.$$

Модуль коэффициента передачи

$$K_U(\omega) = K(\omega) = \frac{1}{\sqrt{(1 - 2\Omega^2)^2 + 4\Omega^2(1 - \Omega^2)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - 4\Omega^4 + 4\Omega^8}}.$$

Найдем частоту, при которой это выражение будет максимально. Для этого достаточно приравнять нулю первую производную подкоренного выражения:

$$\frac{d}{d\Omega} (1 - 4\Omega^4 + 4\Omega^8) = -16\Omega^3 + 32\Omega^7 = 0,$$

отсюда

$$\Omega = \sqrt{\frac{2}{3}}, \quad \omega = \Omega\omega_c = \sqrt{\frac{2}{3}} \omega_c.$$

При этой частоте

$$K(\omega)_{\max} = \sqrt{\frac{27}{11}} = 1,57.$$

Расчет кривых $K(\omega)$ и $\left| \ln \frac{1}{K(\omega)} \right|$ сведен в табл. 15.10.

Таблица 15.10

ω	Ω	$K(\omega)$	$\frac{1}{K(\omega)}$	$\left \ln \frac{1}{K(\omega)} \right $
0	0	1,0	1,0	0
$0,25\omega_c$	0,25	1,01	0,99	0,01
$0,5\omega_c$	0,5	1,11	0,9	0,105
$0,75\omega_c$	0,75	1,5	0,667	0,405
$\sqrt{\frac{2}{3}}\omega_c$	$\sqrt{\frac{2}{3}}$	1,57	0,637	0,551
ω_c	1	1,0	1,0	0
$1,5\omega_c$	1,5	0,195	5,12	1,633
$2\omega_c$	2,0	0,072	13,9	2,632

$$2. R_H = 0,8R = 0,8 \sqrt{\frac{L_1}{C_2}}, \frac{A_{12}}{R_H} = j2,5\Omega(1 - \Omega^2),$$

$$K(\omega) = \frac{1}{\sqrt{(1 - 2\Omega^2)^2 + 6,25\Omega^2(1 - \Omega^2)^2}}$$

Найдем частоту, при которой $K(\omega)$ имеет экстремальные значения. В результате получим:

$$\Omega_1 = 0,862; \quad \omega_1 = 0,862\omega_c;$$

$$\Omega_2 = 0,4; \quad \omega_2 = 0,4\omega_c.$$

Экстремальные значения $K(\omega)$ следующие:

$$K(\omega)_1 = 1,36; \quad K(\omega)_2 = 0,925.$$

Результаты расчета кривых $K(\omega)$ и $\left| \ln \frac{1}{K(\omega)} \right|$ приведены в табл. 15.11, а соответствующие кривые, построенные по результатам расчета, изображены на рис. 15.14.

Примечание. В рассмотренных случаях режим работы

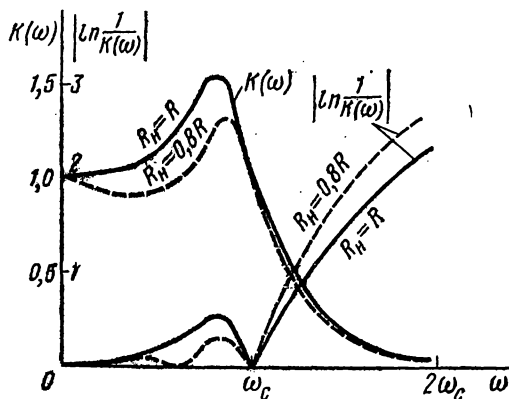


Рис. 15.14

фильтра не является согласованным, так как нагрузка постоянна и для разных частот не является характеристической.

Таблица 15.11

ω	Ω	$K(\omega)$	$\frac{1}{K(\omega)}$	$\left \ln \frac{1}{K(\omega)} \right $
0	0	1,0	1,0	0
$0,4\omega_c$	0,4	0,925	1,08	0,077
$0,6\omega_c$	0,6	1,0	1,0	0
$0,862\omega_c$	0,862	1,36	0,735	0,308
ω_c	1	1,0	1,0	0
$1,5\omega_c$	1,5	0,171	5,85	1,766
$2\omega_c$	2,0	0,0605	16,55	2,804

15.10. Требуется рассчитать Т-образный ФВЧ типа k , имеющий номинальное характеристическое сопротивление $R = 600 \text{ ом}$. Частота среза $f_c = 3200 \text{ гц}$. Построить характеристики a , b , Z_T в функции частоты f и в функции нормированной частоты $\Omega = f_c/f$.

Решение. Рассчитаем элементы фильтра, используя формулы табл. 15.2:

$$L_2 = \frac{R}{2\omega_c} = \frac{600}{2 \cdot 2\pi \cdot 3200} \approx 0,015 \text{ гн};$$

$$C_1 = \frac{1}{2\omega_c R} = \frac{1}{2 \cdot 2\pi \cdot 3200 \cdot 600} = 0,0415 \text{ мкф}.$$

Уравнения кривых затухания и коэффициента фазы имеют вид: в полосе пропускания $a = 0$, $b = -2 \arcsin \sin f_c/f = -2 \arcsin \Omega$, в полосе задерживания $a = 2 \operatorname{arch} f_c/f = 2 \operatorname{arch} \Omega$, $b = -\pi$.

Уравнение кривой характеристического сопротивления имеет вид

$$Z_T = R \sqrt{1 - \left(\frac{f_c}{f}\right)^2} = R \sqrt{1 - \Omega^2}.$$

Расчет частотных характеристик сведен в табл. 15.12.

Таблица 15.12

Полоса	f , кГц	Ω	$\operatorname{ch} \frac{a}{2}$	$\sin \frac{b}{2}$	a , неп	b , град	Z_T , ом
Задерживания	0	∞	∞	—	∞	—180	$-j \infty$
	0,8	4	4	—	4,13	—180	$-j 2320$
	1,6	2	2	—	2,64	—180	$-j 1040$
	2,4	1,33	1,33	—	1,59	—180	$-j 526$
	3,2	1,0	1,0	—1,0	0	—180	0
Пропускания	4,0	0,8	—	—0,8	—	—106	360
	4,8	0,667	—	—0,667	—	—85	447
	5,6	0,572	—	—0,572	—	—70	492
	6,4	0,5	—	—0,5	—	—60	520

Кривые, построенные по полученным данным, изображены на рис. 15.15.

15.11. Определить частоту среза П-образного ФВЧ типа k , у которого $2L_2 = 0,4 \text{ гн}$, $C_1 = 0,7 \text{ мкф}$, и найти затухание при $f = 0,5 f_c$.

15.12. Определить индуктивность и емкость ФВЧ-типа k , если частота среза $f_c = 500 \text{ гц}$ и номинальное характеристическое сопротивление $R = 1000 \text{ ом}$. Чему равно характеристическое затухание этого фильтра при частоте $f = 250 \text{ гц}$?

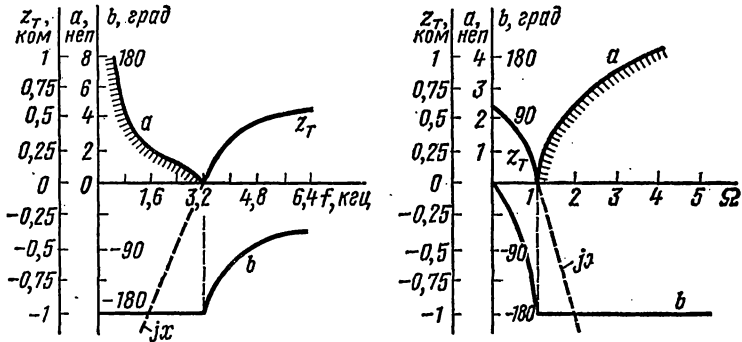


Рис. 15.15

15.13. ФВЧ типа k , состоящий из двух звеньев с номинальным характеристическим сопротивлением $R = 5000 \text{ ом}$, должен иметь затухание, равное 8 неп при частоте $f = 250 \text{ гц}$. Определить частоту среза, индуктивность и емкость одного звена фильтра.

15.14. Частоты среза П-образного полосового фильтра типа k $f_1 = 12 \text{ кГц}$, $f_2 = 15,2 \text{ кГц}$, номинальное характеристическое сопротивление $R = 600 \text{ ом}$. Найти параметры элементов этого фильтра. Построить частотные характеристики a , b , Z_{Π} в функции частоты f и нормированной частоты Ω .

Решение. Рассчитаем параметры элементов фильтра, используя формулы табл. 15.2:

$$L_1 = \frac{R}{\pi(f_2 - f_1)} = \frac{600}{3,14(15,2 - 12) 10^3} = 0,06 \text{ гн};$$

$$L_2 = \frac{R(f_2 - f_1)}{4\pi f_1 f_2} = \frac{600(15,2 - 12) 10^3}{4 \cdot 3,14 \cdot 15,2 \cdot 10^3} = 0,84 \text{ мгн};$$

$$C_1 = \frac{f_2 - f_1}{4\pi R f_1 f_2} = \frac{(15,2 - 12) 10^3}{4 \cdot 3,14 \cdot 600 \cdot 15,2 \cdot 10^3} = 2,33 \text{ нф};$$

$$C_2 = \frac{1}{\pi(f_2 - f_1) R} = \frac{1}{3,14(15,2 - 12) 10^3 \cdot 600} = 0,167 \text{ мкф}.$$

Уравнения кривых характеристического затухания и коэффициента фазы имеют вид:

$$\text{в полосе пропускания } a = 0, b = 2 \arcsin \Omega;$$

в полосе задерживания $a = 2 \operatorname{arcsch} |\Omega|$, $b = \mp \pi$,
где

$$\Omega = \frac{\frac{f}{f_m} - \frac{f_m}{f}}{\frac{f_2}{f_m} - \frac{f_m}{f_2}}, \quad f_m = \sqrt{f_1 f_2} = 10^3 \sqrt{12 \cdot 15,2} = 13,5 \text{ кГц.}$$

Уравнение кривой характеристического сопротивления имеет вид

$$Z_{\Pi} = \frac{R}{\sqrt{1 - \Omega^2}}.$$

Расчет частотных характеристик сведен в табл. 15.13.

Таблица 15.13

Полоса	f , кГц	Ω	$\operatorname{sh} \frac{b}{2}$	$\operatorname{ch} \frac{a}{2}$	a , неп	b , град	Z_{Π} , ом
Задерживания	0	$-\infty$	—	∞	∞	—180	0
	4	—13	—	13	6,52	—180	$j 46,1$
	8	—4,65	—	4,65	4,44	—180	$j 132$
	12	—1,0	—1,0	1,0	0	—180	∞
Пропускания	13	—0,316	—0,316	—	—	—37	632
	13,5	0	0	—	—	—0	600
	14	0,316	0,316	—	—	37	632
Задерживания	15,2	1,0	1,0	1,0	0	180	∞
	18	2,46	—	2,46	3,1	180	$-j 268$
	20	3,4	—	3,4	3,8	180	$-j 185$

На рис. 15.16 по полученным результатам построены частотные характеристики.

15.15. Т-образный полосовой фильтр (ПФ) типа k имеет следующие параметры: $L_1/2 = 30$ мГн, $L_2 = 0,84$ мГн, $2C_1 = 4,66$ нФ, $C_2 = 167$ нФ. Определить характеристическое затухание фильтра при частоте $f = 20$ кГц.

15.16. Рассчитать элементы заграждающего фильтра типа k , не пропускающего полосу частот от $f_1 = 20$ кГц до $f_2 = 23$ кГц, и определить характеристическое затухание фильтра при частоте 21 кГц. Номинальное характеристическое сопротивление фильтра $R = 600$ ом.

В. Фильтры типа m . Совместная работа фильтров типа k и m . Потери в фильтрах

15.17. Последовательно-производный ФНЧ типа m имеет частоту среза $f_c = 3200$ гц и номинальное характеристическое сопротивление $R = 600$ ом. Начертить схему и определить элементы Г-образного

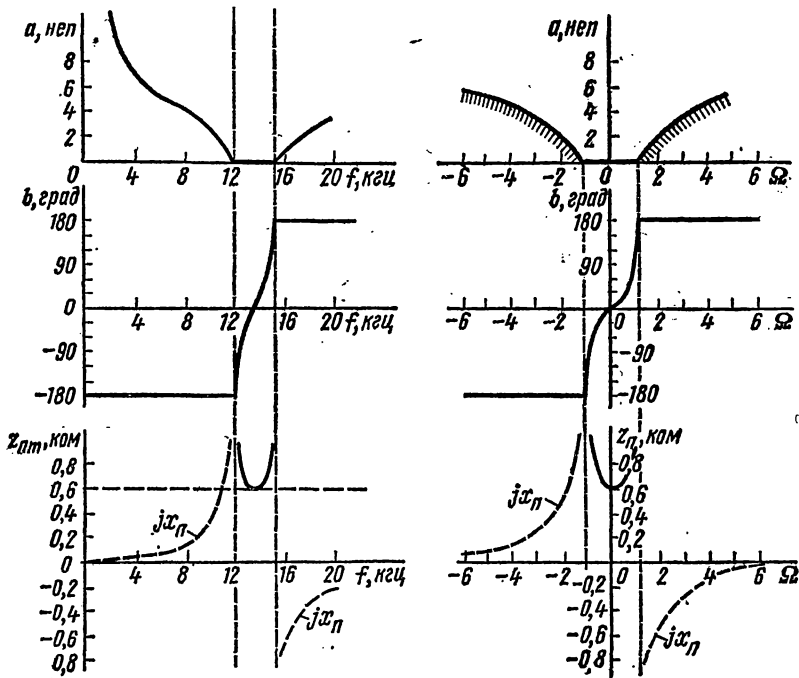


Рис. 15.16

полузвена этого фильтра, если отклонение характеристического сопротивления $Z_{пт}$ от его номинального значения для рабочей полосы частот должно быть не более $\pm 10\%$. Рассчитать и построить кривые зависимостей характеристического сопротивления $Z_{пт}$, затухания a и коэффициента фазы b от частоты.

Решение. Схема Г-образного полузвена изображена на рис. 15.17. По табл. 15.4 находим величину параметра $m = 0,542$, обеспечивающего требуемую степень постоянства величины характеристического сопротивления $\pm 10\%$ в пределах рабочей полосы частот $(0 \div 0,94) f_c = 0 \div 3000$ гц. Для расчета элементов производного фильтра типа m определим по формулам табл. 15.2 элементы прототипа ФНЧ типа k :

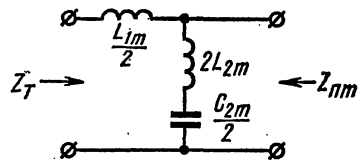


Рис. 15.17

$$L_1 = \frac{R}{\pi f_c} = \frac{600}{3,14 \cdot 3200} = 0,06 \text{ гн};$$

$$C_2 = \frac{1}{\pi f_c R} = \frac{1}{3,14 \cdot 3200 \cdot 600} = 0,167 \text{ мкф}.$$

Расчет элементов Г-образного полузвена произведем по формулам табл. 15.3:

$$\frac{L_{1m}}{2} = \frac{mL_1}{2} = 16,25 \text{ мГн};$$

$$2L_{2m} = 2 \frac{1-m^2}{4m} L_1 = 39 \text{ мГн};$$

$$\frac{C_{2m}}{2} = \frac{mC_2}{2} = 0,045 \text{ мкФ}.$$

Уравнения кривых зависимостей $Z_{Пm}$, a , b от частоты по (15.7) и (15.8a):

$$Z_{Пm} = \frac{R}{\sqrt{1-\Omega^2}} [1 - (1-m^2)\Omega^2];$$

$$a = 2 \operatorname{arch} \frac{m\Omega}{\sqrt{|1 - (1-m^2)\Omega^2|}} \quad (\text{при } f < f_\infty);$$

$$a = 2 \operatorname{arsh} \frac{m\Omega}{\sqrt{|1 - (1-m^2)\Omega^2|}} \quad (\text{при } f > f_\infty);$$

$$b = 2 \operatorname{arcsin} \frac{m\Omega}{\sqrt{|1 - (1-m^2)\Omega^2|}} \quad (\text{в полосе пропускания});$$

$$b = \pm \pi, 0 \quad (\text{в полосе задерживания}).$$

До расчета характеристик по (15.9, б) найдем частоту бесконечного затухания:

$$f_\infty = \frac{f_c}{\sqrt{1-m^2}} = \frac{3200}{\sqrt{1-0,542^2}} = 3810 \text{ Гц}.$$

Расчет частотных характеристик сведен в табл. 15.14, а соответствующие кривые даны на рис. 15.18.

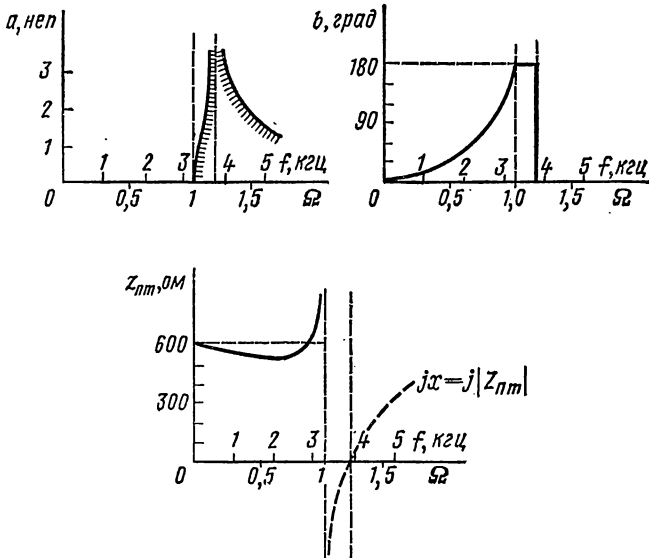


Рис. 15.18

Полоса	$f, \text{ гц}$	$\varrho = \frac{f}{f_c}$	$\text{sh } \frac{a}{2}$	$\text{ch } \frac{a}{2}$	$\sin \frac{b}{2}$	$a, \text{ нел.}$	$b, \text{ град.}$	$Z_{\text{Пт}}, \text{ ом}$
Пропускания	0	0	—	—	0	—	0	600
	800	0,25	—	—	0,138	—	16	591
	1600	0,5	—	—	0,298	—	35	571
	2400	0,75	—	—	0,523	—	63	546
	3200	1,0	—	1,0	1,0	0	180	∞
Задерживания	3600	1,125	—	1,84	—	2,44	180	$-j 143$
	3810	1,19	∞	∞	—	∞	180	0
	4000	1,25	2,46	—	—	3,27	0	$j 80$
	4800	1,5	1,06	—	—	1,85	0	$j 316$

15.18. Т-образный параллельно-производный ФНЧ типа m имеет следующие параметры элементов (рис. 15.19): $L_{1m} = 30 \text{ мГн}$, $C_{1m} = 0,0625 \text{ мкФ}$, $C_{2m} = 0,083 \text{ мкФ}$. Определить частоту среза и затухание фильтра при частоте 5 кГц.

15.19. Сложный ФНЧ имеет частоту среза $f_c = 3200 \text{ гц}$, его номинальное характеристическое сопротивление $R = 600 \text{ ом}$. Фильтр состоит из звена типа k и звена типа $m = 0,542$, соединенных каскадно на основе согласования характеристических сопротивлений. На входе и выходе фильтра характеристическое сопротивление должно иметь характер $Z_{\text{Пт}}$.

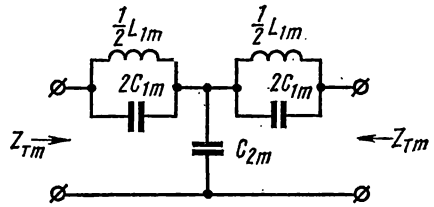


Рис. 15.19

Требуется выбрать и начертить схему фильтра, рассчитать его элементы и построить кривую характеристического затухания в функции частоты f .

Решение. При составлении схемы сложного фильтра, состоящего из двух звеньев, на входе и выходе применяют полузвенья типа m , в середине — звено типа k . Поскольку на входе и выходе фильтра характеристическое сопротивление должно иметь характер $Z_{\text{Пт}}$, согласование звеньев будет производиться на основе равенства характеристических сопротивлений Z_T . Поэтому оконечные полузвенья типа m должны быть последовательно-производными.

Схема, отвечающая изложенным требованиям, изображена на рис. 15.20, а. После упрощений схема фильтра принимает вид рис. 15.20, б. Элементы звеньев рассчитаны в задачах 15.3 и 15.17: $L_1 = 0,06 \text{ гн}$, $C_2 = 0,167 \text{ мкФ}$, $L_{1m} = 0,0325 \text{ гн}$, $L_{2m} = 19,5 \text{ мГн}$, $C_{2m} = 0,09 \text{ мкФ}$.

Параметры элементов сложного фильтра (см. рис. 15.20, б) следующие: $L_2 = 2L_{2m} = 39$ мГн, $L_3 = \frac{L_{1m} + L_1}{2} = 46$ мГн, $C_1 = \frac{C_{2m}}{2} = 0,045$ мкФ, $C_2 = 0,165$ мкФ.

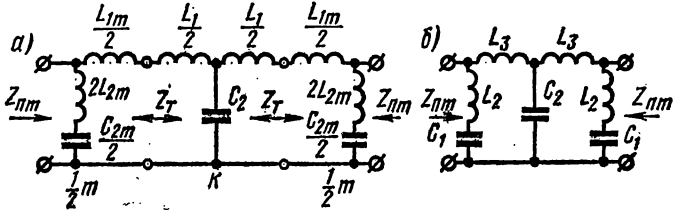


Рис. 15.20

При каскадном соединении звеньев на основе согласования характеристических сопротивлений общее затухание равно сумме затуханий отдельных звеньев: $a = a_m + a_k$. Значения a_k рассчитаны в задаче 15.3, значения a_m — в задаче 15.17. Складывая их, получим зависимость характеристического затухания сложного фильтра от частоты (табл. 15.15).

Таблица 15.15

f , кГц	3,2	3,6	3,81	4,0	4,8	5,6
Ω	1	1,125	1,19	1,25	1,5	1,75
a_k , неп	0	0,99	1,22	1,39	1,92	2,32
a_m , неп	0	2,44	∞	3,27	1,85	1,59
$a = a_k + a_m$, неп	0	3,43	∞	4,66	3,77	3,91

Кривая частотной зависимости характеристического затухания сложного фильтра изображена на рис. 15.21.

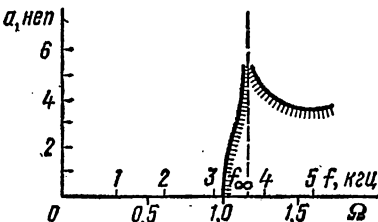


Рис. 15.21

15.20. Определить параметр m и элементы оптимального Г-образного последовательно-производного ФВЧ типа m , характеристическое сопротивление $Z_{Пm}$ которого отклоняется от его номинального значения $R = 600$ ом не более чем на 5% в рабочей области частот от 5600 гц и выше. Чему равна частота среза фильтра?

15.21. ФВЧ задачи 15.11 соединен каскадно с ФВЧ типа m на основе согласования характеристических сопротивлений. Начертить схему сложного симметричного фильтра, имеющего на входе и выходе характеристическое сопротивление фильтра типа m и найти значение характеристического затухания при частоте $f = 0,5 f_c$, если $m = 0,59$.

15.22. Звенья и полузвенья ФНЧ рис. 15.22, а, б и в имеют одинаковую частоту среза и номинальное значение характеристического сопротивления. То же — ФВЧ на рис. 15.22, г, д, е. Под каждым звеном или полузвеном дана величина параметра m . Указать, в каких случаях соединение осуществлено по принципу согласования характеристических сопротивлений.

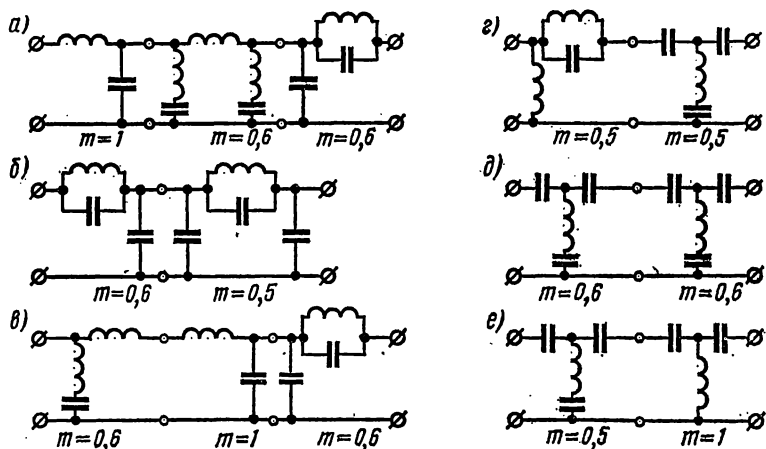


Рис. 15.22

15.23. Полосовой фильтр типа m ($m = 0,59$) соединен каскадно с ПФ задачи 15.14 по принципу согласования характеристических сопротивлений так, что получен симметричный фильтр, имеющий на входе и выходе характеристическое сопротивление фильтра типа m . Начертить схему соединения, рассчитать параметры элементов звена типа m и построить частотные зависимости a, b, Z_{Tm} этого фильтра.

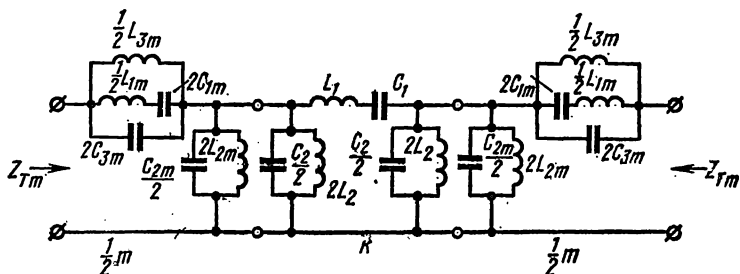


Рис. 15.23

Решение. Схема каскадного соединения фильтров изображена на рис. 15.23. Для получения симметричного фильтра звено типа m разбито на два полузвена. Элементы звена типа k были рассчитаны

в задаче 15.14: $L_1 = 0,06$ гн, $L_2 = 0,84$ мгн; $C_1 = 2,33$ нф, $C_2 = 0,167$ мкф.

Элементы полуженъев типа m рассчитываются по формулам табл. 15.3:

$$L_{1m} = mL_1 = 0,0354 \text{ гн}; L_{2m} = \frac{L_2}{m} = 1,42 \text{ мгн};$$

$$L_{3m} = \frac{4m}{1-m^2} L_2 = 3,05 \text{ мгн};$$

$$C_{1m} = \frac{C_1}{m} = 3,95 \text{ нф};$$

$$C_{3m} = \frac{1-m^2}{4m} C_2 = 0,046 \text{ мкф}.$$

Найдем частоты бесконечного затухания по формулам (15.9 а) с учетом значения Ω из (15.8б):

$$f_{1\infty} = \sqrt{\frac{(f_2 - f_1)^2}{4(1-m^2)} + f_r^2} - \frac{f_2 - f_1}{2\sqrt{1-m^2}} =$$

$$= \sqrt{\frac{(15,2 - 12)^2}{4(1-0,59^2)} + 13,5^2} - \frac{15,2 - 12}{2\sqrt{1-0,59^2}} = 13,68 - 2 = 11,68 \text{ кгц};$$

$$f_{2\infty} = \sqrt{\frac{(f_2 - f_1)^2}{4(1-m^2)} + f_m^2} + \frac{f_2 - f_1}{2\sqrt{1-m^2}} = 13,68 + 2 = 15,68 \text{ кгц}.$$

Уравнения частотных зависимостей a , b приведены в задаче 15.17, формула нормированной частоты Ω — в задаче 15.14. Характеристическое сопротивление Z_{Tm} определяется по формуле (15.7). Расчет характеристик сведен в табл. 15.16.

Таблица 15.16

f , кгц	Ω	$\text{sh} \frac{a}{2}$	$\text{ch} \frac{a}{2}$	$\sin \frac{b}{2}$	a , неп	b , град	Z_{Tm} , ом
0	$-\infty$	0,73	—	—	1,36	0	0
4	-13	0,735	—	—	1,37	0	j 71
8	-4,65	0,745	—	—	1,38	0	j 209
11,68	-1,24	∞	∞	—	∞	-180	∞
12	-1,0	—	1,0	-1,0	0	-180	0
13	-0,316	—	—	-0,193	—	-22	610
13,5	0	—	—	0	—	0	600
14	0,316	—	—	0,193	—	22	610
15,2	1,0	—	1,0	1,0	0	180	0
15,68	1,24	∞	∞	—	∞	180	∞
18	2,46	0,85	—	—	1,54	0	$-j$ 463
20	3,4	0,785	—	—	1,44	0	$-j$ 297

Зависимости a , b , Z_{Tm} от частоты изображены на рис. 15.24.

15.24. Вычертить схему и рассчитать элементы Т-образного параллельно-производного ПФ типа m ($m = 0,59$, $R = 1 \text{ ком}$) с полосой частот от $f_1 = 2,0 \text{ МГц}$ до $f_2 = 2,2 \text{ МГц}$. Вычислить его характеристическое затухание при частоте 1 МГц .

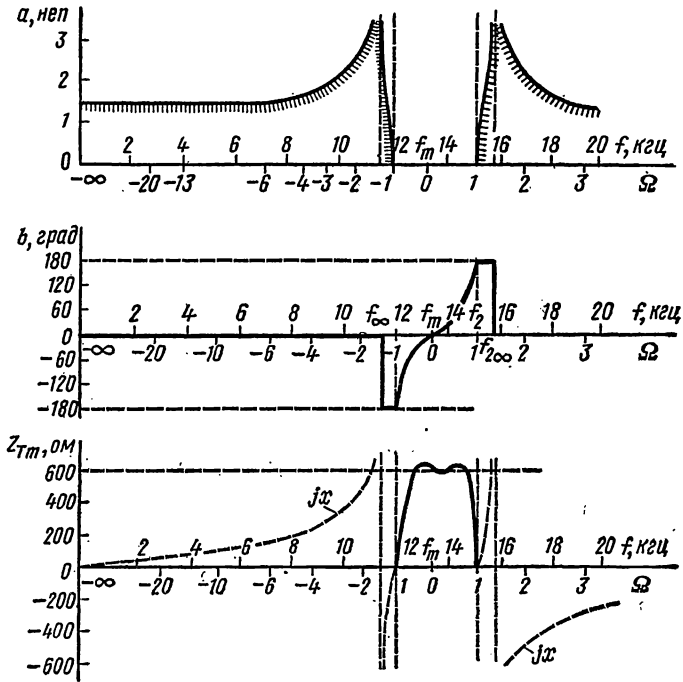


Рис. 15.24

15.25. Составить схему согласованного ПФ, имеющего четыре звена, в том числе: два звена типа k , одно параллельно-производное звено типа m ($m = m_1$), одно последовательно-производное звено типа m ($m = m_2$). Характеристическое сопротивление сложного фильтра со стороны выхода должно иметь характер Z_{Tm} .

15.26. Определить частоты бесконечного затухания и величину характеристического затухания при $f = 15 \text{ кГц}$ П-образного ЗФ типа m ($m = 0,59$, $R = 200 \text{ ком}$) с полосой пропускания от 10 до 20 кГц.

15.27. ФВЧ задачи 15.10 включен для работы между генератором и нагрузкой, сопротивления которых одинаковы и равны $R_r = R_n = 600 \text{ ом}$. Рассчитать и построить кривую рабочего затухания в полосе пропускания и задерживания и входного сопротивления в полосе пропускания.

Решение. Для симметричного фильтра при $Z_{1c} = Z_{2c} = Z_c$

и $R_r = R_H$ используются следующие формулы рабочего затухания: в полосе пропускания

$$a_p = \frac{1}{2} \ln \left| 1 + \frac{1}{4} \left(\frac{|Z_c|}{R_H} - \frac{R_H}{|Z_c|} \right)^2 \sin^2 b \right|,$$

в полосе задерживания

$$a_p = a + \ln \frac{1}{4} \left(\frac{|Z_c|}{R_H} + \frac{R_H}{|Z_c|} \right).$$

Расчет кривой рабочего затухания сведен в табл. 15.17.

Таблица 15.17

f , кГц	a , неп	b , град	$ Z_c $, ом	$\ln \frac{1}{4} \left(\frac{ Z_c }{R_H} + \frac{R_H}{ Z_c } \right)$	$\frac{1}{4} \left(\frac{ Z_c }{R_H} - \frac{R_H}{ Z_c } \right)^2 \sin^2 b$	a_p , неп
0	∞	-180	∞	∞	—	∞
0,8	4,13	-180	2320	0,01	—	4,14
1,6	2,64	-180	1040	-0,548	—	2,092
2,4	1,59	-180	526	-0,683	—	0,907
3,2	0	-180	0	—	0	0
4,0	—	-106	360	—	0,265	0,115
4,8	—	-85	447	—	0,089	0,043
5,6	—	-70	492	—	0,036	0,019
6,4	—	-60	520	—	0,015	0,007

Входное сопротивление определяется по формуле (14.21 а и б). Поскольку в полосе пропускания Z_c является активным сопротивлением (т. е. действительным числом), а $g = jb$,

$$\text{th}(g + n) = \text{th}(n + jb).$$

Гиперболический тангенс комплексного аргумента может быть рассчитан по следующей формуле (см. приложение 3):

$$\text{th}(n + jb) = \frac{\text{sh } 2n}{\text{ch } 2n + \cos 2b} + j \frac{\sin 2b}{\text{ch } 2n + \cos 2b}.$$

Расчет входного сопротивления приведен в табл. 15.18.

Таблица 15.18

f , кГц	Z_c , ом	n	b , град	$\text{sh } 2n$	$\text{ch } 2n$	$\sin 2b$	$\cos 2b$	$ \text{th}(g+n) $	$ Z_{вх} $, ом
3,2	0	0	-180	0	1,0	0	1,0	0	0
3,46	228	0,4	-135	0,888	1,337	1,0	0	1,0	228
4,0	360	0,693	-106	1,87	2,12	0,53	-0,85	1,9	685
4,53	424	0,881	-90	2,73	2,99	0	-1,0	1,37	580
4,8	447	0,965	-84	3,37	3,56	-0,208	-0,98	1,345	602
5,6	492	1,157	-70	4,99	5,09	-0,642	-0,768	1,165	573
6,4	520	1,32	-60	6,97	7,04	-0,867	-0,5	1,071	558

Кривые рабочего затухания и входного сопротивления изображены на рис. 15.25.

15.28. Коэффициент потерь катушек ФНЧ задачи 15.3 равен $d = 0,02$. Рассчитать и построить с учетом потерь частотные характеристики затухания a и фазовой постоянной b для полосы пропускания.

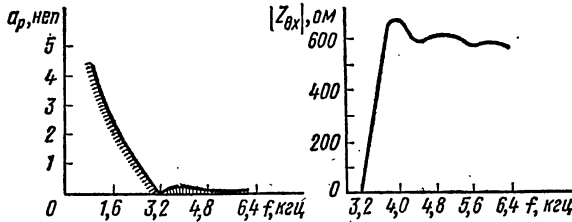


Рис. 15.25

Решение. При учете потерь сопротивление продольного плеча фильтра определяется по формуле (15.10):

$$Z_1 = j\omega L_1(1 - jd).$$

Сопротивление поперечного плеча

$$Z_2 = \frac{1}{j\omega C_2}.$$

Найдем отношение $Z_1/4Z_2$:

$$\frac{Z_1}{4Z_2} = \frac{j\omega L_1(1 - jd)}{4 \frac{1}{j\omega C_2}} = -\frac{\omega^2 L_1 C_2}{4} (1 - jd) = -(1 - jd) \Omega^2,$$

где

$$\Omega = \frac{\omega}{\omega_c}.$$

При учете потерь затухание и фазовая постоянная определяются по формулам (15.11). Расчет частотных характеристик a и b сведен в табл. 15.19.

Таблица 15.19

f , кГц	Ω	$\frac{Z_1}{4Z_2}$	$\frac{Z_1}{4Z_2} + 1$	$\sqrt{\frac{Z_1}{4Z_2} + 1} + \sqrt{\frac{Z_1}{4Z_2} - 1}$	a , неп	b , град
0	0	0	1	1	0	0
0,8	0,25	-0,0625 (1-j0,02)	0,937+j0,00125	$1,0014 e^{j14^\circ 30'}$	0,0028	29
1,6	0,5	-0,25 (1-j0,02)	0,75+j0,005	$1,006 e^{j30^\circ}$	0,012	60
2,4	0,75	-0,562 (1-j0,02)	0,438+j0,0112	$1,012 e^{j48^\circ 30'}$	0,024	97
3,2	1,0	-(1-j0,02)	j0,02	$1,105 e^{j84^\circ 30'}$	0,2	169

Характеристики, построенные по полученным результатам, изображены на рис. 15.26.

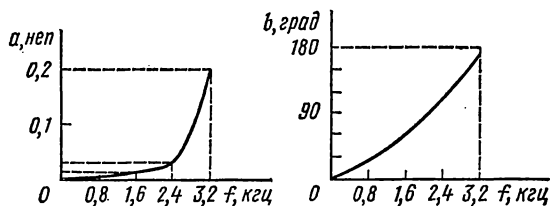


Рис. 15.26

Г. Мостовые фильтры

15.29. Определить, к какому типу по полосе пропускания относится каждая из схем мостовых фильтров, изображенных на рис. 15.27.

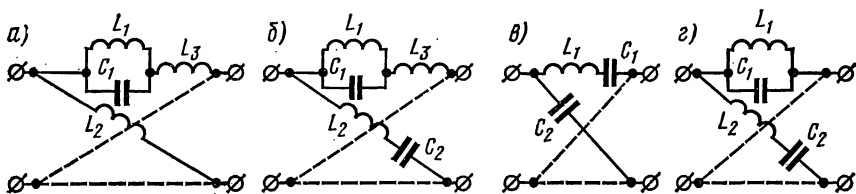


Рис. 15.27

Задачу решить графически анализом сопротивлений продольных и диагональных плеч, воспользовавшись условиями для определения полос пропускания мостовых фильтров. Дополнительно задается: в схеме 15.27, б резонансная частота диагонального плеча совпадает с частотой резонанса токов продольного плеча; в схеме 15.27, г резонансные частоты плеч не совпадают.

Построить качественно кривую характеристического затухания фильтра. Указать, при каких частотах характеристическое затухание фильтра равно бесконечности.

Решение. Рассмотрим схему рис. 15.27, а. Продольное плечо имеет две резонансные частоты, при этом первой является частота ω_2 резонанса токов, так как это плечо имеет путь для постоянного тока, и второй — частота ω_3 резонанса напряжений (см. п. 4 основных положений гл. 13). На рис. 15.28, а нанесены графики сопротивлений продольного плеча Z_1 и диагонального Z_2 в функции ω .

Как известно из теории, в полосе пропускания сопротивления Z_1 и Z_2 должны иметь разные знаки. Эта полоса определяется граничными частотами ω_2 , где $Z_1 = \infty$, и ω_3 , где $Z_1 = 0$ (на рис. 15.28, а) заштрихована. Итак, рассматриваемая схема соответствует полосовому фильтру.

Рассмотрим схему 15.27, б. График сопротивления продольного плеча такой же, как и в предыдущем случае, его резонансные частоты ω_2 и ω_3 . Диагональное плечо имеет одну резонансную частоту. По условию, это ω_2 . Полоса пропускания соответствует разным знакам Z_1 и Z_2 , это область частот от 0 до ω_3 (на рис. 15.28, б эта область заштрихована). Схема соответствует фильтру нижних частот. Разбор схем рис. 15.27, в и 15.27, г рекомендуется сделать самостоятельно.

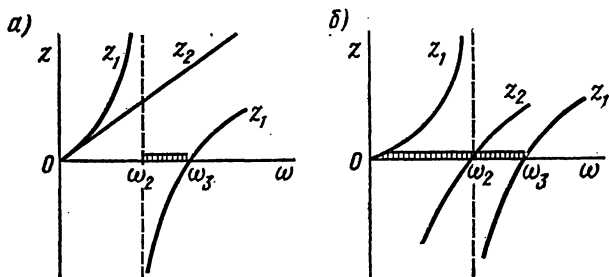


Рис. 15.28

15.30. Мостовой ФНЧ (рис. 15.29) имеет частоту среза $f_c = 3,2$ кГц, частоту пика затухания $f_\infty = 4$ кГц, при которой $Z_1 = Z_2 = 400$ ом. Определить значение элементов фильтра L_1, L_2, C_2 . Рассчитать характеристическое затухание фильтра при нормированных частотах $\Omega = 1,25; 1,5; 2$ и построить частотную характеристику. Рассчитать характеристическое сопротивление и фазовую постоянную при следующих значениях нормированной частоты: $\Omega = 0,9; 0,75; 0,5; 0$ и построить их характеристики. На какие характеристики и какое влияние окажет взаимная замена местами продольного и диагонального плеч?

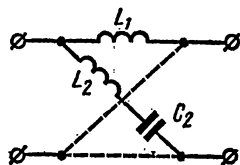


Рис. 15.29

Решение. Сопротивления продольного и диагонального плеч фильтра определяются по формулам:

$$Z_1 = j\omega L_1; \quad Z_2 = j \frac{L_2}{\omega} (\omega^2 - \omega_c^2).$$

Зная значения $z_1 = z_2$ при частоте f_∞ , получим:

$$L_1 = \frac{z_1}{\omega_\infty} = \frac{400}{2\pi \cdot 4 \cdot 10^3} = 0,016 \text{ гн};$$

$$L_2 = \frac{\omega_\infty z_2}{\omega_\infty^2 - \omega_c^2} = \frac{2\pi \cdot 4 \cdot 10^3 \cdot 400}{4\pi^2 (4^2 - 3,2^2) 10^6} = 0,044 \text{ гн}.$$

Для определения емкости C_2 используем формулу частоты среза

$$\omega_c = \frac{1}{\sqrt{L_2 C_2}}$$

Отсюда

$$C_2 = \frac{1}{L_2 \omega_c^2} = \frac{1}{0,044 \cdot 4\pi^2 \cdot 3,2^2 \cdot 10^8} = 0,0564 \text{ мкф.}$$

Характеристические затухание, сопротивление и коэффициент фазы (в полосе пропускания) фильтра определяются по формулам, которые получаются из формулы (15.12) и табл. 15.5:

$$a = 2 \operatorname{arth} \left| \frac{m\Omega}{\sqrt{1-\Omega^2}} \right|, \text{ где } m = \sqrt{\frac{L_1}{L_2}} = \sqrt{\frac{0,016}{0,044}} = 0,6;$$

$$Z_M = R \sqrt{1-\Omega^2}, \text{ где } R = \sqrt{\frac{L_1}{C_2}} = \sqrt{\frac{0,0159}{0,0564 \cdot 10^{-8}}} = 530 \text{ ом;}$$

$$b = 2 \operatorname{arctg} \frac{m\Omega}{\sqrt{1-\Omega^2}}.$$

Расчет характеристик приведен в табл. 15.20.

Таблица 15.20

Ω	$\left \frac{m\Omega}{\sqrt{1-\Omega^2}} \right $	$\operatorname{th} \frac{a}{2}$	$\operatorname{tg} \frac{b}{2}$	$a, \text{ неп}$	$b, \text{ град}$	$Z_M, \text{ ом}$
0	0	—	0	—	0	530
0,5	0,347	—	0,347	—	38	459
0,75	0,689	—	0,689	—	69	350
0,9	1,24	—	1,24	—	102	231
1,0	∞	—	∞	—	180	0
1,25	1,0	1,0	—	∞	180	j 396
1,5	0,805	0,805	—	2,23	0	j 594
2,0	0,695	0,695	—	1,72	0	j 920

Кривые частотных зависимостей a, b, Z_M изображены на рис. 15.30.

Если в схеме рис. 15.29 элементы Z_1 и Z_2 поменять местами, то частотные характеристики a и Z_M не изменятся, а фазовая постоянная изменится на π .

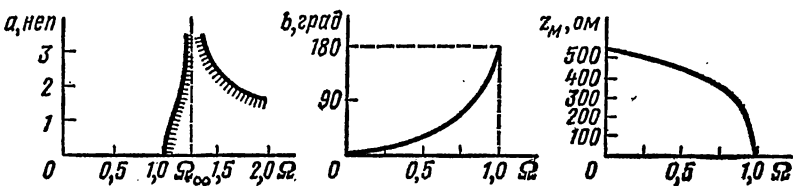


Рис. 15.30

15.31. Параметры полосуемого фильтра (см. рис. 15.27, а): $L_1 = 0,02 \text{ гн}$, $C_1 = 8,8 \text{ нф}$, $L_3 = 0,0326 \text{ гн}$, $L_2 = 0,06 \text{ гн}$.

Найти частоты среза и выяснить, имеет ли фильтр полюс затухания, и если имеет, то найти его. Вычислить затухание при $\omega' = 5 \cdot 10^4 \text{ сек}^{-1}$, $\omega'' = 12 \cdot 10^4 \text{ сек}^{-1}$ и построить качественно график затухания в функции частоты. Определить характеристическую фазу b при $\omega''' = 8 \times 10^4 \text{ сек}^{-1}$, $\omega'''' = 9 \cdot 10^4 \text{ сек}^{-1}$ и построить качественно ее график. Составить уравнение характеристического сопротивления и построить (качественно) его график.

Решение. Сопротивление продольного плеча фильтра выражается формулой

$$Z_1 = j\omega L_3 \frac{\omega_3^2 - \omega^2}{\omega_2^2 - \omega^2},$$

где

$$\omega_2 = \frac{1}{\sqrt{L_1 C_1}}, \quad \omega_3 = \sqrt{\omega_2^2 + \frac{1}{L_3 C_1}}.$$

Как видно из рис. 15.28, а, частоты среза соответствуют значениям $Z_1 = \infty$ и $Z_1 = 0$. В соответствии с этим получим:

$$\omega_2 = \frac{1}{\sqrt{L_1 C_1}} = 7,52 \cdot 10^4 \text{ сек}^{-1}; \quad f_2 = 12 \text{ кГц};$$

$$\omega_3 = \sqrt{\omega_2^2 + \frac{1}{L_3 C_1}} = 9,55 \cdot 10^4 \text{ сек}^{-1}, \quad f_3 = 15,2 \text{ кГц}.$$

Для выяснения существования полюса затухания используем условие $Z_1 = Z_2$:

$$j\omega L_3 \frac{\omega_3^2 - \omega^2}{\omega_2^2 - \omega^2} = j\omega L_2.$$

После преобразований этого уравнения получим:

$$\omega_\infty = \sqrt{\frac{\frac{L_2}{L_3} \omega_2^2 - \omega_3^2}{\frac{L_2}{L_3} - 1}} = 3,86 \cdot 10^4 \text{ сек}^{-1}; \quad f_\infty = 6,15 \text{ кГц}.$$

Характеристическое затухание фильтра определяется из формулы (см. табл. 15.5)

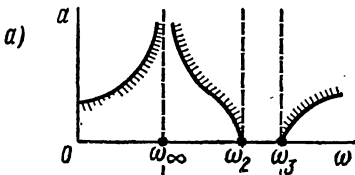
$$\left. \begin{array}{l} \text{при } z_1 < z_2 \quad \text{th } \frac{a}{2} \\ \text{при } z_1 > z_2 \quad \text{cth } \frac{a}{2} \end{array} \right\} = \sqrt{\left| \frac{z_1}{z_2} \right|} = \sqrt{\frac{L_3}{L_2} \left| \frac{\omega_3^2 - \omega^2}{\omega_2^2 - \omega^2} \right|}.$$

Рассчитаем характеристическое затухание фильтра при частотах ω' и ω'' :

при $\omega = \omega' = 5 \cdot 10^4 \text{сек}^{-1}$ ($z_1 > z_2$)

$$\text{cth} \frac{a}{2} = \sqrt{\frac{0,0326}{0,06} \left| \frac{9,55^2 - 5^2}{7,52^2 - 5^2} \right|} = 1,075;$$

$$\text{th} \frac{a}{2} = \frac{1}{1,075} = 0,932, \quad \frac{a}{2} = \text{arth} 0,932 = 1,675, \quad a = 3,35 \text{ nep};$$



при $\omega = \omega'' = 12 \cdot 10^4 \text{сек}^{-1}$ ($z_1 < z_2$)

$$\text{th} \frac{a}{2} = 0,57; \quad a = 1,29 \text{ nep.}$$

Частотный график характеристического затухания качественно построен на рис. 15.31, а. Характеристическая фаза b в области пропускания определяется по формуле табл. 15.5:

$$\text{tg} \frac{b}{2} = \sqrt{\left| \frac{Z_1}{Z_2} \right|}.$$

Рассчитаем значения b для частот ω''' и ω'''' :

при $\omega = \omega''' = 8 \cdot 10^4 \text{сек}^{-1}$

$$\text{tg} \frac{b}{2} = \sqrt{\frac{0,0326}{0,06} \left| \frac{9,55^2 - 8^2}{7,52^2 - 8^2} \right|} = 1,425;$$

$$\frac{b}{2} = \text{arc tg} 1,425 = 55^\circ; \quad b = 110^\circ;$$

при $\omega = \omega'''' = 9 \cdot 10^4 \text{сек}^{-1}$

$$\text{tg} \frac{b}{2} = 0,484; \quad b = 52^\circ.$$

Частотная кривая фазовой постоянной качественно построена на рис. 15.31, б.

Уравнение характеристического сопротивления фильтра имеет вид

$$Z_M = \sqrt{Z_1 Z_2} = \sqrt{-\omega^2 L_1 L_4 \frac{\omega_3^2 - \omega^2}{\omega_2^2 - \omega^2}}.$$

Качественное построение частотной характеристики Z_M показано на рис. 15.31, в.

15.32. Фильтры рис. 15.27, б, в и г имеют параметры:

в схеме б: $L_1 = 0,02 \text{ гн}$, $C_1 = 8,8 \text{ нф}$, $L_2 = 0,04 \text{ гн}$, $L_3 = 0,0326 \text{ гн}$,

$C_2 = 4,4 \text{ нф}$;

в схеме в: $L_1 = 0,02 \text{ гн}$, $C_1 = 4 \text{ нф}$, $C_2 = 8,8 \text{ нф}$;

в схеме г: $L_1 = 0,02 \text{ гн}$, $C_1 = 8,8 \text{ нф}$, $L_2 = 0,02 \text{ гн}$, $C_2 = 4,4 \text{ нф}$.

Для каждого из них найти частоты среза, частоту полюса затухания (там, где он имеется) и затухание при $\omega' = 10^5 \text{ сек}^{-1}$.

Построить (качественно) графики затухания в функции частоты. Составить уравнения характеристических сопротивлений и построить (качественно) их графики.

Решение. 1. Рассмотрим схему рис. 15.27, б; она, как это установлено в решении задачи 15.29, соответствует схеме ФНЧ.

Частота среза фильтра определяется из условия

$$Z_1 = j\omega L_3 \frac{\omega_3^2 - \omega^2}{\omega_2^2 - \omega^2} = 0,$$

где

$$\omega_2 = \frac{1}{\sqrt{L_1 C_1}} = 7,52 \cdot 10^4 \text{ сек}^{-1}, \quad \omega_3 = \sqrt{\omega_2^2 + \frac{1}{L_3 C_1}} = 9,55 \cdot 10^4 \text{ сек}^{-1}.$$

Отсюда

$$\omega_c = \omega_3 = 9,55 \cdot 10^4 \text{ сек}^{-1}.$$

Для выяснения существования полюса затухания рассмотрим условие $Z_1 = Z_2$:

$$j\omega L_3 \frac{\omega_3^2 - \omega^2}{\omega_2^2 - \omega^2} = \frac{L_2}{j\omega} (\omega_1^2 - \omega^2),$$

где

$$\omega_1 = \frac{1}{\sqrt{L_2 C_2}} = 7,52 \cdot 10^4 = \omega_2.$$

Преобразуем последнее уравнение и, подставляя числовые значения, получим

$$\omega^4 - 2,09 \cdot 10^{10} \omega^2 + 1,73 \cdot 10^{20} = 0.$$

Корни последнего уравнения — комплексные. Следовательно, схема рис. 15.27, б не имеет полюса затухания.

Характеристическое затухание фильтра при частоте ω' (где $z_2 > z_1$) можно найти из формулы (см. табл. 15.5)

$$\begin{aligned} \text{th} \frac{a}{2} &= \sqrt{\left| \frac{Z_1}{Z_2} \right|} = \sqrt{\left| \frac{j\omega L_3 \frac{\omega_3^2 - \omega^2}{\omega_2^2 - \omega^2}}{\frac{L_2}{j\omega} (\omega_2^2 - \omega^2)} \right|} = \\ &= \sqrt{\left| -\omega^2 \frac{L_3}{L_2} \cdot \frac{\omega_3^2 - \omega^2}{(\omega_2^2 - \omega^2)^2} \right|}. \end{aligned}$$

Подставляя числовые значения, получим:

$$\operatorname{th} \frac{a}{2} = 0,608; a = 1,41 \text{ nep.}$$

Составим уравнение характеристического сопротивления:

$$\begin{aligned} Z_M &= \sqrt{Z_1 Z_2} = \sqrt{j\omega L_3 \frac{\omega_3^2 - \omega^2}{\omega_2^2 - \omega^2} \cdot \frac{L_2}{j\omega} (\omega_2^2 - \omega^2)} = \\ &= \sqrt{L_2 L_3 (\omega_3^2 - \omega^2)}. \end{aligned}$$

Частотные характеристики a и Z_M , построенные качественно, изображены на рис. 15.32.

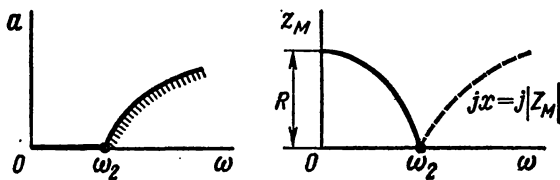


Рис. 15.32

2. Рассмотрим схему рис. 15.27, в. Она соответствует схеме ФНЧ. Определим частоту среза, используя условие $Z_1 = 0$:

$$Z_1 = j\omega L_1 - j \frac{1}{\omega C_1} = j \frac{L_1}{\omega} (\omega^2 - \omega_1^2) = 0, \text{ где } \omega_1 = \frac{1}{\sqrt{L_1 C_1}}.$$

Отсюда $\omega_c = \omega_1 = 1,12 \cdot 10^5 \text{ сек}^{-1}$.

Найдем частоту полюса затухания:

$$Z_1 = Z_2 \text{ или } j \frac{L_1}{\omega} (\omega^2 - \omega_1^2) = -j \frac{1}{\omega C_2};$$

$$L_1 C_2 (\omega^2 - \omega_1^2) = 1; \omega^2 - \omega_1^2 = \frac{1}{L_1 C_2};$$

$$\omega_\infty = \sqrt{\omega_1^2 + \frac{1}{L_1 C_2}} = 0,825 \cdot 10^5 \text{ сек}^{-1}.$$

При $z_1 > z_2$ затухание фильтра определяется из уравнения

$$\operatorname{th} \frac{a}{2} = \sqrt{\left| \frac{Z_1}{Z_2} \right|} = \sqrt{\left| \frac{j \frac{L_1}{\omega} (\omega^2 - \omega_1^2)}{-j \frac{1}{\omega C_2}} \right|} = \sqrt{|-L_1 C_2 (\omega^2 - \omega_1^2)|}.$$

По этой формуле найдем затухание при $\omega' = 10^5 \text{ сек}^{-1}$, $a = 1,6 \text{ неп.}$
Составим уравнение характеристического сопротивления:

$$Z_M = \sqrt{Z_1 Z_2} = \sqrt{j \frac{L_1}{\omega} (\omega^2 - \omega_1^2) \frac{1}{j\omega C_2}} = \sqrt{\frac{L_1}{C_2} \left(1 - \frac{\omega_1^2}{\omega^2}\right)}.$$

Частотные характеристики a и Z_M , построенные качественно, изображены на рис. 15.33.

3. Схема рис. 15.27, z соответствует заграждающему фильтру. Сопротивление продольного и диагонального плечей определяются по формулам:

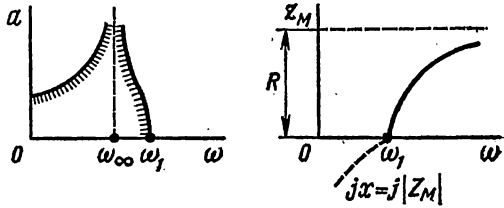


Рис. 15.33

$$Z_1 = \frac{j\omega}{C_1 (\omega_2^2 - \omega^2)}, \text{ где } \omega_2 = \frac{1}{\sqrt{L_1 C_1}} = 0,79 \cdot 10^5 \text{ сек}^{-1};$$

$$Z_2 = \frac{L_2}{j\omega} (\omega_1^2 - \omega^2), \text{ где } \omega_1 = \frac{1}{\sqrt{L_2 C_2}} = 1,12 \cdot 10^5 \text{ сек}^{-1}.$$

Частоты ω_1 и ω_2 являются частотами среза. Найдем частоту полюса затухания из условия $Z_1 = Z_2$:

$$\frac{j\omega}{C_1 (\omega_2^2 - \omega^2)} = \frac{L_2}{j\omega} (\omega_1^2 - \omega^2).$$

Отсюда после подстановки числовых значений получим

$$\omega^4 - 1,306 \cdot 10^{10} \omega^2 + 0,886 \cdot 10^{20} = 0.$$

Корни полученного уравнения являются комплексными. Значит, схема рис. 15.27, z не имеет полюса затухания. Те же результаты можно получить, если построить графики изменения Z_1 и Z_2 в функции частоты, из которых можно видеть, что они не пересекаются. При частоте $\omega' = 10^5 \text{ сек}^{-1}$ имеет место соотношение $z_1 > z_2$. Поэтому для определения затухания используем формулу

$$\begin{aligned} \text{cth } \frac{a}{2} &= \sqrt{\left| \frac{Z_1}{Z_2} \right|} = \sqrt{\left| \frac{j\omega}{C_1 (\omega_1^2 - \omega^2)} \cdot \frac{j\omega}{L_2 (\omega_2^2 - \omega^2)} \right|} = \\ &= \sqrt{\left| \frac{-\omega^2}{L_2 C_1 (\omega_1^2 - \omega^2) (\omega_2^2 - \omega^2)} \right|}. \end{aligned}$$

Подставив числовые значения, получим:

$$\text{cth } \frac{a}{2} = 2,46; \quad a = 0,86 \text{ неп.}$$

Составим уравнение характеристического сопротивления:

$$Z_M = \sqrt{Z_1 Z_2} = \sqrt{\frac{L_2}{C_1} \cdot \frac{\omega_1^2 - \omega^2}{\omega_2^2 - \omega^2}}$$

Качественное построение частотных характеристик a и Z_M показано на рис. 15.34.

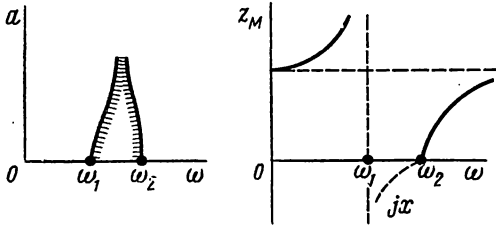


Рис. 15.34

и определить его значения a' и a'' при $\omega' = 8,2 \cdot 10^4 \text{ сек}^{-1}$ и $\omega'' = 8,7 \cdot 10^4 \text{ сек}^{-1}$.

15.33 Продольные плечи мостового ФНЧ (см. рис. 15.27, б) имеют резонансные частоты $\omega_2 = \omega_{2c} = 6 \cdot 10^4 \text{ сек}^{-1}$, $\omega_3 = \omega_{3c} = 8 \cdot 10^4 \text{ сек}^{-1}$, а диагональные плечи $\omega_2 = \omega_{2c} = 6 \times 10^4 \text{ сек}^{-1}$. Известны $L_3 = 0,04 \text{ гн}$, $L_2 = 0,02 \text{ гн}$. Вывести формулу затухания

Д. Задачи на различные темы, не рассмотренные в предыдущих пунктах

15.34. Определить элементы мостового и дифференциально-мостового фильтров, эквивалентных П-образному последовательно-производному ФНЧ типа m с элементами $C_{1m} = 0,1 \text{ мкф}$, $2L_{2m} = 50 \text{ мгн}$, $C_{2m}/2 = 0,12 \text{ мкф}$ (рис. 15.35, а).

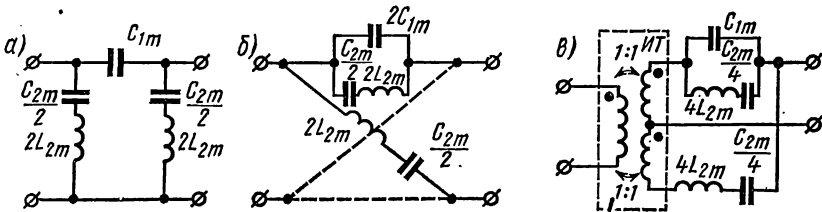


Рис. 15.35

Решение. Сопротивление одного плеча эквивалентного мостового фильтра должно совпадать с сопротивлением поперечного плеча П-образного фильтра типа m [см. формулу (15.13)]:

$$Z_{2m} = 2Z_{2П} = 2j\omega L_{2m} + \frac{2}{j\omega C_{2m}}$$

Сопротивление другого плеча мостового фильтра определяется

по формуле (15.13):

$$Z_{1M} = \frac{Z_{1П}}{2} = \frac{2Z_{1П} Z_{2П}}{Z_{1П} + 4Z_{2П}} = \frac{Z_{1П} Z_{2П}}{\frac{1}{2} Z_{1П} + 2Z_{2П}}.$$

Таким образом, продольное плечо мостового фильтра должно содержать две параллельные ветви с сопротивлениями $2Z_{2П}$ и $\frac{1}{2} Z_{1П}$. Соответствующая схема искомого мостового фильтра изображена на рис. 15.35, б. Ее элементы: $2C_{1m} = 0,2 \text{ мкф}$, $C_{2m}/2 = 0,12 \text{ мкф}$, $2L_{2m} = 50 \text{ мГн}$.

Сопротивления плеч дифференциально-мостового фильтра (см. рис. 15.5):

$$2Z_{2m} = 4Z_{2П} = 4j\omega L_{2m} + \frac{4}{j\omega C_{2m}};$$

$$2Z_{1m} = \frac{Z_{1П} 4Z_{2П}}{Z_{1П} + 4Z_{2П}}.$$

Последнее сопротивление составлено из двух параллельных ветвей:

$$4Z_{2П} = 2Z_{2m} \text{ и } Z_{1П} = \frac{1}{j\omega C_{1m}}.$$

Схема дифференциально-мостового фильтра показана на рис. 15.35, в. Ее элементы: $C_{1m} = 0,1 \text{ мкф}$, $4L_{2m} = 100 \text{ мГн}$, $C_{2m} = 0,06 \text{ мкф}$.

15.35. Вычертить схему и определить элементы мостового фильтра, эквивалентного Т-образному последовательно-производному ФНЧ типа m с параметрами $m = 1,27$, $R = 1 \text{ ком}$, $f_c = 10 \text{ кГц}$.

Решение. Схема последовательно-производного ФНЧ типа m изображена на рис. 15.36, а. Для расчета его элементов определим по формулам табл. 15.2 элементы прототипа — ФНЧ типа k : $L_1 = 31,8 \text{ мГн}$,

$C_2 = 0,0318 \text{ мкф}$. Расчет элементов фильтра типа m произведем по формулам для ФНЧ табл. 15.3:

$$\frac{L_{1m}}{2} = \frac{mL_1}{2} = 20,2 \text{ мГн}; \quad L_{2m} = \frac{1-m^2}{4m} L_1 = -3,85 \text{ мГн};$$

$$C_{2m} = mC_2 = 40,4 \text{ нф}.$$

Отрицательное значение L_{2m} , получающееся всегда при $m > 1$, имеет в данном случае только расчетное значение. Такое значение может быть физически реализовано при наличии индуктивной связи между продольными и поперечными плечами фильтра. Для определе-

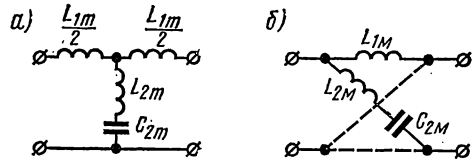


Рис. 15.36

ния элементов эквивалентного мостового фильтра используем формулы (15.13):

$$Z_{1M} = \frac{Z_1}{2} = j \frac{\omega L_{1m}}{2};$$

$$Z_{2M} = 2Z_{2T} + \frac{Z_{1T}}{2} = 2j\omega L_{2m} + \frac{2}{j\omega C_{2m}} + j\omega \frac{L_{1m}}{2} = j\omega \left(2L_{2m} + \frac{L_{1m}}{2} \right) + \frac{2}{j\omega C_{2m}}.$$

Отсюда получим параметры элементов мостового фильтра:

$$L_{1M} = \frac{L_{1m}}{2} = 20,2 \text{ мГн};$$

$$L_{2M} = 2L_{2m} + \frac{L_{1m}}{2} = -7,7 + 20,2 = 12,5 \text{ мГн};$$

$$C_{2M} = \frac{C_{2m}}{2} = 0,0202 \text{ мкФ}.$$

Схема мостового фильтра изображена на рис. 15.36, б.

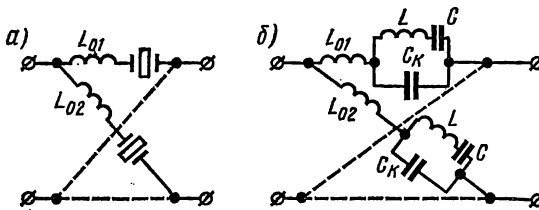


Рис. 15.37

15.36. Вычертить схему и определить элементы мостового фильтра, эквивалентного П-образному параллельно-производному ФНЧ типа m с параметрами $m = 1,27$, $R = 1 \text{ ком}$, $f_c = 10 \text{ кГц}$.

15.37. Мостовой ПФ (рис. 15.37, а) собран из расширительных катушек с индуктивностями $L_{01} = 2 \text{ мГн}$ и $L_{02} = 1 \text{ мГн}$ и кварцевых пластин длиной $l_m = 41,3 \text{ мм}$, шириной $l_0 = 20,38 \text{ мм}$, толщиной $l_l = 0,5 \text{ мм}$.

Составить эквивалентную схему фильтра, построить (качественно) частотные характеристики сопротивлений плеч фильтра и рассчитать частоты среза.

Решение. Эквивалентная схема фильтра изображена на рис. 15.37, б. Параметры элементов этой схемы рассчитываются по формулам:

$$L = k_L \frac{l_m l_l}{l_0}; \quad C = k_C \frac{l_m l_0}{l_l}; \quad C_k = kC,$$

где k , k_C , k_L — коэффициенты, зависящие от электрических и пьезоэлектрических свойств кварца. Для кварцевых пластинок, имеющих отношение $l_0/l_m \approx 0,5$, эти коэффициенты имеют следующие значения:

$$k_L = 14,5 \text{ эН/мм}, k_C = 2,7 \cdot 10^{-4} \text{ нФ/мм}, k = 125.$$

Рассчитаем параметры эквивалентной схемы кварцевой пластины:

$$L = 14,5 \frac{41,3 \cdot 0,5}{20,38} = 14,7 \text{ эН};$$

$$C = 2,7 \cdot 10^{-4} \frac{41,3 \cdot 20,38}{0,5} = 0,455 \text{ нФ};$$

$$C_k = 125 \cdot 0,455 = 61,4 \text{ нФ}.$$

Формулы сопротивлений плеч фильтра имеют вид:

$$Z(j\omega) = \frac{L_0}{j\omega} \frac{(\omega_1^2 - \omega^2)(\omega_3^2 - \omega^2)}{\omega_2^2 - \omega^2},$$

где

$$\omega_2^2 = \frac{1}{L \frac{CC_k}{C + C_k}};$$

$$\omega_1^2 = \frac{1}{2} \left[\left(\omega_2^2 + \frac{1}{C_k L_0} - \sqrt{\left(\omega_2^2 + \frac{1}{C_k L_0} \right)^2 - \frac{4}{CC_k L L_0}} \right) \right]; \quad (1)$$

$$\omega_3^2 = \frac{1}{2} \left[\omega_2^2 + \frac{1}{C_k L_0} + \sqrt{\left(\omega_2^2 + \frac{1}{C_k L_0} \right)^2 - \frac{4}{CC_k L L_0}} \right]. \quad (2)$$

Найдем резонансные частоты:

а) частота резонанса токов обоих плеч:

$$\omega_2^2 = \frac{1}{L \frac{CC_k}{C + C_k}} = 15,3 \cdot 10^{10} \text{ сек}^{-2}; \quad \omega_2 = 3,91 \cdot 10^5 \text{ сек}^{-1};$$

б) частоты резонанса напряжений продольного плеча [см. формулы (1) и (2)]:

$$\omega_{1П}^2 = 0,755 \cdot 10^{10} \text{ сек}^{-2}; \quad \omega_{1П} = 0,87 \cdot 10^5 \text{ сек}^{-1}.$$

$$\omega_{3П}^2 = 15,36 \cdot 10^{10} \text{ сек}^{-2}; \quad \omega_{3П} = 3,92 \cdot 10^5 \text{ сек}^{-1};$$

в) частоты резонанса напряжений диагонального плеча:

$$\omega_{1д}^2 = \frac{1}{2} \left[\omega_2^2 + \frac{1}{C_k L_{02}} - \sqrt{\left(\omega_2^2 + \frac{1}{C_k L_{02}} \right)^2 - \frac{4}{CC_k L L_{02}}} \right] =$$

$$= 1,59 \cdot 10^{10} \text{ сек}^{-2}; \quad \omega_{1д} = 1,26 \cdot 10^5 \text{ сек}^{-1}; \quad \omega_{3д}^2 = 15,34 \cdot 10^{10} \text{ сек}^{-2};$$

$$\omega_{3д} = 3,916 \cdot 10^5 \text{ сек}^{-1}.$$

Частотные характеристики сопротивлений плеч качественно построены на рис. 15.38.

Как известно, в полосе пропускания сопротивления плеч фильтра должны иметь разные знаки. Следовательно, рассматриваемый фильтр имеет две полосы пропускания, которые на рис. 15.38 выделены штриховой линией. Частотами среза являются частоты резонанса напряжения: $\omega_{1п}$ и $\omega_{1д}$ — для первой полосы, $\omega_{3д}$ и $\omega_{3п}$ — для второй полосы пропускания.

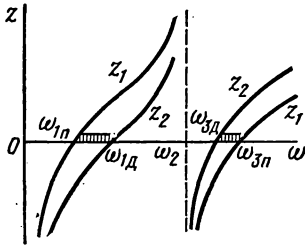


Рис. 15.38

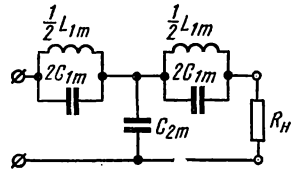


Рис. 15.39

15.38. Т-образный параллельно-производный ФНЧ типа m (рис. 15.39), имеющий частоту среза $f_c = 3,2$ кГц, используется при коэффициенте нагрузки $\epsilon = R/R_H = 0,94$. Определить оптимальное значение коэффициента m и верхнюю границу эффективно передаваемой полосы частот.

Решение. Из теории известно, что в пределах эффективно передаваемой полосы частот оптимальную нагрузку надо выбирать из следующего условия:

$$R_H = \sqrt{Z_c(0)Z_{c \max}}.$$

Характеристическое сопротивление $Z_c = Z_{Tm}$ Т-образного ФНЧ типа m определяется по формуле (15.7). Рассматривая эту функцию при $\Omega = 0$ и исследуя ее на максимум, получим:

$$Z_c(0) = R; \quad Z_{c \max} = \frac{R}{2m\sqrt{1-m^2}}.$$

Отсюда

$$R_H = \sqrt{Z_c(0)Z_{c \max}} = \frac{R}{\sqrt{2m\sqrt{1-m^2}}}.$$

Подставляя значение R_H в выражение коэффициента нагрузки получим

$$\epsilon = \frac{R}{R_H} = \sqrt{2m\sqrt{1-m^2}} \quad \text{или} \quad 4m^2(1-m^2) = \epsilon^4$$

Решая последнее уравнение, найдем оптимальную величину m рассматриваемого фильтра:

$$m_1 = 0,855; \quad m_2 = 0,515.$$

Для определения значения нормированной частоты Ω_2 , соответствующей верхней границе эффективно передаваемой полосы частот, используем равенство $Z_c(\Omega_2) = R$:

$$\frac{R \sqrt{1 - \Omega_2^2}}{1 - (1 - m^2) \Omega_2^2} = R.$$

Отсюда находим

$$\Omega_2 = \frac{\sqrt{1 - 2m^2}}{1 - m^2}.$$

Подстановка в полученную формулу значения m_1 дает результат в виде мнимого числа. Это значит, что при $m = m_1$ не может быть обеспечено использование фильтра с заданным коэффициентом нагрузки. Подставляя в формулу значение m_2 , получим $\Omega_2 = 0,932$. Найдем верхнюю границу эффективно передаваемой полосы частот:

$$f_2 = f_c \Omega_2 = 3,2 \cdot 0,932 = 2,98 \text{ кГц.}$$

15.39. П-образный последовательно-производный ФНЧ типа m (рис. 15.40) имеет частоту среза $f_c = 3,2 \text{ кГц}$. Его коэффициент нагрузки $\varepsilon = R_H/R = 0,94$. Определить верхнюю границу эффективно передаваемой полосы частот.

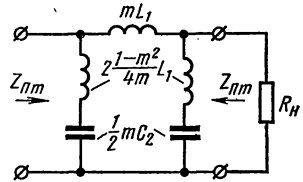


Рис. 15.40

Глава шестнадцатая

КОРРЕКТИРУЮЩИЕ ЦЕПИ

Основные положения и соотношения*

Сигналы, проходящие по линии и аппаратуре, претерпевают амплитудно- и фазочастотные искажения. Для уменьшения этих искажений часто используются пассивные четырехполюсники — корректирующие устройства, которые включаются каскадно с рабочей цепью.

1. **Амплитудные корректоры** применяются для уменьшения амплитудных искажений. Наиболее часто амплитудное корректирование заключается в таком подборе схемы и элементов корректирующего устройства (рис. 16.1, а), чтобы в некотором диапазоне частот от f_1 до f_2 сумма рабочего затухания цепи $a_{p.ц}$ и корректора a_k была постоянной величиной (рис. 16.1, б), т. е.

$$a_{об} = a_{p.ц} + a_k = \text{const.} \quad (16.1)$$

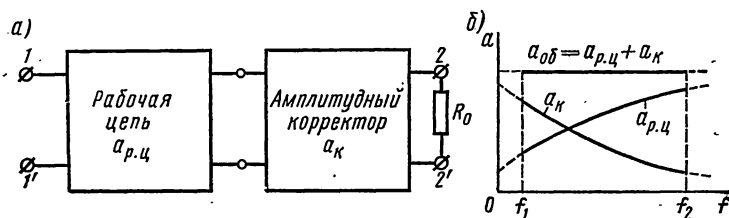


Рис. 16.1

В качестве амплитудных корректоров получили широкое применение Т-образно-мостовые и Г-образные четырехполюсники (рис. 16.2, а, б и в), имеющие постоянное, не зависящее от частоты входное сопротивление R_0 , равное активному сопротивлению нагрузки $R_H = R_0$. Для указанных четырехполюсников это имеет место, когда комплексные сопротивления Z_1 и Z_2 взаимно обратны, т. е.

$$Z_1 Z_2 = R_0^2. \quad (16.2)$$

Иногда в качестве простейшего корректирующего устройства используется последовательный контур с сопротивлением $2Z_1$ (рис. 16.2, з) или параллельный — с сопротивлением $1/2Z_2$ (рис. 16.2, д).

* Выводы формул, приводимых в этой главе, можно найти, например, в [10].

Схема рис. 16.2, а дает согласование со стороны входа и выхода корректора, схемы рис. 16.2, б и в дают согласование только с одной стороны, а схемы рис. 16.2, г и д не дают согласования ни с одной стороны. Согласование с обеих сторон обеспечивает также мостовая схема корректора рис. 16.2, е.

Как правило, каждый из пассивных двухполюсников корректора (рис. 16.2, а—е) Z_1 и Z_2 содержит один активный и реактивные элементы.

При нагрузке четырехполюсников рис. 16.2, а—е на сопротивление $R_H = R_0$ постоянная передачи корректора

$$g_k = \ln \left(1 + \frac{Z_1}{R_0} \right). \quad (16.3)$$

Важными в практике являются схемы корректоров, у которых Z_1 состоит из параллельно соединенных активного сопротивления r_1 и реактивного x_1 и, следовательно, в соответствии с формулой (16.2) Z_2 — из последовательных активного r_2 и реактивного x_2 (на рис. 16.3, а—в приведены схемы, соответствующие корректорам рис. 16.2, а—г). В этом случае рабочее затухание корректора

$$a_k = \frac{1}{2} \ln \frac{\left(1 + \frac{r_1}{R_0} \right)^2 + \left(\frac{r_1}{x_1} \right)^2}{1 + \left(\frac{r_1}{x_1} \right)^2}, \quad (16.4)$$

где x_1 — алгебраическая величина, которая в зависимости от частоты плавно изменяется и может принимать как положительные, так и отрицательные значения, т. е. она может иметь индуктивный или емкостный характер.

На рис. 16.4 приведены кривые зависимостей затухания a_k в функ-

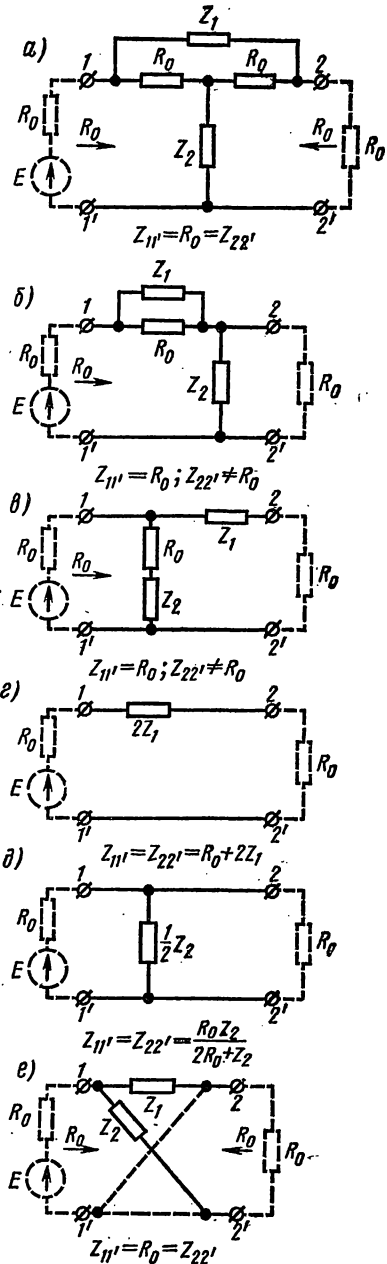


Рис. 16.2

ции частоты (для корректоров рис. 16.2, *a—e*). Кривая 1 соответствует случаю, когда элемент x_1 содержит только емкость C_1 , кривая 2 — только индуктивность L_1 , кривая 3 — параллельно соединенные L_1 и C_1 ,

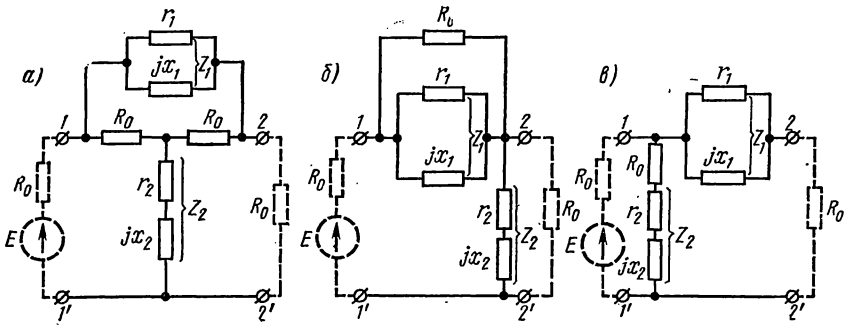


Рис. 16.3

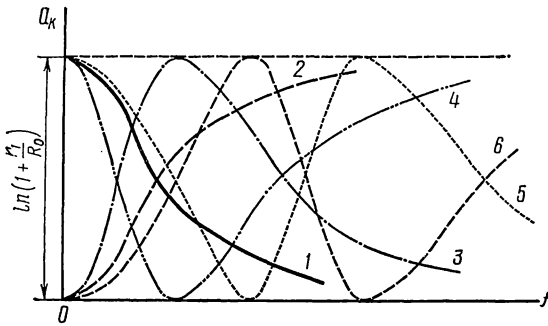


Рис. 16.4

кривая 4 — последовательно соединенные L_1 и C_1 , кривая 5 — последовательно соединенные L_1 и C_1 , шунтированные емкостью C'_1 , кривая 6 — последовательно соединенные L_1 и C_1 , шунтированные индуктивностью L'_1 .

Для использования четырехполюсников в качестве амплитудных корректоров крутизну кривой затухания в требуемом интервале частот можно изменять регулированием сопротивлений r_1 и x_1 .

Задача расчета корректирующего устройства обычно состоит в выборе его схемы и вычисления ее элементов так, чтобы выполнялось условие (16.1).

2. Фазовые корректоры предназначены для уменьшения фазочастотных искажений, вносимых в передачу линией и аппаратурой. Фазовый корректор мостового типа, состоящий из чисто реактивных элементов, пропускает все частоты от 0 до ∞ . Для обеспечения требуемой частотной характеристики фазовой постоянной $b(\omega)$ или группового времени замедления $t_{гр}(\omega) = db_{к}/d\omega$ фазовый корректор

включается каскадно и согласованно в корректируемую цепь (рис. 16.5, а).

Сущность фазовой коррекции поясняется рис. 16.5, б: требуемая суммарная характеристика фазы b корректора b_k и цепи b_u в некото-

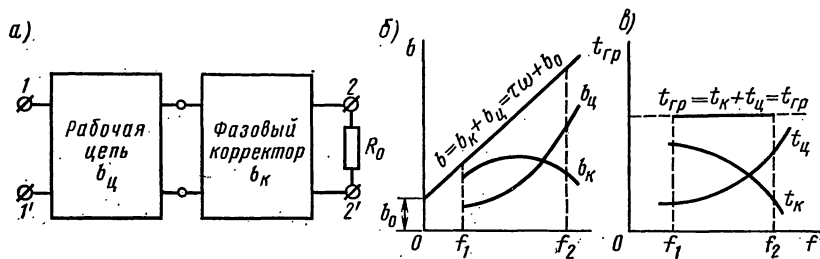


Рис. 16.5

ром диапазоне частот от f_1 до f_2 обычно должна иметь вид прямой, что удовлетворяет условию неискаженной передачи огибающей сигнала

$$b = b_k + b_u = \tau\omega + b_0. \quad (16.5)$$

Иными словами, это означает, что суммарная величина времени задержки t_{gp} , корректора t_k и рабочей цепи t_u есть величина постоянная (рис. 16.5, в):

$$t_k + t_u = t_{gp}. \quad (16.6)$$

Мостовое звено фазового корректора представляет собой четырехполюсник мостового типа (рис. 16.6), у которого сопротивления Z_1 и Z_2 являются взаимно обратными реактивными двухполюсниками, т. е.

$$Z_1 Z_2 = R_0^2 = -x_1 x_2. \quad (16.7)$$

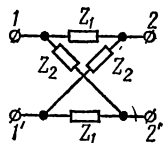


Рис. 16.6

Характеристическое сопротивление мостового звена фазового корректора постоянно (не зависит от частоты) и равно

$$Z_M = \sqrt{Z_1 Z_2} = R_0. \quad (16.8)$$

При выполнении условия (16.7) фазовая постоянная корректора и его групповое время замедления t_k определяются по формулам:

$$b_k = \arg \left(\frac{R_0 + Z_1}{R_0 - Z_1} \right) = 2 \operatorname{arctg} \frac{x_1}{R_0}; \quad (16.9)$$

$$t_k = \frac{db_k}{d\omega} = \frac{2R_0}{R_0^2 + x_1^2} \cdot \frac{dx_1}{d\omega}. \quad (16.10)$$

Характер зависимости b_k от частоты зависит от сложности звена (от так называемого порядка звена). Наиболее часто используются фазовые звенья первого порядка, т. е. такие, у каждого плеча мосто-

вой схемы которого имеется по одному реактивному элементу (рис. 16.7, а), и второго порядка, когда в каждом плече имеется по два реактивных элемента (рис. 16.7, б).

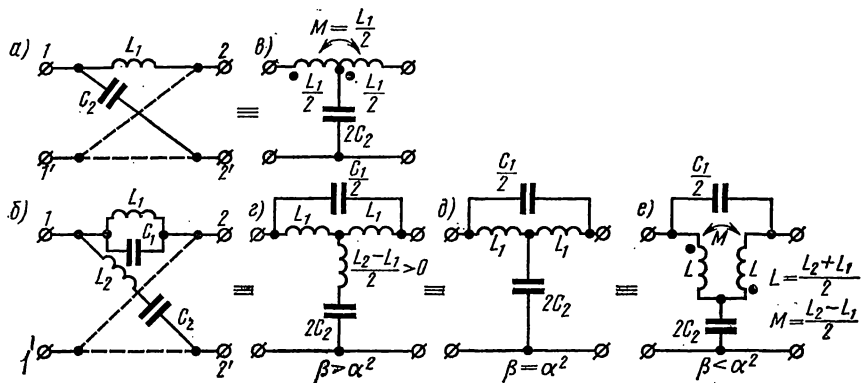


Рис. 16.7.

На практике для уменьшения числа реактивных элементов фазового корректора вместо мостовых схем применяются эквивалентные им схемы. Так, для звена фазового контура первого порядка вместо схемы рис. 16.7, а берется ей эквивалентная схема рис. 16.7, в с коэффициентом связи, равным 1. Для фазовых контуров второго порядка существует много эквивалентных схем. На рис. 16.7, г, д и е приведены три Т-образные мостовые схемы. Условия их применимости зависят от соотношения между коэффициентами α и β , где

$$\alpha = \frac{1}{C_1} \sqrt{C_2/L_1}, \quad \beta = 1/L_1 C_1.$$

Для получения требуемой фазовой характеристики (или группового времени задержки) часто берут несколько каскадно и согласованно соединенных звеньев разного порядка сложности, имеющие разное время задержки. В целях облегчения подбора звеньев используются приводимые в специальной литературе семейства характеристик времени задержки разных фазовых корректоров. Подбор числа, типа и характера звеньев может быть осуществлен графически (с помощью шаблонов), аналитически и с помощью цифровых электронно-вычислительных машин*.

УПРАЖНЕНИЯ И ЗАДАЧИ

А. Корректоры амплитудно-частотных искажений

16.1. Показать, что при нагрузке четырехполюсника (см. рис. 16.2, а) со стороны зажимов 2-2' на сопротивление R_0 его входное сопротивление со стороны зажимов 1-1' равно тому же сопротивле-

* См., например, К. А. Сильвинская и З. И. Голышко. Расчет фазовых и амплитудных корректоров. Изд-во «Связь», 1969.

нию R_0 , а рабочая постоянная передачи равна собственной постоянной передачи при условии, что $Z_1 Z_2 = R_0^2$.

16.2. Определить элементы и начертить схему Г-образного корректирующего четырехполюсника (рис. 16.8, а), имеющего постоянное входное (повторное) сопротивление $Z_{вх} = R_0 = 600 \text{ ом}$ и элементы $r' = 480 \text{ ом}$, $C_1 = 60 \text{ нф}$. Рассчитать и построить кривую рабочего затухания корректирующего контура в диапазоне $0,3 - 8 \text{ кГц}$.

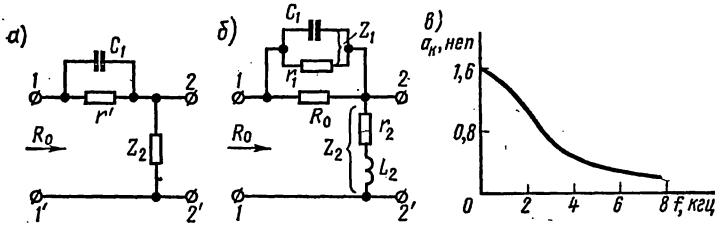


Рис. 16.8

Решение. Из сравнения рис. 16.8, а с рис. 16.2, б (см. формулу 16.2) видно, что заданный корректор должен иметь в продольной ветви параллельно соединенные активное сопротивление R_0 и комплексное сопротивление Z_1 , состоящее из параллельно соединенных r_1 и C_1 (см. рис. 16.8, б). Из эквивалентности схем рис. 16.8, а и б следует, что r должно равняться параллельно соединенным r_1 и R_0 , откуда и находим неизвестное

$$r' = \frac{r_1 R_0}{r_1 + R_0},$$

где

$$r_1 = \frac{480 \cdot 600}{600 - 480} = 2400 \text{ ом}.$$

Элементы комплексного сопротивления Z_2 поперечной ветви должны быть обратны сопротивлению Z_2 [см. формулу (16.2)]. Определим их, как это указано в гл. 13:

$$r_2 = \frac{R_0^2}{r_1} = \frac{600^2}{2400} = 150 \text{ ом};$$

$$L_2 = C_1 R_0^2 = 60 \cdot 10^{-9} \cdot 600^2 = 21,6 \cdot 10^{-3} \text{ гн}.$$

Кривую рабочего затухания рассчитываем по формуле (16.4). Результаты расчетов сведены в табл. 16.1.

Таблица 16.1

$f, \text{кГц}$	$x = 1/\omega C_1, \text{ом}$	r_1/x_1	$(r_1/x_1)^2$	$\left(1 + \frac{L_1}{R_0}\right)^2 + \left(\frac{L_1}{x_1}\right)^2$	$1 + \left(\frac{L_1}{x_1}\right)^2$	$\left(1 + \frac{L_1}{R_0}\right)^2 + \left(\frac{L_1}{x_1}\right)^2$	$1 + \left(\frac{L_1}{x_1}\right)^2$	$\ln \frac{1 + \left(\frac{L_1}{R_0}\right)^2 + \left(\frac{L_1}{x_1}\right)^2}{1 + \left(\frac{L_1}{x_1}\right)^2}$	$a_{\text{к}}, \text{нел}$
0,3	8860	0,271	0,074	25,074	1,074	24,8	3,21	1,605	
1,0	2650	0,906	0,81	25,81	1,81	14,23	2,655	1,327	
4,0	662	3,62	13,1	38,1	14,1	2,7	0,99	0,495	
8,0	331	7,25	52,5	77,5	53,5	1,44	0,367	0,184	

По данным табл. 16.1 на рис. 16.8, в построен график $a_{\text{к}}$ в функции f .

16.3. Рассчитать элементы и начертить схему Г-образного корректора (рис. 16.9), входное сопротивление которого постоянно и равно $Z_{\text{вх}} = R_0 = 1400 \text{ ом}$. Даны: $r' = 420 \text{ ом}$, $L_1 = 50 \text{ мГн}$. Построить кривую рабочего затухания корректора в диапазоне 0,3—4 кГц.

16.4. Определить элементы и начертить схему Г-образного корректора (рис. 16.10, а) с постоянным входным сопротивлением $Z_{\text{вх}} = R_0 = 600 \text{ ом}$, элементов которого $r' = 480 \text{ ом}$, $L_1 = 4 \text{ мГн}$, $C_1 = 1 \text{ мкФ}$. Определить частоту, при которой затухание передачи максимально, и величину $a_{\text{к max}}$ этого затухания корректора в полосе частот от 0 до 4 кГц.

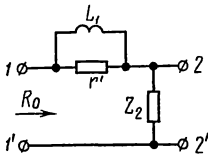


Рис. 16.9

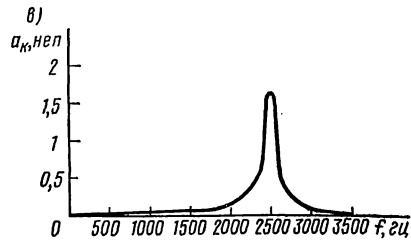
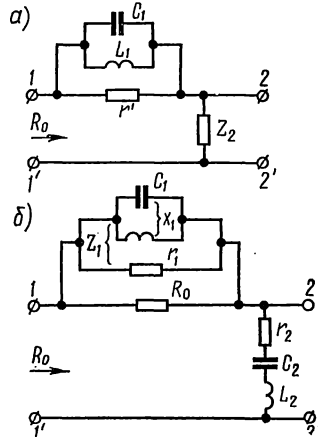


Рис. 16.10

Решение. Схема корректора приведена на рис. 16.10, б. Вычислим ее элементы:

$$r_1 = \frac{r'R_0}{R_0 - r'} = 2400 \text{ ом}; \quad r_2 = \frac{R_0^2}{r_1} = 150 \text{ ом};$$

$$L_2 = C_1 R_0^2 = 0,36 \text{ мкГн}; \quad C_2 = \frac{L_1}{R_0^2} = 0,0111 \text{ мкФ}.$$

Из формулы (16.4) следует, что затухание передачи максимально, когда реактивное сопротивление продольного плеча $x_1 = \infty$, при этом $x_2 = 0$ и в схеме остаются только активные сопротивления. Сопротивление параллельно соединенных L_1 и C_1

$$x_1 = \frac{\omega L_1}{1 - \omega^2 L_1 C_1}.$$

Отсюда видно, что $x_1 = \infty$ при $\omega_1 = 1/\sqrt{L_1 C_1} = 15800 \text{ сек}^{-1}$, $f_1 = 2520 \text{ Гц}$.

По формуле (16.4) находим, что при $x_1 = \infty$ величина максимального затухания передачи

$$a_{\text{к max}} = \frac{1}{2} \ln \left(1 + \frac{r_1}{R_0} \right)^2 = \ln \left(1 + \frac{2400}{600} \right) = \ln 5 = 1,61 \text{ неп.}$$

Кривая затухания корректора, рассчитанная по формуле (16.4), приведена на рис. 16.10, в.

16.5. Найти элементы и начертить схему Г-образного корректора (рис. 16.11, а), имеющего постоянное входное сопротивление $R_0 = 600 \text{ ом}$ и элементы $r' = 525 \text{ ом}$, $C_1 = 0,04 \text{ мкФ}$, $L_1 = 16 \text{ мГн}$, $C_1' = 0,2 \text{ мкФ}$. Определить частоту, при которой затухание передачи $a_{\text{к}}$ будет максимально, и чему эта величина ($a_{\text{к max}}$) равна.

Решение. Схема корректора и значения величин элементов даны на рис. 16.11, б. Они рассчитаны аналогично предыдущей задаче. Определим эквивалентное сопротивление x_1 реактивных элементов:

$$\begin{aligned} & -j \frac{1}{\omega C_1'} \cdot j \left(\omega L_1 - \frac{1}{\omega C_1} \right) \\ & \frac{\quad}{j \left[\omega L_1 - \left(\frac{1}{\omega C_1} + \frac{1}{\omega C_1'} \right) \right]} = \\ & = j \frac{\omega^2 L_1 C_1 - 1}{\omega (C_1 + C_1' - \omega^2 L_1 C_1 C_1')} = j x_1. \end{aligned}$$

Затухание передачи максимально при $|x_1| = \infty$, что имеет место, когда знаменатель выражения x_1 будет равен нулю. Как видно из по-

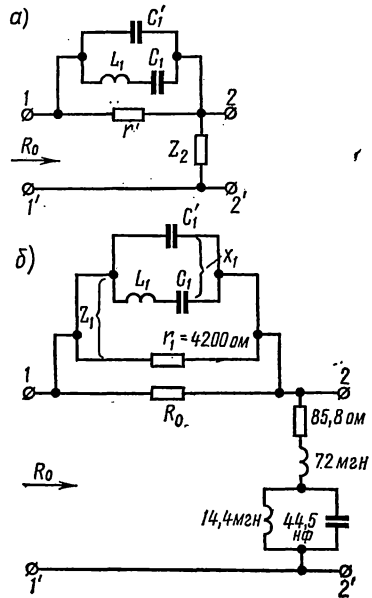


Рис. 16.11

лученного для x_1 выражения, это будет при $\omega = 0$ (т. е. $f = 0$) и при частоте

$$f_2 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{C_1 + C_1'}{L_1 C_1 C_1'}} = 69 \text{ кГц.}$$

Отметим, что f_2 есть частота резонанса токов в продольном плече и частота резонанса напряжений в поперечном плече. Величину максимального затухания (учтя, что при этом $x_1 = \infty$) находим по формуле (16.4):

$$a_{k \max} = \frac{1}{2} \ln \left(1 + \frac{r_1}{R_0} \right)^2 = \ln \left(1 + \frac{4200}{600} \right) = 2,08 \text{ неп.}$$

16.6. Рассчитать корректор, предназначенный для устранения амплитудных искажений в диапазоне частот 300—10 000 гц, создаваемых 200-километровой медной воздушной линией с диаметром проводов 4 мм и расстоянием между ними 20 см. Затухание линии на 1 км ее длины и на всю длину l приведено во второй и третьей строках табл. 16.2. Схема корректора должна обеспечивать согласование со стороны его входа и выхода. Нагрузочное сопротивление $R_0 = 600 \text{ ом}$. При расчете принять, что рабочее затухание корректора на самой высокой частоте корректирования ($f_{\text{в}} = 10 \text{ кГц}$) составляет 0,1 неп. Расчет должен быть сделан так, чтобы точность воспроизведения корректором заданной величины рабочего затухания на всех частотах была в пределах $\Delta a_k = \pm 0,05 \text{ неп.}$

Таблица 16.2

$f, \text{ гц}$	300	500	800	1200	2000	3000	5000	7000	10 000
$a, \text{ мнп/км}$	2,4	2,5	2,6	2,6	2,8	3,0	3,5	3,9	4,7
$a_l = al, \text{ неп}$	0,48	0,50	0,52	0,52	0,56	0,60	0,70	0,78	0,94
Требуемое $a_k, \text{ неп}$	0,56	0,54	0,52	0,52	0,48	0,44	0,34	0,26	0,1
Рассчитанное $a_k, \text{ неп}$	0,569	0,566	0,560	0,546	0,511	0,456	0,34	0,248	0,158
Точность воспроизведения $\Delta a_k, \text{ неп}$	+0,009	+0,026	+0,040	+0,026	+0,031	+0,016	0	-0,012	+0,058

Примечание. Предполагается, что в корректируемом диапазоне частот входное сопротивление линии согласовано по модулю с входным сопротивлением корректора с помощью согласующего трансформатора.

Решение. По данным табл. 16.2 на рис. 16.12 построена кривая затухания линии a_l в функции частоты f (кривая 1). По условию, сумма рабочих затуханий линии и корректора ($a_{об} = a_l + a_k$) на всех частотах должна составлять $a_{об} = 0,94 + 0,1 = 1,04 \text{ неп.}$ Отсюда находим требуемое затухание корректора $a_k = a_{об} - a_l$ на всех час-

татах (четвертая строка табл. 16.2). По этим значениям на рис. 16.12 построена кривая 2, выражающая требуемое затухание корректора.

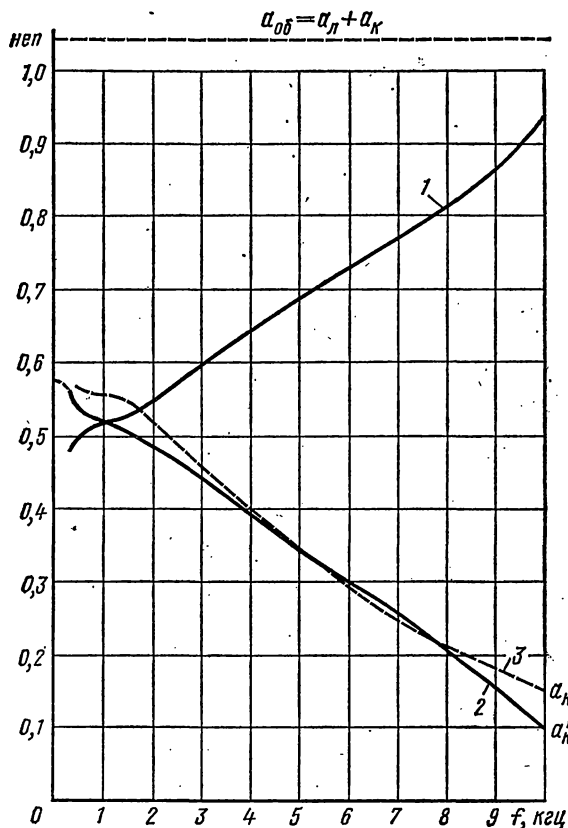


Рис. 16.12

Перепад рабочего затухания корректора в диапазоне частот 0,3—10 кгц составляет $\alpha_{к \max} - \alpha_{к \min} = 0,56 - 0,1 = 0,46$ неп. Это небольшой перепад затухания. В этом случае можно воспользоваться схемой корректора рис. 16.2, а с одной параллельной емкостью ($x_1 = -1/\omega C$), так как она содержит меньше элементов и может обеспечить требуемое по условию согласование как со стороны линии, так и нагрузки. Выбираем эту схему (рис. 16.13).

Рассматривая характер кривой рабочего затухания выбранного типа корректора (см. рис. 16.4 кривая 1) и сопоставляя

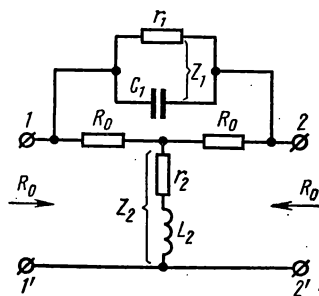


Рис. 16.13

ее с требуемой кривой 2 рис. 16.12, приходим к выводу, что при частоте $f = 0$ величину рабочего затухания корректора можно принять равной $0,57 \text{ nep}$, т. е. $a_{\text{к}0} = 0,57 \text{ nep}$ (на рис. 16.12 ход кривой 2 в интервале от $f = 0$ до $f = 300 \text{ гц}$ показан точечной штриховой линией).

Вначале определим величину активного сопротивления r_1 . Из формулы (16.4) при частоте $f = 0$ имеем $x_1 = -\frac{1}{\omega C_1} = -\infty$. Из (16.4) получим

$$a_{\text{к}0} = \ln\left(1 + \frac{r_1}{R_0}\right),$$

откуда

$$r_1 = R_0(e^{a_{\text{к}0}} - 1). \quad (1)$$

Перейдем к расчету емкости C_1 . Сопротивление Z_1 , приведенное к канонической форме, имеет вид

$$Z_1 = \frac{r_1 \frac{1}{j\omega C_1}}{r_1 + \frac{1}{j\omega C_1}} = \frac{r_1}{1 + j\omega C_1 r_1} = \frac{a_0}{1 + b_1(jf)},$$

где

$$a_0 = r_1, \quad b_1 = 2\pi C_1 r_1. \quad (2)$$

Квадраты модуля выражения (16.4) при $f = 0$ и при некоторой частоте f (с учетом введенных далее обозначений F_0 и F_1) примут вид:

$$e^{2a_{\text{к}0}} = \left(1 + \frac{a_0}{R_0}\right)^2 = F_0; \quad (3)$$

$$e^{2a_{\text{к}}} = \frac{\left(1 + \frac{a_0}{R_0}\right)^2 + b_1^2 f^2}{1 + b_1^2 f^2} = \frac{F_0 + b_1^2 f^2}{1 + b_1^2 f^2} = F. \quad (4)$$

Выражение (4) при $f = f_1$ примет вид

$$e^{2a_{\text{к}1}} = \frac{\left(1 + \frac{a_0}{R_0}\right)^2 + b_1^2 f_1^2}{1 + b_1^2 f_1^2} = \frac{F_0 + b_1^2 f_1^2}{1 + b_1^2 f_1^2} = F_1. \quad (5)$$

Так как рабочее затухание корректора задано, то, взяв его при частоте f_1 из формулы (5), получим значение коэффициента b_1 :

$$b_1 = \frac{1}{f} \sqrt{\frac{F_0 - F_1}{F_1 - 1}}. \quad (6)$$

И наконец, из формулы (2) найдем искомую емкость

$$C_1 = \frac{b_1}{2\pi r_1} \quad (7)$$

Подставляя в (1) и (3) числовые значения, получим:

$$r_1 = R_0(e^{2a_{к0}} - 1) = 600(e^{0,57} - 1) = 600(1,768 - 1) = 460 \text{ ом};$$

$$F_0 = e^{2a_{к0}} \cong e^{2 \cdot 0,57} = e^{1,14} = 3,127.$$

Для расчета F_1 выбираем среднюю частоту диапазона корректирования $f_{cp} = f_1 = 5000$ гц, для которой $a_{к1} = 0,34$ неп (см. табл. 16.2). Из формул (5), (6) и (7) находим:

$$F_1 = e^{2a_{к1}} = e^{2 \cdot 0,34} = 1,974;$$

$$b_1 = \frac{1}{f_1} \sqrt{\frac{F_0 - F_1}{F_1 - 1}} = \frac{1}{5000} \sqrt{\frac{3,127 - 1,974}{1,974 - 1}} = 2 \cdot 10^{-4} \sqrt{1,185} = 2,18 \cdot 10^{-4};$$

$$C_1 = \frac{b_1}{2\pi r_1} = \frac{2,18 \cdot 10^{-4}}{6,28 \cdot 460} = 0,0755 \cdot 10^{-6} \text{ ф.}$$

Элементы обратного двухполюсника Z_2 будут равны:

$$r_2 = \frac{R_0^2}{r_1} = \frac{600^2}{460} = 782 \text{ ом};$$

$$L_2 = C_1 R_0^2 = 600^2 \cdot 0,0755 \cdot 10^{-6} = 0,0272 \text{ гн.}$$

Теперь вычислим рабочее затухание корректора на всех частотах по следующей формуле, полученной из формулы (4):

$$a_{к} = \frac{1}{2} \ln \frac{F_0 + b_1^2 f^2}{1 + b_1^2 f^2}.$$

Для удобства расчеты сведены в табл. 16.3.

Таблица 16.3

f , гц	$b_1 f$	$b_1^2 f^2$	$F_0 + b_1^2 f^2$	$1 + b_1^2 f^2$	$\frac{F_0 + b_1^2 f^2}{1 + b_1^2 f^2}$	$\ln \frac{F_0 + b_1^2 f^2}{1 + b_1^2 f^2}$	$a_{к}$, неп
300	0,0654	0,004	3,131	1,004	3,12	1,138	0,569
500	0,109	0,012	3,139	1,012	3,04	1,132	0,566
800	0,174	0,030	3,157	1,030	3,065	1,12	0,560
1200	0,262	0,069	3,196	1,069	2,98	1,092	0,546
2000	0,436	0,190	3,317	1,19	2,78	1,022	0,511
3000	0,654	0,428	3,555	1,428	2,49	0,912	0,456
5000	1,09	1,188	4,315	2,188	1,975	0,680	0,34
7000	1,525	2,330	5,457	3,330	1,64	0,495	0,248
10000	2,18	4,750	7,877	5,750	1,37	0,315	0,158

По данным табл. 16.3 на рис. 16.13 построена вычисленная $a_{к}$ (кривая 3). Рассчитанные значения затухания $a_{к}$ из табл. 16.3. пере-

несены в табл. 16.2 (строка 4), а в строке 5 той же таблицы указана точность воспроизведения ($\Delta a_k = a'_k - a_k$) требуемой кривой затухания a_k . Отсюда видно, что ни в одной из точек диапазона корректирования кривая a'_k не выходит за пределы требуемой точности $\Delta a_k = \pm 0,05 \text{ nep}$.

В заключение отметим, что если бы требования по точности совпадения полученной и требуемой кривой рабочего затухания не были бы удовлетворены, следовало бы сделать новые расчеты, задавшись другим значением $a_{к0}$ или немного изменив величину средней частоты $f_{ср}$, или меняя и то и другое. Однако если бы все эти вариации не привели к удовлетворительному результату, пришлось бы перейти к более сложной схеме корректора.

16.7. Используя условия задачи 16.6, рассчитать амплитудный корректор и сравнить точность воспроизведения заданной кривой рабочего затухания, если частоту $f_{ср}$ оставить той же (5000 гц), а для $a_{к0}$ принять: 1) 0,56 nep; 2) 0,58 nep. Какое наибольшее отклонение по затуханию и при какой частоте дает каждый из этих корректоров?

16.8. Стальная воздушная линия связи (расстояние между проводами $a = 20 \text{ см}$, их диаметр 4 мм, при сухой погоде и температуре $t = 20^\circ\text{C}$) имеет коэффициент затухания на 1 км при частотах от 0,3 до 5 кгц, равный α (дан в табл. 16.4). Длина линии $l = 40 \text{ км}$. Линия нагружена на активное сопротивление $R_0 = 600 \text{ ом}$.

Требуется выбрать схему амплитудного корректора, обеспечивающую согласование со стороны нагрузки, и рассчитать ее так, чтобы точность воспроизведения корректором Δa_k заданной величины рабочего затухания на всех частотах была не более $\pm 0,12 \text{ nep}$. Принять,

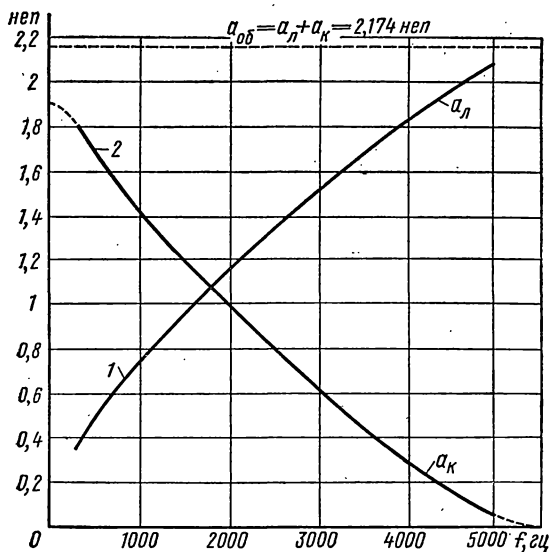


Рис. 16.14

что рабочее затухание корректора на самой верхней частоте корректирования $f_v = 5 \text{ кгц}$ составляет $0,05 \text{ неп}^*$.

Р е ш е н и е. В третьей строке табл. 16.4 вычислено затухание всей линии $a_l = \alpha l$ в пределах частот корректирования, а на рис. 16.14 построена кривая 1 затухания линии в функции частоты. В соответствии с условием сумма рабочих затуханий $a_{об}$ линии a_l и корректора a_k на верхней частоте корректирования $a_{об} = a_l + a_k = 2,124 + 0,05 = 2,174 \text{ неп}$.

Исходя из этого, вычислим требуемое рабочее затухание корректора $a_k = a_{об} - a_l$ на частотах, указанных в табл. 16.4. Результаты расчетов приведены в четвертой строке табл. 16.4, а на рис. 16.14 построена кривая a_k (кривая 2).

Таблица 16.4

f , кгц	0,3	0,5	0,8	1,2	2	3	5
α , <i>неп/км</i>	8,8	12	16,2	21,5	29,4	38,4	53,1
$a_l = \alpha l$, <i>неп</i>	0,352	0,480	0,648	0,860	1,176	1,536	2,124
Требуемое a_k , <i>неп</i>	1,822	1,694	1,526	1,314	0,998	0,638	0,05
Расчитанное a_k , <i>неп</i>	1,856	1,792	1,645	1,425	1,031	0,559	0,002
Точность воспроизведе- ния Δa_k	+0,034	+0,098	+0,119	+0,111	+0,033	-0,079	-0,048

Перепад рабочего затухания корректора в передаваемой полосе частот составляет $a_{k \max} - a_{k \min} = 1,822 - 0,05 = 1,772 \text{ неп}$.

Это значительный перепад рабочего затухания, и из рассмотрения кривых рис. 16.4 следует, что целесообразно выбрать схему корректора, которому соответствует кривая 4 рис. 16.4, т. е. схему с двумя последовательно соединенными реактивными элементами ($x_1 = \omega L_1 - \frac{1}{\omega C_1}$). Учитывая и условия согласования на выходе линии,

приходим к выводу, что следует выбрать схему корректора рис. 16.2, в. Соответствующая подробная схема дана на рис. 16.15. Найдем продольное сопротивление Z_1 двухполюсника, которое приведем к канонической форме:

$$\frac{1}{Z_1} = \frac{1}{r_1} + \frac{j\omega C_1}{1 - \omega^2 L_1 C_1},$$

отсюда

$$Z_1 = \frac{a_0 + a_2 (jf)^2}{1 + b_1 (jf) + b_2 (jf)^2}. \quad (1)$$

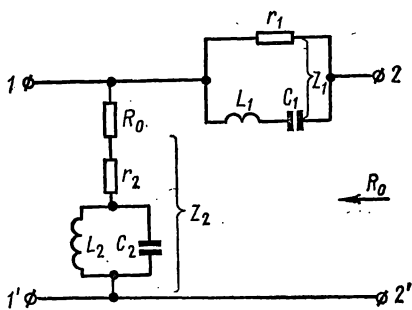


Рис. 16.15

* См. примечание к задаче 16.6.

Здесь

$$\left. \begin{aligned} a_0 &= r_1, \\ a_2 &= 4\pi^2 r_1 L_1 C_1, \\ b_1 &= 2\pi C_1 r_1, \\ b_2 &= 4\pi^2 L_1 C_1. \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Из уравнения (1) исключим a_2 , учитывая, что согласно формуле (2) $a_2 = a_0 b_2$, тогда уравнение (1) примет вид

$$Z_1 = \frac{a_0 + a_0 b_2 (jf)^2}{1 + b_1 (jf) + b_2 (jf)^2}. \quad (3)$$

Подставляя это в формулу (16.3) и приводя к одному знаменателю, получим

$$e^{g_k} = \frac{1 + \frac{a_0}{R_0} + b_1 (jf) + \left(1 + \frac{a_0}{R_0}\right) b_2 (jf)^2}{1 + b_1 (jf) + b_2 (jf)^2}. \quad (4)$$

Взяв модуль от правой и левой частей последнего уравнения, возведя их затем в квадрат и разделив числитель и знаменатель правой части на $b_1 f^2$, найдем

$$e^{2a_k} = \frac{1 + \left(1 + \frac{a_0}{R_0}\right)^2 \left(\frac{1 - b_2 f^2}{b_1 f}\right)^2}{1 + \left(\frac{1 - b_2 f^2}{b_1 f}\right)^2}. \quad (5)$$

Далее задача состоит в определении неизвестных r_1 , L_1 , C_1 . Так как рабочее затухание при $f = 0$ задано и равно $a_{к0}$, из формулы (5) определим неизвестное сопротивление

$$r_1 = R_0 (e^{a_{к0}} - 1). \quad (6)$$

Для определения L_1 и C_1 поступим так. Ради краткости введем обозначения:

$$y = -\frac{1 - b_2 f^2}{b_1 f}; \quad (7)$$

$$e^{2a_{к0}} = F_0; \quad (8)$$

$$e^{2a_k} = F. \quad (9)$$

Тогда формула (5) примет вид

$$F = \frac{1 + F_0 y^2}{1 + y^2}. \quad (10)$$

Отсюда

$$y = \pm \sqrt{\frac{F - 1}{F_0 - F}}. \quad (11)$$

В этом выражении знак перед корнем должен быть взят в соответствии с ходом частотной характеристики последовательного L_1C_1 -контура, а именно знак минус в полосе частот от 0 до резонансной частоты f_0 и знак плюс в полосе от f_0 до ∞ .

По заданным величинам рабочего затухания корректора $a_{к0}$ и $a_{к1}$ находим y .

В выражение (7) входят коэффициенты b_1 и b_2 . Для их определения можно поступить так. Из формулы (7)

$$b_2 - \frac{y}{f} b_1 = \frac{1}{f^2}. \quad (12)$$

В передаваемой полосе частот следует взять частоты f_1 и f_2 и определить при этом из формул (10) и (11) соответствующие F_1 и F_2 , а также y_1 и y_2 . Тогда получим систему из двух уравнений с двумя неизвестными b_1 и b_2 .

Однако можно ограничиться определением не двух, а лишь одного коэффициента b_1 , если задаться резонансной частотой последовательного L_1C_1 -контура, которая связана с коэффициентом b_2 соотношением (2)

$$b_2 = 1/f_0^2. \quad (13)$$

Итак, окончательно, если знать: 1) рабочее затухание $a_{к0}$ при $f = 0$; 2) $a_{к1}$ при f_1 и 3) резонансную частоту f_0 , то методика расчета корректора следующая. По формуле (6) вычисляется r_1 , затем из формул (8), (9), (11), (13) определяются F_0 , F_1 , y_1 , b_2 . Затем из (12) находим b_1 и наконец из (2) — L_1 и C_1 . Параметры обратного двухполюсника вычисляются по формуле (16.2).

Расчет величины рабочего затухания в заданном диапазоне частот определяют из формулы (5):

$$a_{к} = \frac{1}{2} \ln \frac{1 + F_0 \left(\frac{1 - b_2 f^2}{b_1 f^2} \right)^2}{1 + \left(\frac{1 - b_2 f^2}{b_1 f} \right)^2}. \quad (14)$$

В соответствии с изложенной методикой проведем расчет корректора. Рассматривая кривую рабочего затухания (кривая 2 на рис. 16.14), приходим к выводу, что при $f = 0$ следует принять $a_{к0} = 1,9$ *нп*, а резонансную частоту взять равной 5,5 *кГц*.

Находим r_1 по формуле (6):

$$r_1 = R_0(e^{a_{к0}} - 1) = 600(e^{1,9} - 1) = 600(6,686 - 1) = 3410 \text{ ом}.$$

Примем $f_1 = 2500$ *Гц*, при этом по кривой 2 рис. 16.14 находим $a_{к1} = 0,8$ *нп*. По формулам (8), (9), (11) и (13) вычисляем:

$$F_0 = e^{2a_{к0}} = e^{2 \cdot 1,9} = 44,70;$$

$$F_1 = e^{2a_{к1}} = e^{2 \cdot 0,8} = 4,953;$$

$$y_1 = -\sqrt{\frac{F_1 - 1}{F_0 - F_1}} = -\sqrt{\frac{4,953 - 1}{44,70 - 4,953}} = -0,316;$$

$$b_2 = \frac{1}{f_0} = \frac{1}{5500^2} = 0,033 \cdot 10^{-6}.$$

Далее из (12) с учетом формулы (13) при $f = f_1$ находим b_1 :

$$b_1 = -\frac{f_1}{y_1} \left(\frac{1}{f_1^2} - \frac{1}{f_0^2} \right) = \frac{2500}{0,316} \left(\frac{1}{2500^2} - \frac{1}{5500^2} \right) = 1,005 \cdot 10^{-3}.$$

Расчет α'_k по формуле (14) сведен в табл. 16.5. Рассчитанные значения затухания корректора α_k занесены в табл. 16.4. Там же приведены результаты сравнения с требуемыми α'_k , которые показывают, что во всем диапазоне корректирования точность воспроизведения не ниже заданного значения $\Delta\alpha_k = \pm 0,12$ *неп*. Если бы на некоторых частотах не была бы достигнута требуемая точность корректирования, то пришлось бы сделать новый вариант расчета, изменив принятые $\alpha_{к0}$, либо f_0 , либо и то и другое.

Индуктивность и емкость продольного плеча находим из (2):

$$C_1 = \frac{b_1}{2\pi r_1} = \frac{1,005 \cdot 10^{-3}}{6,28 \cdot 3410} = 0,0468 \cdot 10^{-6} \text{ ф};$$

$$L_1 = \frac{b_2}{4\pi^2 C_1} = \frac{0,033 \cdot 10^{-6}}{4 \cdot 3,14^2 \cdot 0,0468 \cdot 10^{-6}} = 17,8 \cdot 10^{-3} \text{ гн}.$$

Параметры двухполюсника Z_2 находим по формуле (16.2):

$$r_2 = \frac{R_0^2}{r_1} = \frac{600^2}{3410} = 106 \text{ ом};$$

$$L_2 = C_1 R_0^2 = 0,0468 \cdot 10^{-6} \cdot 600^2 = 16,8 \cdot 10^{-3} \text{ гн};$$

$$C_2 = \frac{L_1}{R_0^2} = \frac{17,8 \cdot 10^{-3}}{600^2} = 0,0495 \cdot 10^{-6} \text{ ф}.$$

16.9. По данным задачи 16.8 рассчитать корректор в трех случаях, приняв: 1) $\alpha_{к0} = 1,9$ *неп*, $f_0 = 5300$ *гц*; 2) $\alpha_{к0} = 1,85$ *неп*, $f_0 = 5300$ *гц*; 3) $\alpha_{к0} = 1,9$ *неп*, $f_0 = 5600$ *гц*.

16.10. Доказать, что схемы рис. 16.7, *а* и *в* эквивалентны.

Корректоры фазочастотных искажений

16.11. Для фазового корректора (см. рис. 16.7, *а*) по известным индуктивности L_1 и характеристическому сопротивлению R_0 определить емкость C_2 . Получить формулы фазовой постоянной b_k и времени замедления t_k корректора. Используя их, построить кривые зависимостей b_k и t_k в функции частоты для двух значений индуктивности: 1) $L_1 = L'_1 = 36$ *мгн*; 2) $L_1 = L'_1 = 72$ *мгн*. Для обоих вариантов

Таблица 16.5

$f, \text{ м}$	f^2	$1 - b_2 f^2$	$b_4 f$	$\frac{1 - b_2 f^2}{b_4 f}$	$\left(\frac{1 - b_2 f^2}{b_4 f}\right)^2$	$F_0 \left(\frac{1 - b_2 f^2}{b_4 f}\right)^2$	Числитель формулы (14)	Знаменатель формулы (14)	Отношение числителя к знаменателю формулы (14)	$a_k, \text{ м/с}$
300	$9 \cdot 10^4$	0,997	0,302	3,29	10,8	484	485	11,8	41	1,856
500	$25 \cdot 10^4$	0,992	0,50	1,98	3,97	177	178	4,97	36	1,792
800	$64 \cdot 10^4$	0,979	0,80	1,21	1,46	65,2	66,2	2,47	26,8	1,645
1200	$144 \cdot 10^4$	0,952	1,21	0,79	0,623	27,8	28,2	1,63	17,3	1,425
2000	$4 \cdot 10^6$	0,868	2,01	0,432	0,186	8,32	9,32	1,186	7,86	1,031
2500	$6,25 \cdot 10^6$	0,793	2,51	0,317	0,1	4,47	5,47	1,1	4,98	0,803
3000	$9 \cdot 10^6$	0,702	3,02	0,233	0,054	2,42	3,42	1,054	3,26	0,559
4000	$16 \cdot 10^6$	0,47	4,02	0,175	0,031	1,37	2,37	1,031	2,3	0,416
5000	$25 \cdot 10^6$	0,175	5,08	0,0345	0,002	0,05	1,05	1,001	1,005	0,02
5500	$30,25 \cdot 10^6$	1	5,53	0	0	0	1	1	1	0

принять $R_0 = 600$ ом. Вычислить параметры эквивалентной схемы рис. 16.7, в.

Решение. Емкость C_2 определим из формулы (16.7):

$$Z_1 Z_2 = j\omega L_1 \frac{1}{j\omega C_2} = \frac{L_1}{C_2} = R_0^2.$$

Отсюда

$$C_2 = L_1 / R_0^2.$$

По формулам (16.9) и (16.10) найдем b_k и t_k , учитывая, что $x_1 = \omega L_1$:

$$b_k = 2 \operatorname{arctg} \frac{x_1}{R_0} = 2 \operatorname{arctg} \frac{2\pi L_1}{R_0} f = 2 \operatorname{arctg} a_1 f; \quad (1)$$

$$t_k = \frac{db_k}{d\omega} = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{db_k}{df} = \frac{a_1}{\pi(1 + a_1^2 f^2)}, \quad (2)$$

где

$$a_1 = \frac{2\pi L_1}{R_0}.$$

Проведем числовые расчеты:

1) при $L_1 = L_1'$ затухание $a_1' = \frac{2\pi L_1'}{R_0} = \frac{6,28 \cdot 36 \cdot 10^{-3}}{600} = 188,5 \cdot 10^{-6}$;

2) при $L_1 = L_1''$ затухание $a_1'' = \frac{2\pi L_1''}{R_0} = 377 \cdot 10^{-6}$.

Результаты расчетов занесены в табл. 16.6.

Таблица 16.6

	$t, \text{ мкс}$	0	1000	2000	4000	6000	8000	10 000
При $L_1 = L_1'$	$b_k', \text{ рад}$	0	0,37	0,72	1,29	1,79	1,97	2,27
	$t_k', \text{ мксек}$	60	58	52,5	37,2	26,3	18,4	9,8
При $L_1 = L_1''$	$b_k'', \text{ рад}$	0	0,72	1,29	1,96	2,3	2,5	2,62
	$t_k'', \text{ мксек}$	120	105	76,7	36,9	19,7	11,8	7,9

По данным табл. 16.6 на рис. 16.16 построены требуемые кривые. Определим параметры эквивалентной схемы рис. 16.7, в. Для варианта 1 они равны:

$$L_1'/2 = 18 \text{ мкн} = M; \quad 2C_2' = \frac{2L_1'}{R_0^2} = 0,2 \text{ мкф}.$$

Для варианта 2

$$L_1''/2 = 36 \text{ мкн} = M, \quad 2C_2'' = \frac{2L_1''}{R_0^2} = 0,4 \text{ мкф.}$$

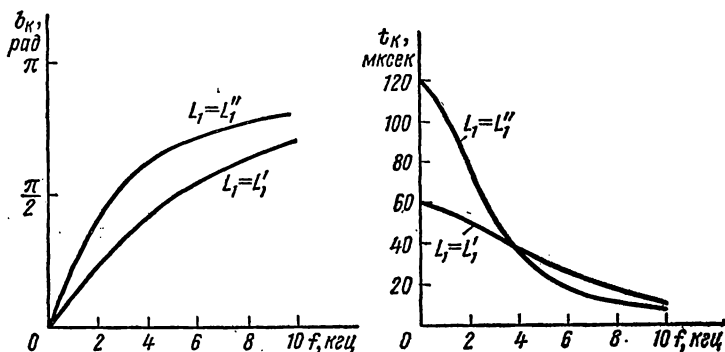


Рис. 16.16

16.12. Показать, что схема рис. 16,7, б эквивалентна схемам рис. 16.7, г, д и е при указанных на этих рисунках соотношениях между α и β , где

$$\alpha = \frac{1}{C_1} \sqrt{\frac{C_2}{L_1}}; \quad \beta = 1/L_1 C_1.$$

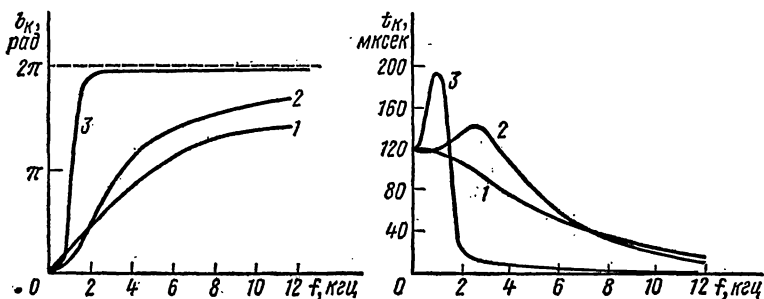


Рис. 16.17

16.13. Известны L_1 , C_1 и R_0 фазового корректора (см. рис. 16.7, б). Определить L_2 и C_2 . Получить формулы для b_k и t_k корректора и определить вид этих кривых в функции частоты. Провести числовые расчеты и построить кривые зависимостей b_k и t_k в функции частоты f для трех случаев: 1) $R_0 = 600 \text{ ом}$, $L_1 = 36 \text{ мкн}$, $C_1 = 0,025 \text{ мкф}$; 2) $R_0 = 600 \text{ ом}$, $L_1 = 36 \text{ мкн}$, $C_1 = 0,05 \text{ мкф}$; 3) $R_0 = 600 \text{ ом}$, $L_1 = 36 \text{ мкн}$, $C_1 = 1,6 \text{ мкф}$. Для каждого из случаев выяснить, какой

эквивалентной Т-образно-мостовой схемой (см. рис. 16.7, *з, д, е*) может быть заменена заданная схема и каковы ее параметры.

Решение. Продольные Z_1 и диагональное Z_2 сопротивления корректора соответственно равны (см. гл. 13):

$$Z_1 = \frac{j\omega}{C_1} \cdot \frac{1}{\omega_1^2 - \omega^2}; \quad (1)$$

$$Z_2 = \frac{L_2}{j\omega} (\omega_2^2 - \omega^2), \quad (2)$$

где ω_1 и ω_2 — резонансные частоты соответственно параллельного и последовательного контуров, равные:

$$\omega_1 = 1/\sqrt{L_1 C_1}; \quad \omega_2 = 1/\sqrt{L_2 C_2}. \quad (3)$$

Схема рис. 16.7, *б* будет фазовым контуром лишь при совпадении частот ω_1 и ω_2 , т. е. при

$$\omega_1 = \omega_2 = \omega_0. \quad (4)$$

В этом случае из (16.7) имеем

$$Z_1 Z_2 = \frac{j\omega}{C_1} \cdot \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2} \cdot \frac{L_2}{j\omega} (\omega_0^2 - \omega^2) = \frac{L_2}{C_1} = R_0^2.$$

Отсюда находим искомую индуктивность

$$L_2 = C_1 R_0^2, \quad (5)$$

а из (3) и (4) неизвестную емкость

$$C_2 = \frac{L_1 C_1}{L_2} = \frac{L_1 C_1}{C_1 R_0^2} = \frac{L_1}{R_0^2}. \quad (6)$$

Получим требуемые формулы для b_k и t_k . Из формулы (1) находим

$$x_1 = \frac{\omega}{C_1} \cdot \frac{1}{\omega_1^2 - \omega^2} = \frac{\omega}{C_1} \cdot \frac{1}{\frac{1}{L_1 C_1} - \omega^2} = \frac{\omega L_1}{1 - \omega^2 L_1 C_1}. \quad (7)$$

Подставляя найденное x_1 в (16.9), получим

$$b_k = 2 \operatorname{arctg} \frac{x_1}{R_0} = 2 \operatorname{arctg} \frac{\frac{2\pi L_1}{R_0} \cdot f}{1 - 4\pi^2 L_1 C_1 f^2} = 2 \operatorname{arctg} \frac{a_1 f}{1 - b_2 f^2}. \quad (8)$$

Здесь введены обозначения:

$$\left. \begin{aligned} a_1 &= \frac{2\pi L_1}{R_0}; & b_2 &= 4\pi^2 L_1 C_1 = \frac{1}{f_0^2}, \\ \text{где} & & & \\ f_0 &= \frac{1}{2\pi \sqrt{L_1 C_1}}. \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

По (16.10) определяем время замедления корректора:

$$t_{\kappa} = \frac{db_{\kappa}}{d\omega} = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{db_{\kappa}}{df} = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{a_1(1 + b_2 f^2)}{a_1^2 f^2 + (1 - b_2 f^2)^2}. \quad (10)$$

Беря производную dt_{κ}/df и приравняв ее нулю, найдем частоту f_{\max} , при которой время замедления t_{κ} будет наибольшим ($t_{\kappa} = t_{\kappa \max}$). В результате преобразований найдем

$$f_{\max} = \sqrt{\frac{1}{b^2} \left(\sqrt{4 - \frac{a_1^2}{b_2}} - 1 \right)}. \quad (11)$$

Необходимо отметить, что это точка перегиба кривой b_{κ} и точка максимума кривой t_{κ} как функция частоты f . Подставляя это значение f_{\max} в формулу (10), получим выражение для $t_{\kappa \max}$:

$$t_{\kappa \max} = \frac{1}{2\pi f_0} \cdot \frac{1}{\sqrt{\frac{4L_2}{L_1} - 1} - 2\sqrt{\frac{L_2}{L_1}} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{L_1}{L_2}}}. \quad (12)$$

Формулам (11) и (12) можно придать более удобный вид, если ввести новые параметры m и η :

$$m = \sqrt{L_2/L_1}, \quad \eta = f/f_0. \quad (13)$$

Тогда с учетом (9) и (13) формулы (11), (12) и (10) примут вид:

$$f_{\max} = f_0 \sqrt{\sqrt{4 - \frac{1}{m^2}} - 1}; \quad (14)$$

$$t_{\kappa \max} = \frac{1}{2\pi f_0} \cdot \frac{1}{\sqrt{4m^2 - 1} - 2m + \frac{1}{2m}}; \quad (15)$$

$$t_{\kappa} = \frac{1}{\pi m f_0} \cdot \frac{1 + \eta^2}{\left(\frac{\eta}{m}\right)^2 + (1 - \eta^2)^2}. \quad (16)$$

Анализируя выражение (14), приходим к выводу, что при $m \leq 1/\sqrt{3}$ кривая времени замедления имеет максимум при частоте $f=0$. Это означает, что кривые b_{κ} и t_{κ} будут изменяться по кривым 1 рис. 16.17. При $m > 1/\sqrt{3} = 0,578$ кривые b_{κ} и t_{κ} обозначены цифрой 2. Наконец, при $m \gg 1/\sqrt{3}$ на рис. 16.17 эти кривые обозначены цифрой 3.

Проведем числовые расчеты.

1. Из формулы (3) находим угловую частоту

$$\omega_1 = \frac{1}{\sqrt{L_1 C_1}} = \frac{1}{\sqrt{36 \cdot 10^{-9} \cdot 0,025 \cdot 10^{-6}}} = 3,33 \cdot 10^4 \text{ сек}^{-1}$$

и частоту

$$f_1 = f_0 = \frac{\omega_1}{2\pi} = \frac{3,33 \cdot 10^4}{6,28} = 5,3 \text{ кГц},$$

а из (5) и (6) — индуктивность L_2 и емкость C_2 диагонального плеча:

$$L_2 = C_1 R_0^2 = 0,025 \cdot 10^{-6} \cdot 36 \cdot 10^4 = 9 \text{ мГн};$$

$$C_2 = \frac{L_1}{R_0^2} = \frac{36 \cdot 10^{-3}}{36 \cdot 10^4} = 0,1 \text{ мкФ}.$$

По формуле (13) вычисляем параметр m :

$$m = \sqrt{L_2/L_1} = \sqrt{9/36} = 0,5.$$

Так как $m < 1/\sqrt{3} = 0,578$, то $f_{\max} = 0$.

Расчет кривых b_k и t_k проводим по формулам (8) и (10). Результаты расчетов сведены в табл. 16.7, по которым на рис. 16.17 построены соответствующие кривые 1.

Таблица 16.7

f , кГц	0	2	4	5,3	8	10	12
b_k , рад	0	1,44	2,59	3,14	4,11	4,35	4,62
t_k , мксек	120	106	73,5	60	34,8	26,2	19,7

Теперь выясним, какой эквивалентной схеме соответствует заданная. Для этого по формулам, приведенным в условии задачи 16.12, вычисляем α и β :

$$\alpha = \frac{1}{C_1} \sqrt{\frac{C_2}{L_1}} = \frac{1}{0,025 \cdot 10^{-6}} \sqrt{\frac{0,1 \cdot 10^{-6}}{36 \cdot 10^{-3}}} = 6,67 \cdot 10^4;$$

$$\beta = \frac{1}{L_1 C_1} = \frac{1}{36 \cdot 10^{-3} \cdot 0,025 \cdot 10^{-6}} = 1,11 \cdot 10^9.$$

Отсюда видно, что $\beta < \alpha^2$, а это соответствует эквивалентной схеме рис. 16.7, е. Ее параметры:

$$L = \frac{L_2 + L_1}{2} = 22,5 \text{ мГн}; \quad M = \frac{L_2 - L_1}{2} = -13,5 \text{ мГн};$$

$$C_1/2 = 0,0125 \text{ мкФ}; \quad 2C_2 = 0,2 \text{ мкФ}.$$

2. По формулам (3), (5), (6) и (13) определяем:

$$\omega_1 = \frac{1}{\sqrt{L_1 C_1}} = \frac{1}{\sqrt{36 \cdot 10^{-3} \cdot 0,05 \cdot 10^{-6}}} = 2,36 \cdot 10^4 \text{ сек}^{-1};$$

$$f_1 = f_0 = \frac{\omega_1}{2\pi} = \frac{2,36}{6,28} 10^4 = 3,76 \text{ кГц};$$

$$L_2 = C_1 R_0^2 = 0,05 \cdot 10^{-6} \cdot 36 \cdot 10^4 = 18 \text{ мкн};$$

$$C_2 = \frac{L_1}{R_0^2} = \frac{36 \cdot 10^{-9}}{36 \cdot 10^4} = 0,1 \text{ мкф};$$

$$m = \sqrt{L_2/L_1} = \sqrt{18/36} = 0,707.$$

Так как $m > 1/\sqrt{3}$, то по формулам (14) и (15) вычисляем f_{\max} и $t_{\kappa \max}$:

$$f_{\max} = f_0 \sqrt{\sqrt{4 - \frac{1}{m^2}} - 1} = 3,76 \sqrt{\sqrt{4 - \frac{1}{0,5}} - 1} = 2,42 \text{ кгц};$$

$$t_{\kappa \max} = \frac{1}{2\pi f_0} \cdot \frac{1}{\sqrt{4m^2 - 1} - 2m + \frac{1}{2m}} = \frac{1}{6,28 \cdot 3,76 \cdot 10^9} \cdot \frac{1}{\sqrt{4 \cdot 0,5 - 1} - 1,414 + \frac{1}{1,414}} = 144 \text{ мксек}.$$

По (9) находим a_1 и b_2 :

$$a_1 = \frac{2\pi L_1}{R_0} = \frac{2\pi \cdot 36 \cdot 10^{-9}}{600} = 377 \cdot 10^{-6};$$

$$b_2 = \frac{1}{f_0^2} = \frac{1}{(3,76 \cdot 10^9)^2} = 7,07 \cdot 10^{-8}.$$

По (8) и (10) рассчитываем b_{κ} и t_{κ} , результаты расчета заносим в табл. 16.8.

Таблица 16.8

f , кгц	0	1	2,42	3,76	6	8	10	12
b_{κ} , рад	0	0,77	2,0	3,14	4,35	4,87	5,19	5,38
t_{κ} , мксек	120	117	144	120	57,6	30,8	18,9	12,7

Кривые b_{κ} и t_{κ} построены на рис. 16.17 (кривые 2). Как и в варианте 1, выясняем, что схемой, эквивалентной заданной, является схема рис. 16.7, *е*. В результате расчетов получаем $\alpha = 3,33 \cdot 10^4$, $\beta = 5,55 \cdot 10^8$, т. е. $\beta < \alpha^2$. Параметры эквивалентной схемы: $L = 27 \text{ мкн}$, $M = -9 \text{ мкн}$, $C_1/2 = 0,025 \text{ мкф}$, $2C_2 = 0,2 \text{ мкф}$.

3. Определяем f_0 , L_2 , C_2 и m :

$$\omega_1 = \frac{1}{\sqrt{L_1/C_1}} = \frac{1}{\sqrt{36 \cdot 10^{-9} \cdot 1,6 \cdot 10^{-6}}} = 0,416 \cdot 10^4 \text{ сек}^{-1};$$

$$f_0 = \frac{\omega_1}{2\pi} = 0,662 \text{ кГц}, \quad L_2 = C_1 R_0^2 = 1,6 \cdot 10^{-4} \cdot 36 \cdot 10^4 = 0,576 \text{ гн};$$

$$C_2 = \frac{L_1}{R_0^2} = \frac{36 \cdot 10^{-8}}{36 \cdot 10^4} = 0,1 \text{ мкФ}, \quad m = \sqrt{L_2/L_1} = \sqrt{576/36} = 4.$$

Так как $m > 1/\sqrt{3}$, то по (14) и (15) вычисляем f_{\max} и $t_{\kappa \max}$:

$$f_{\max} = f_0 \sqrt{\sqrt{4 - \frac{1}{m^2}} - 1} = 0,662 \sqrt{\sqrt{4 - \frac{1}{16}} - 1} = 0,662 \text{ кГц};$$

$$t_{\kappa \max} = \frac{1}{2\pi f_0} \cdot \frac{1}{\sqrt{4m^2 - 1} - 2m + \frac{1}{2m}} \approx \frac{m}{\pi f_0} = \frac{4}{\pi \cdot 0,662} \cdot 10^{-3} = 192 \text{ мксек}.$$

Вычисляем значения a_1 и b_2 :

$$a_1 = \frac{2\pi L_1}{R_0} = 377 \cdot 10^{-6}; \quad b_2 = \frac{1}{f_0^2} = \frac{1}{(0,662 \cdot 10^3)^2} = 2,28 \cdot 10^{-6}.$$

Результаты расчетов b_{κ} и t_{κ} заносим в табл. 16.9.

Таблица 16.9

f , кГц	0	0,662	2	4	6	8	10	12
b_{κ} , рад	0	3,14	6,1	6,2	6,23	6,24	6,25	6,26
t_{κ} , мксек	120	192	18,3	3,6	2,5	1,5	0,6	0,4

На рис. 16.17 по данным табл. 16.9 построены кривые b_{κ} и t_{κ} (кривые 3).

В этом случае схемой, эквивалентной заданной, является схема рис. 16.7, *г*, так как расчеты, аналогичные двум предыдущим вариантам, дают: $\alpha = 1,04 \cdot 10^3$, $\beta = 1,74 \cdot 10^6$, т. е. $\beta > \alpha^2$. Параметры этой схемы:

$$(L_2 - L_1)/2 = 0,27 \text{ гн} > 0, \quad L_1 = 36 \text{ мГн}, \quad C_1/2 = 0,8 \text{ мкФ}, \\ 2C_2 = 0,2 \text{ мкФ}.$$

16.14. Параметры фазового корректора (см. рис. 16.7, *б*) имеют следующие значения: $L_1 = L_2 = 36 \text{ мГн}$, $C_1 = C_2 = 0,1 \text{ мкФ}$. Рассчитать и построить кривые зависимости b_{κ} и t_{κ} в функции частоты. Определить Т-образно-мостовую схему замещения, эквивалентную заданной, и определить ее параметры.

Глава семнадцатая

ОСНОВЫ СИНТЕЗА ДВУХПОЛЮСНИКОВ

ОСНОВНЫЕ ПОЛОЖЕНИЯ И СООТНОШЕНИЯ

1. **Задача синтеза** — нахождение схем электрических цепей и величин, входящих в них элементов по известным частотным или временным свойствам цепей.

В данной главе рассматриваются вопросы построения электрической цепи двухполюсника по заданному уравнению $F(p)$, выражающему его частотные свойства.

Функция $F(p)$ комплексного переменного (комплексной частоты) $p = \sigma + j\omega$ может быть комплексным сопротивлением $Z(p)$ и комплексной проводимостью $Y(p)$ (или комплексным коэффициентом передачи $T(p)$ при синтезе четырехполюсника) некоторой пассивной электрической цепи с сосредоточенными параметрами.

Термином, обобщающим входные сопротивление $Z(p)$ и проводимость $Y(p)$, является «входная функция». Обобщающим термином для входных функций и коэффициента передачи является термин «функция цепи». Входная функция $F(p)$ может быть реализована в виде электрической цепи с сосредоточенными параметрами при условии, что она является *дробно-рациональной функцией*

$$F(p) = \frac{A(p)}{B(p)} = \frac{a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_1 p + a_0}{b_m p^m + b_{m-1} p^{m-1} + \dots + b_1 p + b_0} = H \frac{(p - p_{01})(p - p_{02}) \dots (p - p_{0n})}{(p - p_1)(p - p_2) \dots (p - p_k) \dots (p - p_m)}, \quad (17.1)$$

у которой коэффициенты a_k и b_k — положительные и действительные числа, $H = a_n/b_m$ — числовой коэффициент, все полюсы $p_k = \sigma_k + j\omega_k$ лежат в левой части комплексной полуплоскости (т. е. $\sigma_k \leq 0$), в том числе могут быть простые (не кратные) полюсы, лежащие на мнимой оси (т. е. $p_k = j\omega_k$). Все нули $p_{0k} = \sigma_{0k} + j\omega_{0k}$ входных функций лежат в левой полуплоскости, в том числе могут быть простые нули, лежащие на мнимой оси. [Для функции передачи $T(p)$ нули могут лежать и в правой полуплоскости (см. гл. 18).]

2. **Положительная вещественная функция** (п. в. ф.) есть такая функция $F(p)$, которая удовлетворяет двум условиям: 1) ее вещественная часть положительна при положительных значениях вещественной части p (условие положительности); 2) она вещественна при вещественных (не комплексных) значениях p (условие вещественности).

3. **Свойства входных функций пассивных электрических цепей.**

Входная функция $F(p)$ пассивной электрической цепи, т. е. входное сопротивление $Z(p)$ или входная проводимость $Y(p)$, есть п. в. ф.

Необходимое и достаточное условие возможности реализации рациональной п.в.ф. функции $F(p)$ [см. формулу (17.1)] в виде входной функции некоторой пассивной цепи заключается в одновременном выполнении следующих пяти требований:

а) все коэффициенты a_k и b_k полиномов $A(p)$ и $B(p)$ должны быть положительными;

б) наибольшие степени p в $A(p)$ и $B(p)$ не могут отличаться более чем на единицу; то же и в отношении минимальных степеней p ;

в) в правой полуплоскости $F(p)$ нет полюсов, т. е. все полюсы лежат в левой полуплоскости, в том числе могут быть полюсы на мнимой оси; если на мнимой оси имеются полюсы, то они могут быть только простыми (не кратными) с действительными положительными вычетами.

З а м е ч а н и е. Напомним, что вычет функции $F(p) = A(p)/B(p)$ в простом полюсе p_i вычисляется по формуле

$$[\text{Res } F(p)]_{p=p_i} = [(p - p_i) F(p)]_{p=p_i} = \left[\frac{A(p)}{B'(p)} \right]_{p=p_i}, \quad (17.2)$$

где $B'(p)$ — производная от $B(p)$ по p ;

г) нули функции $F(p)$ лежат в левой полуплоскости, а если имеются нули, расположенные на мнимой оси, то они могут быть только простыми (не кратными);

д) вещественная часть функции $F(p)$ при чисто мнимых значениях p (т. е. на мнимой оси, где $p = j\omega$) неотрицательна, т. е. $\text{Re} [F(j\omega)] \geq 0$.

Пример дан в задаче 17.1.

4. Проверка положительности и вещественности функций в общем виде. Условие п. в. ф. сформулировано в п. 2, а их проверка — в п. 3. Проверка условий, указанных в пп. а) и б), затруднений не вызывает и является очевидной; в пп. в) и г) осуществляется проверка того, что корни полиномов $A(p) = 0$ и $B(p) = 0$ находятся в левой полуплоскости или лежат на мнимой оси, но в последнем случае они являются простыми. Иными словами, надо убедиться в том, что полиномы $A(p)$ и $B(p)$ являются полиномами Гурвица*. Проверка того, что каждый из полиномов $A(p)$ и $B(p)$ является полиномом Гурвица, может быть осуществлена различными способами. Укажем один из них.

Если четную часть полинома $A(p)$ обозначить через $m_1(p)$, а нечетную — через $n_1(p)$, то если отношение $m_1(p)/n_1(p)$ представляет собой функцию реактивного сопротивления (см. п. 5 основных положений и соотношений), то $A(p)$ есть полином Гурвица (или полином Гурвица, умноженный на четный полином).

Выяснить, является ли $m_1(p)/n_1(p)$ функцией реактивного сопротивления, можно двояко (см. п. 5 основных положений и соотношений):

* Полином $A(p) = a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_k p^k + \dots + a_1 p + a_0$ называется полиномом Гурвица, если все его коэффициенты a_k вещественны и положительны, ни один из них не равен нулю (за исключением случаев, когда нулю равны все коэффициенты при четных или нечетных степенях p), а все его нули лежат в левой полуплоскости или на мнимой оси (нули на оси $j\omega$ должны быть простые).

- 1) разложением указанного отношения на элементарные дроби;
- 2) представлением его в виде цепной дроби.

При разложении (17.1) на элементарные дроби приходится определять вычеты функции $F(p)$, которые должны быть положительны. Если в одном из нулей $n_1(p)$ вычет окажется равным нулю, то это будет указывать на то, что этот нуль является одновременно и нулем функции $A(p)$. Этот нуль легко выделить из $A(p)$, что приведет к упрощению $A(p)$ (см. пример в задаче 17.16 п. 2).

Проверка функции $A(p)$ проводится аналогично проверке функции $B(p)$.

Наконец, остается проверить вещественность заданной входной функции $[Z(p)$ или $Y(p)]$, т. е. что ее вещественная часть на мнимой оси (при $p = j\omega$) неотрицательна (п. 3, 4 основных положений и соотношений).

Если задана

$$Z(p) = \frac{m_1(p) + n_1(p)}{m_2(p) + n_2(p)}, \quad (17.3)$$

где $m_1(p)$ и $n_1(p)$ — соответственно четная и нечетная части числителя, $m_2(p)$ и $n_2(p)$ — знаменателя, то ее вещественная часть при $p = j\omega$ будет

$$[\operatorname{Re} Z(p)]_{p=j\omega} = \operatorname{Re} Z(j\omega) = U(\omega^2) = \frac{N(\omega^2)}{D(\omega^2)} = \frac{m_1 m_2 - n_1 n_2}{m_2^2 - n_2^2} \Big|_{p=j\omega} \quad (17.4)$$

и является четной функцией ω . Очевидно, последнее выражение при всех частотах должно быть больше или равно нулю. Знаменатель последнего выражения всегда положителен, поэтому значение отношения (17.4) будет положительным, если его числитель положителен. Если ввести обозначение $x = \omega^2$, то должно быть

$$N(x) = m_1 m_2 - n_1 n_2 \geq 0. \quad (17.5)$$

Проверка последнего условия может быть осуществлена на основании теории, разработанной Штурмом. Суть ее такова. В рассмотрение вводится ряд вспомогательных функций, называемых функциями Штурма*. Дадим определение этих функций. Первой функцией Штурма является рассматриваемая функция $N(x)$, которую обозначают через $N_0(x)$. Ее производная $N_0'(x)$, обозначаемая через $N_1(x)$, называется второй функцией Штурма. Третьей функцией Штурма $N_2(x)$ является остаток от деления первой функции Штурма $N_0(x)$ на вторую $N_1(x)$, взятый с обратным знаком, т. е. $N_2(x)$ равно первому остатку, взятому с обратным знаком, при этом процесс деления заканчивается,

* Формулировка теоремы Штурма: если вещественные числа x_1 и x_2 ($x_1 < x_2$) не являются корнями полинома $N_0(x)$, не имеющего кратных корней, то число изменений по знаку функций Штурма $W(x_1) \geq W(x_2)$ и разность $W(x_1) - W(x_2)$ равна числу вещественных корней функции $N_0(x)$, заключенных между x_1 и x_2 .

когда высшая степень x остатка будет на единицу меньше высшей степени x функции $N_1(x)$. Четвертой функцией Штурма $N_3(x)$ называется остаток от деления третьей функции Штурма $N_2(x)$ на вторую функцию Штурма $N_1(x)$ с обратным знаком; процесс деления также заканчивается, когда высшая степень x остатка будет на единицу меньше высшей степени x делителя $N_2(x)$. Итак, $N_3(x)$ равно второму остатку, взятому с обратным знаком. Аналогично определяют пятую $N_4(x)$, шестую $N_5(x)$ и т. д. функции Штурма. Процесс деления заканчивается, когда последним остатком будет вещественная величина.

Найдя функции Штурма, определяют их знаки (обозначенные «+» и «-») для значений x_1 и x_2 на границе всего диапазона изменения частот, т. е. при $\omega_1 = 0$ (чему соответствует $x_1 = 0$) и $\omega_2 = \infty$ (т. е. $x_2 = \infty$).

Для значения $x_1 = 0$ определяют число изменений знаков $W(x_1)$ всех функций Штурма, которые получаются из сопоставления знаков для каждых двух рядом стоящих функций: если они одинаковы, то изменение знака равно нулю, а если они разные, то изменение знака равно единице. Если значения каких-либо функций Штурма равны нулю, то они из рассмотрения отбрасываются. Аналогично определяется число изменений знаков $W(x_2)$ всех функций Штурма при x_2 . Например, для функций Штурма, представленных в табл. 17.1, число изменений знаков при x_1 $W(x_1) = 3$: одно изменение при переходе от $N_0(x_1)$, другое — от $N_2(x_1)$ к $N_3(x_1)$ и третье — от $N_3(x_1)$ к $N_4(x_1)$, а при $x = \infty$ $W(x_2) = W(\infty)$ одно изменение [при переходе от $N_0(x_2)$ к $N_1(x_2)$].

Таблица 17.1

$N(x)$ x	$N_0(x)$	$N_1(x)$	$N_2(x)$	$N_3(x)$	$N_4(x)$	Число изменений по знаку $W(x)$
$x = x_1$	+	-	-	+	-	3
$x = x_2$	+	-	0	-	-	1

Затем определяют разность числа изменений по знаку $W(x_1) - W(x_2)$.

В рассмотренном примере эта разность равна двум:

$$W(x_1) - W(x_2) = 3 - 1 = 2.$$

Если указанная разность числа изменений знаков равна нулю, т. е. $W(x_1) - W(x_2) = 0$, то функция $N(x)$ во всем интервале изменения x не меняет своего знака, и если $N(x)$ при $x = 0$ положительна, то она удовлетворяет требованию (17.5), т. е. является положительной вещественной функцией.

Примеры даны в задачах 17.16 и 17.17.

5. Синтез реактивных двухполюсников (т. е. двухполюсников, состоящих только из индуктивностей и емкостей). Функции сопротив-

ления $Z_{LC}(p)$ и проводимости $Y_{LC}(p)$ таких двухполюсников называются реактивными функциями. Нули и полюсы реактивной функции простые и лежат на мнимой оси $j\omega$, взаимно чередуясь. Значения реактивной функции $F(j\omega)$ на мнимой оси $j\omega$ являются чисто мнимыми и возрастают в точках непрерывности с ростом частоты $\frac{dF(j\omega)}{d(j\omega)} > 0$.

Признаком реактивной рациональной функции является то, что либо полином числителя четный ($a_0 + a_2p^2 + a_4p^4 + \dots$), а полином знаменателя нечетный ($b_1p + b_3p^3 + b_5p^5 + \dots$), либо наоборот.

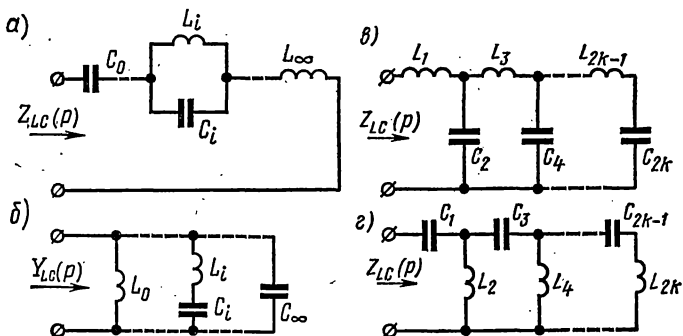


Рис. 17.1

Функция реактивного сопротивления может быть разложена на простые дроби в следующем виде:

$$Z_{LC}(p) = k_{\infty} p + \frac{k_0}{p} + \sum_{i=1}^n \frac{2k_i p}{p^2 + \omega_i^2}, \quad (17.6)$$

где k_{∞} — вычет функции $Z_{LC}(p)$ в полюсе $p = \infty$ (или для инверсной величины в полюсе $p = 0$); k_0 — вычет в полюсе $p = 0$, k_i — вычет в полюсе $p_i = j\omega_i$.

Схема реализации функции $Z_{LC}(p)$ имеет вид первой формы Фостера (рис. 17.1, а) — последовательное соединение параллельных LC-контуров. Ее элементы находятся по формулам:

$$L_{\infty} = k_{\infty}; \quad C_0 = \frac{1}{k_0}; \quad L_i = \frac{2k_i}{\omega_i^2}; \quad C_i = \frac{1}{2k_i}. \quad (17.7a)$$

Это следует из того, что в операторной форме индуктивное сопротивление записывается в виде $pL = k_{\infty}p$, емкостное $1/pC = k_0/p$, сопротивление параллельного контура, состоящего из L_i и C_i , равно

$$Z_{LC}(p) = \frac{pL_i \cdot \frac{1}{pC_i}}{pL_i + \frac{1}{pC_i}} = \frac{\frac{1}{C_i} p}{p^2 + \frac{1}{L_i C_i}} = \frac{2k_i p}{p^2 + \omega_i^2}. \quad (17.7б)$$

Функция реактивной проводимости может быть разложена на простые дроби в следующем виде:

$$Y_{LC}(p) = k'_\infty p + \frac{k'_0}{p} + \sum_{i=1}^n \frac{2k'_i p}{p^2 + \omega_i'^2}, \quad (17.8)$$

где k'_∞ и k'_0 — вычеты функции $Y_{LC}(p)$ в полюсах $p = \infty$ и $p = 0$;
 k'_i — вычет в полюсе $p_i = j\omega_i'$.

Схема реализации имеет вид второй формы Фостера (рис. 17.1, б), т. е. параллельное соединение последовательных LC -ветвей. Ее элементы находятся по формулам:

$$L_0 = \frac{1}{k'_0}; \quad C_\infty = k'_\infty; \quad L_i = \frac{1}{2k'_i}; \quad C_i = \frac{2k'_i}{\omega_i'^2}. \quad (17.9a)$$

Это вытекает из того, что в операторной форме индуктивная проводимость имеет вид $1/pL_i = k'_0/p$, емкостная проводимость $pC_i = k'_\infty p$, а проводимость последовательно соединенных элементов L_i и C_i равна

$$Y_i(p) = \frac{1}{pL_i + \frac{1}{pC_i}} = \frac{\frac{1}{L_i} p}{p^2 + \frac{1}{L_i C_i}} = \frac{2k'_i p}{p^2 + \omega_i'^2}. \quad (17.9б)$$

Пример дан в задаче 17.5.

Две другие формы реализации могут быть получены разложением заданной функции сопротивления (или проводимости) в цепную дробь, начиная деление с высших (или низших) степеней p . Разложение, например, $Z(p)$ в цепную дробь имеет вид

$$Z(p) = Z_1(p) + \frac{1}{Y_2(p) + \frac{1}{Z_3(p) + \frac{1}{Y_4(p) + \dots + \frac{1}{Z_{n-1}(p) + \frac{1}{Y_n(p)}}}}}. \quad (17.10)$$

Этому выражению соответствует цепная (лестничная) схема.

Для реактивных цепей схемы реализации имеют вид схем, соответствующих первой (рис. 17.1, в) и второй (рис. 17.1, г) формам Каузера.

Пример дан в задаче 17.5.

6. Синтез двухполюсников, состоящих из активных сопротивлений и емкостей.

Особенности функции $Z_{rC}(p)$:

а) высшая степень полинома числителя меньше или равна высшей степени полинома знаменателя;

б) все полюсы и нули расположены на отрицательной вещественной полуоси и взаимно чередуются, причем ближайшим к началу координат является полюс (он может, в частности, находиться и в начале координат).

Особенности функции $Y_{rC}(p)$:

а) высшая степень полинома числителя больше или равна высшей степени полинома знаменателя;

б) полюсы и нули расположены на отрицательной вещественной полуоси, причем первым является нуль.

Функция сопротивления $Z_{rC}(p)$ может быть разложена на следующие простые дроби:

$$Z_{rC}(p) = k_{\infty} + \frac{k_0}{p} + \sum_{i=1}^n \frac{k_i}{p + \sigma_i}, \quad (17.11)$$

где k_{∞} , k_0 и k_i — вычеты функции Z_{rC} в бесконечно удаленной точке (в полюсе $p = \infty$), в начале координат (в полюсе $p = 0$) и в полюсах $-\sigma_i$.

Схема реализации функции $Z_{rC}(p)$ по формуле (17.11) имеет вид первой формы Фостера (рис. 17.2, а) — последовательное соединение параллельных r , C -контуров. Ее элементы вычисляются по формулам:

$$r_{\infty} = k_{\infty}; \quad C_0 = 1/k_0; \quad r_i = k_i/\sigma_i; \quad C_i = 1/k_i. \quad (17.12a)$$

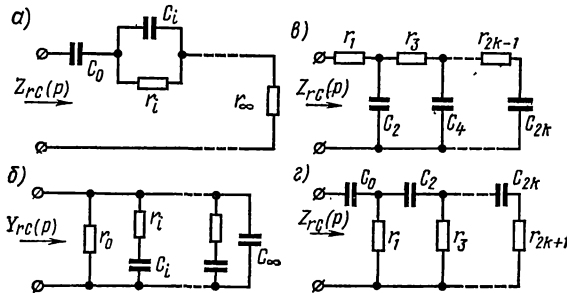


Рис. 17.2

Это вытекает из того, что в операторной форме активное сопротивление выражается действительным числом $r_{\infty} = k_{\infty}$, емкостное сопро-

тивление $1/pC = k_0/p$, а сопротивление параллельного контура, состоящего из r_i и C_i , равно

$$Z_i(p) = \frac{\frac{1}{pC_i} r_i}{\frac{1}{pC_i} + r_i} = \frac{\frac{1}{C_i}}{p + \frac{1}{r_i C_i}} = \frac{k_i}{p + \sigma_i} \quad (17.126)$$

Аналогично функция проводимости $Y_{rC}(p)$ может быть разложена на простые дроби:

$$Y_{rC}(p) = k'_\infty p + k'_0 + \sum_{i=1}^n \frac{k'_i p}{p + \sigma'_i}, \quad (17.13)$$

где k'_∞ , k'_0 и k'_i — вычеты функций $\frac{1}{p} Y_{rC}(p)$ в полюсах $p = \infty$, $p = 0$ и $p = \sigma'_i$.

Схема реализации функции $Y_{rC}(p)$ по формуле (17.13) имеет вид второй формы Фостера, показанной на рис. 17.2, б, т. е. параллельное соединение последовательных rC -ветвей. Ее элементы определяются по формулам:

$$r_0 = 1/k'_0; \quad C_\infty = k'_\infty; \quad r_i = 1/k'_i; \quad C_i = k'_i/\sigma'_i. \quad (17.14a)$$

Это следует из того, что в операторной форме активная проводимость $1/r_0 = k'_i$ есть действительное число, емкостная проводимость записывается в виде $pC_\infty = pk'_\infty$, а проводимость ветви, состоящей из последовательно соединенных элементов r_i и C_i , равна

$$Y_i(p) = \frac{1}{r_i + \frac{1}{pC_i}} = \frac{\frac{1}{r_i} p}{p + \frac{1}{r_i C_i}} = \frac{k'_i p}{p + \sigma'_i}. \quad (17.14б)$$

По аналогии с LC -цепью можно получить две другие формы реализации разложением заданной функции сопротивления $Z_{rC}(p)$ [или проводимости $Y_{rC}(p)$] в цепную дробь, начиная деление с высших или низших степеней p . Схемы реализации имеют вид цепных (лестничных) схем, соответствующих первой (рис. 17.2, в) и второй (рис. 17.2, г) формам Кауэра.

Пример дан в задаче 17.7.

7. Синтез двухполюсников, состоящих из активных сопротивлений и индуктивностей.

Особенности функции $Z_{rL}(p)$:

а) высшая степень полинома числителя больше или равна высшей степени полинома знаменателя;

б) полюсы и нули расположены на отрицательной вещественной полуоси и чередуются, при этом первым к началу координат распо-

ложен нуль; в начале координат может располагаться только нуль, в бесконечности может быть только полюс.

Свойства функции $Z_{rL}(p)$, очевидно, обратны свойствам функции $Z_{rL}(p)$.

Функции $Z_{rL}(p)$ и $Y_{rL}(p)$ могут быть разложены на простые дроби:

$$Z_{rL}(p) = k_{\infty}p + k_0 + \sum_{i=1}^n \frac{k_i p}{p + \sigma_i}; \quad (17.15)$$

$$Y_{rL}(p) = k'_{\infty} + \frac{k'_0}{p} + \sum_{i=1}^n \frac{k'_i}{p + \sigma'_i}, \quad (17.16)$$

где k_{∞} , k_0 и k_i — вычеты функции $\frac{1}{p}Z_{rL}(p)$;

k'_{∞} , k'_0 и k'_i — вычеты функции $Y_{rL}(p)$ в точках $p = \infty$, $p = 0$ и $p = -\sigma_i$ либо $p = -\sigma'_i$.

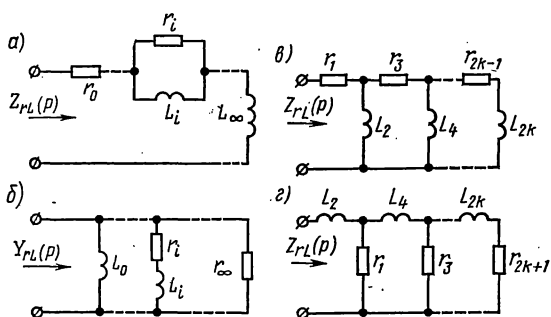


Рис. 17.3

Схемы реализации по формулам (17.15) и (17.16) имеют вид соответственно первой и второй форм Фостера и показаны на рис. 17.3, а и б. Их элементы вычисляются по формулам:

$$r_0 = k_0; \quad L_{\infty} = k_{\infty}; \quad r_i = k_i; \quad L_i = k_i/\sigma_i; \quad (17.17)$$

$$\left. \begin{aligned} r_{\infty} &= 1/k'_{\infty}, \quad L_0 = 1/k'_0; \\ r_i &= \sigma'_i/k'_i, \quad L_i = 1/k'_i. \end{aligned} \right\} \quad (17.18)$$

Это следует из того, что сопротивление ветви, состоящей из параллельно соединенных элементов r_i и L_i , равно

$$Z_i(p) = \frac{pL_i r_i}{pL_i + r_i} = \frac{r_i p}{p + \frac{r_i}{L_i}} = \frac{k_i p}{p + \sigma'_i}. \quad (17.19)$$

Проводимость ветви, состоящей из последовательно соединенных элементов r_i и L_i , равна

$$Y_i(p) = \frac{1}{pL_i + r_i} = \frac{\frac{1}{L_i}}{p + \frac{r_i}{L_i}} = \frac{k'_i}{p + \sigma'_i}. \quad (17.20)$$

Следует заметить, что функция сопротивления двухполюсника из элементов r, L аналогична функции проводимости двухполюсника из элементов r, C , а функция проводимости двухполюсника из элементов r, L аналогична функции сопротивления из элементов r, C .

Разлагая функцию сопротивления $Z_{rL}(p)$ [проводимости $Y_{rL}(p)$] в цепную дробь, начиная деление с высших или низших степеней p , можно получить схемы Кауэра (рис. 17.3, в и г).

Пример дан в задаче 17.9.

8. Синтез двухполюсников, состоящих из активных сопротивлений, индуктивностей и емкостей. Реализация двухполюсников общего вида возможна одним из следующих методов:

1) Выделение из $Z(p)$ чисто мнимых полюсов (если они имеются) и реализация их в виде последовательного соединения элементов цепей без потерь, т. е.

$$Z(p) = k_\infty p + \frac{k_0}{p} + \sum_{i=1}^n \frac{2k_i p}{p^2 + \omega_i^2} + Z_1(p). \quad (17.21)$$

Первые два слагаемых и Σ реализуются в виде реактивных элементов, показанных на рис. 17.4, а. Далее, если функция $Z_1(p)$ имеет нули на мнимой оси, то их выделяют из функции проводимости $Y_1(p)$ в следующем виде:

$$Y_1(p) = \frac{1}{Z_1(p)} = k'_\infty p + \frac{k'_0}{p} + \sum_{i=1}^m \frac{2k'_i p}{p^2 + \omega_i'^2} + \frac{1}{Z_2(p)}. \quad (17.22)$$

Этот этап реализации показан на рис. 17.4, б.

Если $Z_2(p)$ имеет полюсы на мнимой оси, то они вновь выделяются по аналогии с предыдущим [см. формулу (17.21)]. Наконец, в результате будет получена функция $Z_2(p)$, не имеющая полюсов и нулей на мнимой оси. Такая функция называется *функцией минимального реактивного сопротивления*. Если нули и полюсы этой функции лежат на отрицательной вещественной полуоси, то они реализуются в виде элементов r, L и (или) r, C .

Пример дан в задаче 17.11.

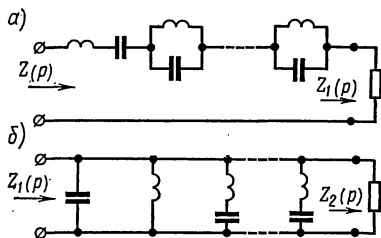


Рис. 17.4

2) Реализация разложением заданной функции в цепную дробь. Примеры приведены в задачах 17.13 и 17.14.

9. **Метод Бруне.** Рассмотренные в пп. 5—8 способы реализации цепи в виде разложения заданной функции $Z(p)$ на элементарные дроби или в цепную дробь не являются достаточно общими. Так, они не могут быть применены, если рассматриваемая функция $Z(p)$ имеет комплексно сопряженные нули и полюсы. В таких случаях применяют другие более общие методы. Одним из них является метод

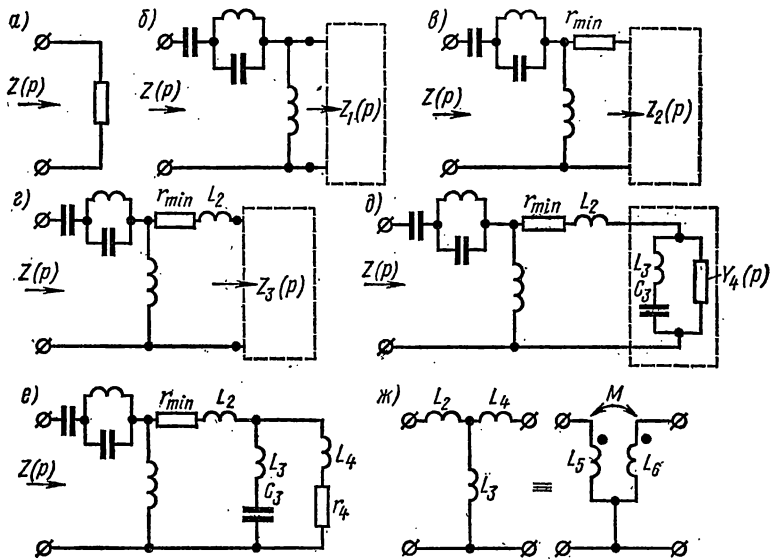


Рис. 17.5

Бруне. Реализация заданной п.в.ф. $Z(p)$ может быть осуществлена в виде следующей последовательности операций:

1) Сначала в любом порядке выделяют все полюсы и нули заданной функции $Z(p)$ на мнимой оси. После этого будет получена функция $Z_1(p)$. Этот этап проводится аналогично тому, как это было рассмотрено в п. 8 основных положений и соотношений. Он соответствует переходу от схемы рис. 17.5, а к схеме рис. 17.5, б [например, если заданная функция $Z(p)$ имеет полюсы в точках $p = 0$ и $p = \pm j\omega_k$ и после их выделения имеет нуль в начале координат].

2) Далее находят частоту ω_0 , при которой вещественная часть $Z_1(p)$ при $p = j\omega$ [т. е. $\text{Re } Z_1(p)|_{p=j\omega} = \text{Re } Z_1(j\omega)$] минимальна. Эта частота может равняться либо нулю, либо бесконечности, либо иметь конечное значение ω_0 . Для этой частоты подсчитывают минимальную вещественную величину $\text{Re } Z(j\omega_0)$, которую обозначаем r_{min} .

3) Вычитая сопротивление r_{\min} из $Z_1(p)$; получают

$$Z_2(p) = Z_1(p) - r_{\min}.$$

Эта операция соответствует переходу от схемы рис. 17.5, б к схеме рис. 17.5, в.

4) Если минимальное активное сопротивление r_{\min} имеет место при частоте, равной нулю или бесконечности, то на этой стадии делается попытка реализовать $Z_2(p)$ в виде лестничной схемы. Если же r_{\min} имеет место при некоторой конечной частоте ω_0 , то поступают следующим образом.

5) Вычисляют $Z_2(p)$ при $p = j\omega_0$, которое является чисто мнимой величиной, т. е.

$$Z_2(p)|_{p=j\omega_0} = Z_2(j\omega_0) = jx_2, \quad x_2 = \omega_0 L_2,$$

откуда

$$L_2 = \frac{x_2}{\omega_0}.$$

В этом случае индуктивность L_2 может быть либо положительна, либо отрицательна.

6) Составляют разность $Z_2(p) - pL_2 = Z_3(p)$ и приводят ее к общему знаменателю. Это соответствует переходу от схемы рис. 17.5, в к схеме рис. 17.5, г.

7) Сопротивление $Z_3(p)$ имеет нули на мнимой оси, а ее проводимость $Y_3(p) = 1/Z_3(p)$ имеет на мнимой оси полюсы, им соответствует ветвь из последовательно соединенных L_3 и C_3 , проводимость которой $2k_3p/(p^2 + \omega_0^2)$ (рис. 17.5, д).

8) Наконец, находят оставшуюся для реализации часть проводимости:

$$Y_4(p) = Y_3(p) - 2k_3p/(p^2 + \omega_0^2).$$

9) Реализуют $Y_4(p)$. Ее обратная величина $Z_4(p)$ имеет полюс в бесконечности, выделяя который, получим окончательную схему рис. 17.5, е.

Из трех индуктивностей L_2, L_3, L_4 одна отрицательна. Так как осуществить ее физически невозможно, то прибегают к замене этих трех индуктивностей идеальным трансформатором со взаимной индуктивностью M , коэффициентом трансформации k , равным единице. Эта операция замены обратна «развязке» двух индуктивно связанных цепей (см. п. 5 основных положений и соотношений гл. 5). Связь между тремя индуктивностями схемы рис. 17.5, е и 17.5, ж определяется по формулам:

$$M = L_3; \quad L_5 = L_2 + L_3; \quad L_6 = L_4 + M.$$

Примеры приведены в задачах 17.19—17.21.

Существуют и другие способы реализации, рассматриваемые в литературе по синтезу электрических цепей (см., например, [17], [21]).

УПРАЖНЕНИЯ И ЗАДАЧИ

А. Положительные вещественные функции

17.1. Проверить положительность и вещественность функции

$$F(p) = \frac{p^2 + p + 1}{p^2 + p + 4}.$$

Решение. Заданная функция рациональна. Она будет положительной и вещественной, если выполняются все пять требований, указанных в п. 3 основных положений и соотношений. Проверим это. Условие а) выполняется, так как все коэффициенты a_k и b_k положительны. Пункт б) также выполняется, так как наибольшие и наименьшие степени p соответственно в числителе и знаменателе одинаковы.

Для проверки условия в) выясним расположение полюсов $F(p)$. Сначала найдем их, приравняв знаменатель $F(p)$ нулю:

$$p^2 + p + 4 = 0,$$

отсюда $p_{1,2} = -0,5 \pm j0,5\sqrt{15}$, т. е. полюсы лежат в левой полуплоскости, что соответствует выполнению условия.

Проверим выполнимость условия г). Для этого найдем корни числителя $p^2 + p + 1 = 0$:

$p_{1,2} = -0,5 \pm j\sqrt{0,75}$, т. е. нули $F(p)$ лежат в левой полуплоскости, что соответствует выполнению условия.

Наконец, проверим выполнимость условия д). Для этого найдем выражение $F(p)$ на мнимой оси (т. е. при $p = j\omega$) и определим его вещественную часть:

$$\begin{aligned} [F(p)]_{p=j\omega} &= F(j\omega) = \left[\frac{p^2 + p + 1}{p^2 + p + 4} \right]_{p=j\omega} = \frac{-\omega^2 + j\omega + 1}{-\omega^2 + j\omega + 4} = \\ &= \frac{(1 - \omega^2 + j\omega)(4 - \omega^2 - j\omega)}{(4 - \omega^2 + j\omega)(4 - \omega^2 - j\omega)} = \frac{(\omega^2 - 2)^2 + j3\omega}{(4 - \omega^2)^2 + \omega^2}. \end{aligned}$$

Отсюда видно, что вещественная часть этого выражения при любых ω положительна, т. е. условие д) тоже выполняется. Итак, выполняются все пять условий. Следовательно, заданная функция $F(p)$ является п. в. ф.

17.2. Проверить положительность и вещественность функций

$$F(p) = \frac{4p^2 + p + 1}{p^2 + p + 1}; \quad F(p) = \frac{p^2 + p + 2}{2p^2 + p + 1}.$$

17.3. Определить, почему функции

$$\text{а) } F_1(p) = \frac{2}{p^2 + 2p + 2}, \quad \text{б) } F_2(p) = \frac{p^3 + 2p}{p^4 + 2p^2 + 1}, \quad \text{в) } F_3(p) = \frac{3p^2 + p + 1}{p^3 + p^2 + p + 1}$$

не являются положительными вещественными функциями.

17.4. Показать на комплексной плоскости полюсно-нулевое изображение функций:

$$\begin{aligned}
 \text{а) } F(p) &= \frac{p^2 + 4p + 3}{p^2 + 2p}; & \text{б) } F(p) &= \frac{1}{(p+1)(p+2)(p+3)}; \\
 \text{в) } F(p) &= \frac{p}{(p+1)(p^2+p+1)} & \text{и } \text{г) } F(p) &= \frac{p^4 - 1}{p^4 + 5p^2 + 4}.
 \end{aligned}$$

Указать, какие из них являются п. в. ф., а какие таковыми не являются.

Б. Синтез реактивных двухполюсников

17.5. Осуществить реализацию функции сопротивления

$$Z(p) = \frac{8p^4 + 40p^2 + 32}{20p^3 + 45p}$$

разложением на простейшие дроби и разложением в цепную дробь.

Решение. Заданная функция представляет собой отношение четного полинома к нечетному, поэтому она является реактивной функцией (см. п. 5 основных положений и соотношений).

Решим задачу разложением на простейшие дроби [см. формулу (17.6)]. Для этого найдем корни знаменателя:

$$20p^3 + 45p = 5p(4p^2 + 9) = 0,$$

отсюда

$$p_1 = 0, \quad p_{2,3} = \pm j \frac{3}{2}.$$

Так как высшая степень полинома числителя больше высшей степени полинома знаменателя, то делением числителя на знаменатель, начиная с высших степеней p , выделим слагаемое $k_{\infty}p$:

$$\begin{array}{r|l}
 8p^4 + 40p^2 + 32 & \frac{20p^3 + 45p}{5} \\
 8p^4 + 18p^2 & \frac{2}{5}p \\
 \hline
 & 22p^2 + 32
 \end{array}$$

Таким образом,

$$Z(p) = \frac{8p^4 + 40p^2 + 32}{20p^3 + 45p} = \frac{2}{5}p + \frac{22p^2 + 32}{20p^3 + 45p}. \quad (1)$$

В полученном выражении второе слагаемое, обозначаемое $Z_1(p)$, разложим на простые дроби:

$$Z_1(p) = \frac{22p^2 + 32}{20p^3 + 45p} = \frac{k_0}{p} + \frac{2k_1p}{p^2 + \omega_1^2} = \frac{k_0}{p} + \frac{2k_1p}{p^2 + \frac{45}{20}}, \quad (2)$$

где $\omega_1^2 = 45/20 = 9/4$.

Определим k_0 — вычет функции $Z_1(p)$ в точке $p_1 = 0$ (см. замечание к п. 3 основных положений и соотношений):

$$k_0 = [\text{Res } Z_1(p)]_{p=0} = \left[\frac{22p^2 + 32}{60p^2 + 45} \right]_{p=0} = \frac{32}{45}.$$

Вычислим k_1 — вычет $Z_1(p)$ при $p = p_2 = j\frac{3}{2}$ — корень знаменателя последнего слагаемого в выражении $Z_1(p)$:

$$k_1 = [\text{Res } Z_1(p)]_{p=j\frac{3}{2}} = \left[\frac{22p^2 + 32}{60p^2 + 45} \right]_{p=j\frac{3}{2}} = \frac{22 \left(j\frac{3}{2} \right)^2 + 32}{60 \left(j\frac{3}{2} \right)^2 + 45} = \frac{7}{36}.$$

Той же величине $7/36$ равен вычет $Z_1(p)$ при сопряженном значении корня $p = p_3 = -j\frac{3}{2}$.

Учитывая найденные значения k_0 и k_1 , из формул (1) и (2) окончательно получим разложение выражения заданного сопротивления в виде суммы простых дробей:

$$Z(p) = \frac{2}{5} p + \frac{32}{45} + \frac{2 \cdot \frac{7}{36} p}{p^2 + \frac{9}{4}} = \frac{2}{5} p + \frac{1}{\frac{45}{32} p} + \frac{\frac{7}{18} p}{p^2 + \frac{9}{4}}. \quad (3)$$

Первое слагаемое представляет собой индуктивное сопротивление, индуктивность которого равна $2/5$, второе — емкостное сопротивление, емкость которого равна $45/32$, а третье — параллельное соединение индуктивности $14/81$ и емкости $18/7$, вычисленные по формулам (17.7, а):

$$L = \frac{2k_1}{\omega_1^2} = \frac{2 \cdot \frac{7}{36}}{\frac{9}{4}} = \frac{14}{81}, \quad C = \frac{1}{2k_1} = \frac{1}{2 \cdot \frac{7}{36}} = \frac{18}{7}.$$

На рис. 17.6, а приведена схема, составленная на основе формулы (3), т. е. первой формы Фостера. Все величины L и C даны в генри и фарадах (в ряде случаев расчеты ведутся в нормализованных величинах, тогда L и C — величины безразмерные).

Осуществим разложение на простейшие дроби функции проводимости:

$$Y(p) = \frac{1}{Z(p)} = \frac{20p^3 + 45p}{8p^3 + 40p^2 + 32}.$$

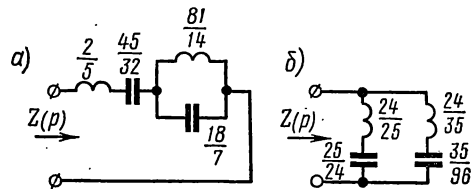


Рис. 17.6

Найдем корни знаменателя этого выражения:

$$8\rho^4 + 40\rho^2 + 32 = 8(\rho^2 + 1)(\rho^2 + 4) = 0,$$

отсюда

$$\rho_{1,2} = \pm j, \rho_{3,4} = \pm j2.$$

Так как наибольшая степень показателя числителя при ρ в выражении $Y(\rho)$ меньше наибольшей степени показателя ρ в знаменателе, то при разложении по формуле (17.8) нет слагаемого $k'_\infty \rho$; нет и слагаемого k'_0/ρ , так как знаменатель $Y(\rho)$ не содержит множителя ρ ; в разложении будут только слагаемые вида $2k'_i \rho / (\rho^2 + \omega_i'^2)$.

Итак,

$$Y(\rho) = \frac{20\rho^3 + 45\rho}{8\rho^4 + 40\rho^2 + 32} = \frac{2k'_1 \rho}{\rho^2 + 1} + \frac{2k'_2 \rho}{\rho^2 + 4}. \quad (4)$$

Найдем k'_1 — вычет $Y(\rho)$ при $\rho = \rho_1 = j$ (он такой же и при $\rho_2 = -j$):

$$k'_1 = [\text{Res } Y(\rho)]_{\rho=j} = \left[\frac{20\rho^3 + 45\rho}{32\rho^3 + 80\rho} \right]_{\rho=j} = \frac{20(-j)^3 + 45j}{32(-j)^3 + 80j} = \frac{25}{48}.$$

Аналогично вычислим k'_2 — вычет $Y(\rho)$ при $\rho = j2$ (такой же вычет и при $\rho = -j2$):

$$k'_2 = [\text{Res } Y(\rho)]_{\rho=j2} = \left[\frac{20\rho^3 + 45\rho}{32\rho^3 + 80\rho} \right]_{\rho=j2} = \frac{20(-j2)^3 + 45 \cdot j2}{32(-j2)^3 + 80 \cdot j2} = \frac{35}{48}.$$

Подставляя найденные значения k'_1 и k'_2 в формулу (4), получим

$$Y(\rho) = \frac{25}{24} \frac{\rho}{\rho^2 + 1} + \frac{35}{24} \frac{\rho}{\rho^2 + 4}. \quad (5)$$

По (17.9а) находим элементы первой параллельной ветви, состоящей из последовательно соединенных

$$L_1 = \frac{1}{2k'_1} = \frac{1}{2 \frac{25}{48}} = \frac{24}{25} \text{ и } C_1 = \frac{2k'_1}{\omega_1'^2} = \frac{2 \frac{25}{48}}{1} = \frac{25}{24},$$

и второй параллельной ветви, состоящей из последовательно соединенных

$$L_2 = \frac{1}{2k'_2} = \frac{1}{2 \frac{35}{48}} = \frac{24}{35} \text{ и } C_2 = \frac{2k'_2}{\omega_2'^2} = \frac{2 \frac{35}{48}}{4} = \frac{35}{96}.$$

По полученным результатам на рис. 17.6, б дана схема, соответствующая уравнению (5), т. е. второй форме Фостера.

Реализуем заданную функцию $Z(p)$ разложением ее в цепную дробь. Это можно сделать двумя способами:

1. Осуществим деление, начиная с высших степеней p . Для этого делим числитель на знаменатель, получим первое слагаемое, и прекращаем деление. При этом высшая степень p остатка числителя станет на два ниже, чем была, и на единицу меньше, чем высшая степень знаменателя. Далее делим делитель на этот остаток и т. д., пока процесс деления не закончится без остатка:

$$\begin{array}{r|l}
 8p^4 + 40p^2 + 32 & \frac{20p^3 + 45p}{\frac{2}{5} p \rightarrow Z_1(p)} \\
 \hline
 8p^4 + 18p^2 & \\
 \hline
 20p^3 + 45p & \frac{22p^2 + 32}{\frac{10}{11} p \rightarrow Y_2(p)} \\
 20p^3 + \frac{320}{11} p & \\
 \hline
 22p^2 + 32 & \frac{175}{11} p \\
 22p^2 & \frac{242}{175} p \rightarrow Z_3(p) \\
 \hline
 \frac{175}{11} p & \frac{32}{\frac{175}{352} p \rightarrow Y_4(p)} \\
 \frac{175}{11} p & \\
 \hline
 0 &
 \end{array}$$

Таким образом, цепная дробь имеет вид

$$Z(p) = \frac{2}{5} p + \frac{1}{\frac{10}{11} p + \frac{1}{\frac{242}{175} p + \frac{1}{\frac{175}{352} p}}}, \quad (6)$$

где $2/5$ и $242/175$ — индуктивности; $10/11$ и $175/352$ — емкости. Это видно из выражения $Z(p)$.

Формуле (6) соответствует схема рис. 17.7, а — первая форма Кауэра. Все величины L и C соответственно в генри и фарадах.

2. Осуществим разложение $Z(p)$ в цепную дробь, начиная деление с низших степеней p :

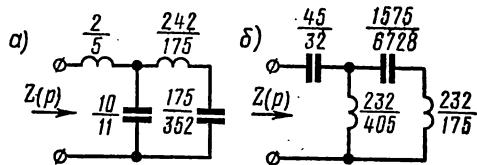


Рис. 17.7

$$\begin{array}{r|l}
 32 + 40p^2 + 8p^4 & \frac{45p + 20p^3}{\frac{32}{45p} \rightarrow Z'_1(p)} \\
 \hline
 32 + \frac{128}{9} p^2 & \\
 \hline
 45p + 20p^3 & \frac{232}{9} p^2 + 8p^4 \\
 \hline
 45p + \frac{405}{29} p^3 & \frac{405}{232p} \rightarrow Y'_2(p) \\
 \hline
 \frac{232}{9} p^2 + 8p^4 & \frac{175}{29} p^3 \\
 \hline
 \frac{232}{9} p^2 & \frac{6728}{1575p} \rightarrow Z'_3(p) \\
 \hline
 \frac{175}{29} p^3 & \frac{8p^4}{\frac{175}{232p} \rightarrow Y'_4(p)} \\
 \hline
 \frac{175}{29} p^3 & \\
 \hline
 \frac{175}{29} p^3 & \\
 \hline
 0 &
 \end{array}$$

Следовательно, получена следующая цепная дробь:

$$Z(p) = \frac{32}{45p} + \frac{1}{\frac{405}{232p} + \frac{1}{\frac{6728}{1575p} + \frac{1}{\frac{175}{232p}}}}, \quad (7)$$

где $45/32$ и $1575/6728$ — емкости; $232/405$ и $232/175$ — индуктивности. Формуле (7) соответствует схема рис. 17.7, б, т. е. вторая форма Кауэра.

17.6. Осуществить реализацию реактивных функций:

$$\begin{array}{l}
 \text{а) } Z(p) = \frac{2p(p+4)}{(p^2+1)}; \quad \text{б) } Z(p) = \frac{p^2+1}{p(p^2+4)}; \\
 \text{в) } Z(p) = \frac{(p^2+1)(p^2+9)}{p(p^2+4)}; \quad \text{г) } Y(p) = \frac{(p^2+1)(p^2+9)}{p(p^2+4)}.
 \end{array}$$

разложением на элементарные дроби и в цепные дроби.

В. Синтез двухполюсников, состоящих из элементов r и C или r и L

17.7. Найти схемы по формам Фостера и Кауэра, реализующие функцию входного сопротивления $Z(p) = \frac{(p+2)(p+4)}{(p+1)(p+3)}$.

Р е ш е н и е. Из выражения данной функции видно, что она определяет цепь, состоящую только из элементов r и C , так как все ее полюсы и нули чередуются и лежат на отрицательной вещественной

полуоси, при этом функция сопротивления первым имеет полюс, а не нуль (см. п. 6 основных положений и соотношений).

Решим задачу методом разложения $Z(p)$ на элементарные дроби [см. формулу (17.11)]. Вначале из $Z(p)$ выделим постоянную величину k_∞ , не зависящую от p и равную:

$$k_\infty = \lim_{p \rightarrow \infty} Z(p) = \lim_{p \rightarrow \infty} \left(\frac{p^2 + 6p + 8}{p^2 + 4p + 3} \right) = 1.$$

Затем, вычтя ее из $Z(p)$, получим

$$Z_1(p) = Z(p) - 1 = \frac{p^2 + 6p + 8}{p^2 + 4p + 3} - 1 = \frac{2p + 5}{p^2 + 4p + 3}.$$

В рассматриваемой задаче в формуле (17.11) $k_0 = 0$, так как функция $Z(p)$ не имеет полюса при $p = 0$.

Итак, согласно (17.11)

$$Z(p) = k_\infty + \frac{k_1}{p + 1} + \frac{k_2}{p + 3}. \quad (1a)$$

Найдем k_1 — вычет функции $Z_1(p)$ при $p = -1$:

$$k_1 = [\text{Res } Z_1(p)]_{p=-1} = \left(\frac{2p + 5}{p + 3} \right)_{p=-1} = \frac{3}{2}.$$

Аналогично вычислим k_2 — вычет функции $Z_1(p)$ при $p = -3$:

$$k_2 = [\text{Res } Z_1(p)]_{p=-3} = \left(\frac{2p + 5}{p + 1} \right)_{p=-3} = \frac{1}{2}.$$

Итак, искомое сопротивление

$$Z(p) = 1 + \frac{\frac{3}{2}}{p + 1} + \frac{\frac{1}{2}}{p + 3}. \quad (1b)$$

Первое слагаемое — активное сопротивление, равное 1; второе слагаемое представляет собой параллельно соединенные активное сопротивление и емкость, вычисляемые по (17.12a):

$$r_1 = \frac{k_1}{\sigma_1} = \frac{\frac{3}{2}}{1} = \frac{3}{2}, \quad C_1 = \frac{1}{k_1} = \frac{1}{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}.$$

Аналогично определяем элементы третьего слагаемого:

$$r_2 = \frac{k_2}{\sigma_2} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{3}} = \frac{1}{6}; \quad C_2 = \frac{1}{k_2} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2.$$

Таким образом, уравнение (16) представляет собой три последовательно соединенные цепочки, первая из которых — активное сопротивление, а каждая из двух остальных — параллельное соединение r и C . Схема реализации изображена на рис. 17.8, *a* (первая форма Фостера). Все величины r и C соответственно в омах и фарадах (если расчеты ведутся в нормализованных величинах, то r и C — безразмерные величины).

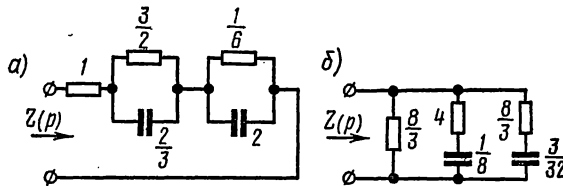


Рис. 17.8

Вторую форму Фостера получим разложением на простые дроби выражения проводимости $Y(p)$, умноженной на $1/p$ [см. формулу (17.13)]:

$$\frac{1}{p} Y(p) = \frac{(p+1)(p+3)}{p(p+2)(p+4)} = \frac{p^2 + 4p + 3}{p^3 + 6p^2 + 8p}; \quad (2a)$$

$$\frac{1}{p} Y(p) = \frac{k'_0}{p} + \frac{k'_1}{p+2} + \frac{k'_2}{p+4}.$$

Выражение (2a) в соответствии с (17.13) не содержит слагаемого k'_∞ , так как $Y(p)$ не имеет полюса при $p = \infty$.

Вычислим коэффициенты k'_0 , k'_1 и k'_2 :

$$k'_0 = \left[\operatorname{Res} \frac{1}{p} Y(p) \right]_{p=0} = \left(\frac{p^2 + 4p + 3}{3p^2 + 12p + 8} \right)_{p=0} = \frac{3}{8};$$

$$k'_1 = \left[\operatorname{Res} \frac{1}{p} Y(p) \right]_{p=-2} = \left(\frac{p^2 + 4p + 3}{3p^2 + 12p + 8} \right)_{p=-2} = \frac{1}{4};$$

$$k'_2 = \left[\operatorname{Res} \frac{1}{p} Y(p) \right]_{p=-4} = \left(\frac{p^2 + 4p + 3}{3p^2 + 12p + 8} \right)_{p=-4} = \frac{3}{8}.$$

Подставляя найденные значения k'_0 , k'_1 и k'_2 в формулу (2a) и умножая обе части равенства на p , получим выражение проводимости $Y(p)$ в виде суммы простых дробей:

$$Y(p) = \frac{3}{8} + \frac{1}{4} \frac{p}{p+2} + \frac{7}{8} \frac{p}{p+4}. \quad (26)$$

Первое слагаемое представляет собой активное сопротивление, равное $8/3$; второе и третье слагаемые — последовательно соединенные цепочки, составленные из r и C . Их элементы рассчитываем по (17.14а):

$$r_1 = \frac{1}{k'_1} = \frac{1}{\frac{1}{4}} = 4; C_1 = \frac{k'_1}{\sigma_1} = \frac{\frac{1}{4}}{2} = \frac{1}{8};$$

$$r_2 = \frac{1}{k'_2} = \frac{1}{\frac{3}{8}} = \frac{8}{3}; C_2 = \frac{k'_2}{\sigma_2} = \frac{\frac{3}{8}}{4} = \frac{3}{32}.$$

Таким образом, схема реализации по формуле (2б) имеет вид рис. 17.8, б (см. также рис. 17.2, б).

Осуществим реализацию разложением $Z(p)$ в цепную дробь. Начнем деление с высших степеней p , поступая аналогично тому, как это было сделано при решении задачи 17.5:

$$\begin{array}{r} p^2 + 6p + 8 \quad | \quad p^2 + 4p + 3 \\ p^2 + 4p + 3 \quad | \quad 1 \rightarrow Z_1(p) \\ \hline 2p + 5 \\ p^2 + \frac{5}{2}p \quad | \quad \frac{1}{2} \rightarrow Y_2(p) \\ \hline 2p + 5 \quad | \quad \frac{3}{2}p + 3 \\ 2p + 4 \quad | \quad \frac{4}{3} \rightarrow Z_3(p) \\ \hline \frac{3}{2}p + 3 \quad | \quad 1 \\ \frac{3}{2}p \quad | \quad \frac{3}{2}p \rightarrow Y_4(p) \\ \hline 1 \quad | \quad 3 \\ \frac{1}{0} \quad | \quad \frac{1}{3} \rightarrow Z_5(p) \end{array}$$

Итак, получена следующая цепная дробь:

$$Z(p) = 1 + \frac{1}{\frac{1}{2}p + \frac{1}{\frac{4}{3} + \frac{1}{\frac{3}{2}p + \frac{1}{3}}}}, \quad (3)$$

где 1, 4/3 и 1/3 — активные сопротивления; 1/2 и 3/2 — емкости.

Схема реализации по формуле (3) представлена на рис. 17.9, а (см. также рис. 17.2, в), т. е. первая форма Кауэра.

Осуществим разложение в цепную дробь, начиная деление с низших степеней p , предварительно инвертируя дробь, переписав ее в следующем виде:

$$Z(p) = \frac{1}{\frac{3 + 4p + p^2}{8 + 6p + p^2}}$$

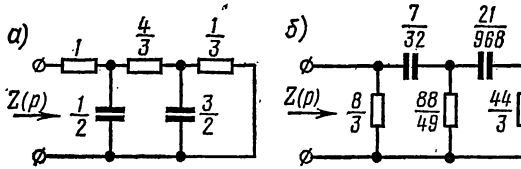


Рис. 17.9

Заметим, что непосредственное до инвертирования деление числителя на знаменатель, начиная с низших степеней p , привело бы к отрицательному остатку, что не имело бы смысла, так как он не может быть реализован положительными элементами r и C :

$$\begin{array}{r|l} 3 + 4p + p^2 & \frac{8 + 6p + p^2}{3} \rightarrow Y_2(p) \\ 3 + \frac{9}{4}p + \frac{3}{8}p^2 & \\ \hline 8 + 6p + p^2 & \frac{7}{4}p + \frac{5}{8}p^2 \\ 8 + \frac{20}{7}p & \frac{32}{7p} \rightarrow Z_3(p) \\ \hline \frac{7}{4}p + \frac{5}{8}p^2 & \frac{22}{7}p + p^2 \\ \frac{7}{4}p + \frac{49}{88}p^2 & \frac{49}{88} \rightarrow Y_4(p) \\ \hline \frac{22}{7}p + p^2 & \frac{3}{44}p^2 \\ \frac{22}{7}p & \frac{968}{21p} \rightarrow Z_5(p) \\ \hline \frac{3}{44}p^2 & p^2 \\ \frac{3}{44}p^2 & \frac{3}{44} \rightarrow Y_6(p) \\ \hline 0 & \end{array}$$

Таким образом, получена следующая цепная дробь:

$$Z(p) = \frac{1}{\frac{3}{8} + \frac{1}{\frac{32}{7p} + \frac{1}{\frac{49}{88} + \frac{1}{\frac{968}{21p} + \frac{1}{\frac{3}{44}}}}}}, \quad (4)$$

где $3/8$ — активная проводимость, соответствующая активному сопротивлению $8/3$;

$32/7p$ — емкостное сопротивление, соответствующее емкости $7/32$, и т. д.

Схема реализации по формуле (4) приведена на рис. 17.9, б (см. также рис. 17.2, а) — вторая форма Кауэра.

17.8. Требуется построить канонические схемы двухполюсников, состоящих из элементов r и C , по заданным входным функциям путем разложения на простейшие дроби и в непрерывные дроби:

$$а) Z(p) = \frac{(p+1)(p+3)}{p(p+2)}; \quad б) Y(p) = \frac{(p+1)(p+4)}{p+2}.$$

17.9. По функции входного сопротивления $Z(p) = \frac{5p+2}{4p+3}$ осуществить реализацию двухполюсника.

Решение. Найдем полюсы и нули функции. Полюс равен $-\frac{3}{4}$, а нуль $-\frac{2}{5}$. Так как оба они лежат на отрицательной действительной полуоси и ближайшим к началу координат является нуль $\left(\frac{2}{5} < \frac{3}{4}\right)$, то заданная функция может быть реализована простейшим образом из элементов r и L (см. п. 7 основных положений и соотношений).

1. Найдем схему, получающуюся в результате разложения $Z(p)$ на простые дроби по формуле (17.15). Вычислим входящие в нее коэффициенты k_∞ , k_0 и k_1 . Коэффициент $k_\infty = 0$, так как высшие степени относительно p числителя и знаменателя одинаковы, и это означает, что $Z(p)$ не имеет полюса в бесконечности. Коэффициенты k_0 и k_1 — вычеты функции $\frac{1}{p} Z(p)$ соответственно при $p = 0$ и $p = -\sigma_1 = -\frac{3}{4}$:

$$k_0 = \left[\operatorname{Res} \frac{1}{p} Z(p) \right]_{p=0} = \left[\operatorname{Res} \frac{5p+2}{p(4p+3)} \right]_{p=0} = \left[\frac{5p+2}{8p+3} \right]_{p=0} = \frac{2}{3};$$

$$k_1 = \left[\operatorname{Res} \frac{1}{p} Z(p) \right]_{p=-\frac{3}{4}} = \left[\frac{5p+2}{8p+3} \right]_{p=-\frac{3}{4}} = \frac{7}{3}.$$

Итак, заданная функция в соответствии с формулой (17.15) может быть представлена в следующем виде:

$$Z(p) = k_0 + \frac{k_1 p}{p + \sigma} = \frac{2}{3} + \frac{\frac{7}{12} p}{p + \frac{3}{4}}. \quad (1)$$

Здесь первое слагаемое [см. формулу (17.17)] — активное сопротивление $r_0 = 2/3$. Второе слагаемое выражает параллельно соединенные r_1 и L_1 , вычисляемые по (17.17):

$$r_1 = k_1 = \frac{7}{12}, \quad L_1 = \frac{k_1}{\sigma_1} = \frac{\frac{7}{12}}{\frac{3}{4}} = \frac{7}{9}.$$

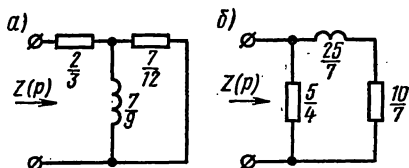


Рис. 17.10

Согласно формуле (1) схема состоит из последовательно соединенных активного сопротивления r_0 и параллельной $r_1 L_1$ -цепочки (рис. 17.10, а), т. е. является первой формой Фостера.

Осуществим реализацию по второй форме Фостера. Для этого разложим функцию проводимости $Y(p) = \frac{4p + 3}{5p + 2}$ на простые дроби по формуле (17.16). Найдем коэффициенты k'_∞ , k'_0 и k'_1 :

$$k'_\infty = [\text{Res } Y(p)]_{p=\infty} = \left[\frac{4p + 3}{5p + 2} \right]_{p=\infty} = \frac{4}{5}.$$

Коэффициент $k'_0 = 0$, так как функция $Y(p)$ не имеет полюса в точке $p = 0$. Наконец определим k'_1 — вычет функции $Y(p)$ при $p = \sigma_1 = -\frac{2}{5}$:

$$k'_1 = [\text{Res } Y(p)]_{p=-\frac{2}{5}} = \left[\frac{4p + 3}{5} \right]_{p=-\frac{2}{5}} = \frac{7}{25}.$$

Итак, на основании формулы (17.16) функция входной проводимости

$$Y(p) = \frac{4}{5} + \frac{\frac{7}{25}}{p + \frac{2}{5}}. \quad (2)$$

Соответствующая этому выражению схема рис. 17.10, б состоит из двух параллельных ветвей: в первой ветви активная проводимость $4/5$ (или сопротивление $r_\infty = 1/k'_\infty = 5/4$), а вторая ветвь — последо-

вательно соединенные активное сопротивление r_1 и индуктивность L_1 , определяемые по формулам (17.18):

$$r_1 = \frac{\sigma_1'}{k_1'} = \frac{\frac{2}{5}}{\frac{7}{25}} = \frac{10}{7}, \quad L_1 = \frac{1}{k_1'} = \frac{1}{\frac{7}{25}} = \frac{25}{7}.$$

2. Найдем цепные схемы, получающиеся в результате разложения заданной функции $Z(p)$ на цепные дроби. Если начать деление непосредственно с высших степеней p , то получится отрицательный остаток, указывающий на невозможность реализации цепи положительными элементами.

Деление с низших степеней p приводит к возможной реализации. Действительно,

$$\begin{array}{r|l} 2 + 5p & \frac{3 + 4p}{3} \\ 2 + \frac{8}{3}p & \frac{2}{3} \rightarrow Z_1(p) \\ \hline 3 + 4p & \frac{7}{3}p \\ \frac{7}{3}p & \frac{9}{7p} \rightarrow Y_2(p) \\ \frac{7}{3}p & \frac{4p}{7} \\ \frac{7}{3}p & \frac{7}{12} \rightarrow Z_3(p) \\ \hline 0 & \end{array}$$

Итак,

$$Z(p) = \frac{2 + 5p}{3 + 4p} = \frac{2}{3} + \frac{1}{\frac{9}{7p} + \frac{1}{12}}, \quad (3)$$

где $2/3$ и $7/12$ — активные сопротивления; $9/7p$ — индуктивная проводимость, имеющая индуктивность $7/9$.

Схема реализации по уравнению (3) та же, что и схема рис. 17.10, а (схема Кауэра).

Наконец получим еще одну форму Кауэра, представив входное сопротивление в виде

$$Z(p) = \frac{5p + 4}{4p + 3} = \frac{1}{\frac{4p + 3}{5p + 4}}$$

и разложив знаменатель в цепную дробь, начиная деление с высших степеней p :

$$\begin{array}{r|l}
 4p + 3 & 5p + 2 \\
 4p + \frac{8}{5} & \frac{4}{5} \rightarrow Y_2(p) \\
 \hline
 5p + 2 & 7 \\
 5p & \frac{7}{5} \\
 \hline
 & \frac{25}{7} \quad p \rightarrow Z_3(p) \\
 & \frac{7}{7} \\
 \hline
 \frac{7}{5} & 2 \\
 \frac{7}{5} & \frac{7}{10} \rightarrow Y_4(p) \\
 \hline
 0 &
 \end{array}$$

Следовательно,

$$Z(p) = \frac{1}{\frac{4}{5} + \frac{1}{\frac{25}{7}p + \frac{7}{10}}} \quad (4)$$

Этому уравнению соответствует схема рис. 17.10, б. В рассматриваемой задаче были получены всего две (вместо четырех) канонические схемы. Это произошло оттого, что заданная функция имела простой вид. Заметим, что получение всех четырех канонических схем не всегда возможно.

3. Найденные схемы рис. 17.10, а и б являются каноническими (простейшими) и каждая содержит лишь по три элемента. Можно найти еще и другие схемы, содержащие большее число элементов. Например, если сопротивление представить в виде суммы двух таких дробей

$$Z(p) = \frac{5p + 2}{4p + 3} = \frac{5p}{4p + 3} + \frac{2}{4p + 3} = \frac{\frac{5}{4}p}{p + \frac{3}{4}} + \frac{\frac{1}{2}}{p + \frac{3}{4}}, \quad (5)$$

то первое слагаемое — параллельный контур, состоящий из r_1 и L_1 , сопротивление которого определяется по (17.19):

$$Z_1(p) = \frac{pL_1r_1}{pL_1 + r_1} = \frac{pr_1}{p + \frac{r_1}{L_1}} = \frac{\frac{5}{4}p}{p + \frac{3}{4}},$$

отсюда

$$r_1 = \frac{5}{4}, \quad \frac{r_1}{L_1} = \frac{3}{4}, \quad L_1 = \frac{4r_1}{3} = \frac{5}{3};$$

второе слагаемое — также параллельный контур, состоящий из r_2 и C_2 , сопротивление которого находится по (17.12б):

$$Z_2(p) = \frac{\frac{1}{pC_2} r_2}{\frac{1}{pC_2} + r_2} = \frac{\frac{1}{C_2}}{p + \frac{1}{r_2 C_2}} = \frac{\frac{1}{2}}{p + \frac{3}{4}},$$

отсюда

$$\frac{1}{C_2} = \frac{1}{2}, \quad C_2 = 2, \quad \frac{1}{r_2 C_2} = \frac{3}{4}, \quad r_2 = \frac{4}{3C_2} = \frac{2}{3}.$$

Следовательно, формуле (5) соответствует схема рис. 17.11, а.

Можно найти еще одну схему, если записать выражение для проводимости в виде двух слагаемых:

$$Y(p) = \frac{1}{Z(p)} = \frac{4p+3}{5p+2} = \frac{4p}{5p+2} + \frac{3}{5p+2}. \quad (6)$$

Первое слагаемое выражает проводимость последовательно соединенных r_1 и C_1 , а второе — проводимость последовательно соединенных r_2 и L_2 . Схема реализации по уравнению (6) дана на рис. 17.11, б.

17.10. Найти канонические схемы двухполюсников, состоящих из элементов r и L , по заданным входным функциям:

а) $Z(p) = \frac{2p(p+2)}{(p+1)(p+3)}$; б) $Y(p) = \frac{(p+2)(p+4)}{(p+1)(p+3)}$

путем разложения на простейшие дроби и в цепные дроби.

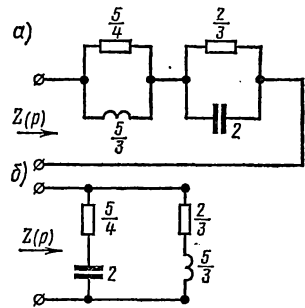


Рис. 17.11

Г. Синтез двухполюсников общего вида. Полином Гурвица. Метод Бруне

17.11. Найти схему и элементы двухполюсника, входное сопротивление которого

$$Z(p) = \frac{p(4p^3 + 10p^2 + 44p + 10)}{(p^2 + 3)(2p^2 + 8p + 1)}$$

Решение. Схему реализации будем искать методом постепенного выделения мнимых полюсов и нулей функции сопротивления (см. п. 8 основных положений и соотношений).

Из выражения $Z(p)$ видно, что имеется пара мнимых полюсов при $p = \pm j\sqrt{3}$. Выделим их. Это рассчитывается так же, как и при синтезе чисто реактивных двухполюсников (см. п. 5 основных по-

ложений и соотношений). Для этого находим вычет k_1 от $Z(p)$ при $p = +j\sqrt{3}$ [см. формулу (17.2)]:

$$k_1 = [\text{Res } Z(p)]_{p=j\sqrt{3}} = \left[\frac{4p^4 + 10p^3 + 44p^2 + 10p}{8p^3 + 24p^2 + 14p + 24} \right]_{p=j\sqrt{3}} = 2.$$

То же значение имеет вычет и при $p = -j\sqrt{3}$.

Таким образом, из $Z(p)$ может быть выделена функция $\frac{2k_1 p}{p^2 + 3} = \frac{4p}{p^2 + 3}$, представляющая собой параллельный контур [см. формулу (17.46)], элементы которого определяются по (17.4а):

$$L_1 = \frac{2k_1}{\omega_1^2} = \frac{2 \cdot 2}{3} = \frac{4}{3}, \quad C_1 = \frac{1}{2k_1} = \frac{1}{2 \cdot 2} = \frac{1}{4}.$$

Поэтому $Z(p) = \frac{4p}{p^2 + 3} + Z_1(p)$ может быть представлено схемой рис. 17.12, а, тогда

$$\begin{aligned} Z_1(p) &= Z(p) - \frac{4p}{p^2 + 3} = \frac{4p^4 + 10p^3 + 44p^2 + 10p}{(p^2 + 3)(2p^2 + 8p + 1)} - \\ &- \frac{4p}{p^2 + 3} = \frac{2p(p + 1)}{2p^2 + 8p + 1}. \end{aligned}$$

Функция сопротивления $Z_1(p)$ имеет нуль при $p = 0$, или функция проводимости

$$Y_1(p) = \frac{1}{Z_1(p)} = \frac{2p^2 + 8p + 1}{2p(2p + 1)}$$

имеет полюс при $p = 0$. Аналогично предыдущему выделим его:

$$[\text{Res } Y_1(p)]_{p=0} = \left[\frac{2p^2 + 8p + 1}{8p + 2} \right]_{p=0} = \frac{1}{2}.$$

Следовательно, проводимость $Y_1(p)$ имеет индуктивность, равную 2, проводимость которой $\frac{1}{pL} = \frac{1}{2p}$, т. е.

$$Y_1(p) = \frac{1}{2p} + Y_2(p),$$

отсюда

$$Y_2(p) = Y_1(p) - \frac{1}{2p} = \frac{2p^2 + 8p + 1}{2p(2p + 1)} - \frac{1}{2p} = \frac{p + 3}{2p + 1}.$$

Инвертируя эту проводимость, получим сопротивление

$$Z_2(p) = \frac{2p + 1}{p + 3}.$$

Поэтому рис. 17.12, а можно представить в виде рис. 17.12, б.
 Функция $Z_2(p)$ — функция минимального реактивного сопротивления, состоит только из элементов r и L , так как она содержит нуль в точке $p = -1/2$, лежащий ближе к началу координат, чем полюс в точке $p = -3$ (см. п. 7 основных положений и соотношений). Функцию $Z_2(p)$ можно разложить на простые дроби (см. п. 7 основных положений и соотношений и решение задачи 17.9):

$$Z_2(p) = \frac{1}{3} + \frac{5}{p+3}$$

и

$$Y_2(p) = \frac{1}{2} + \frac{5}{p + \frac{2}{5}}$$

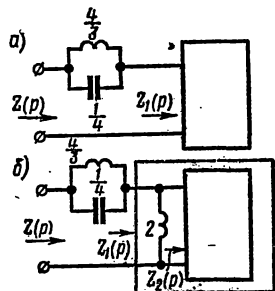


Рис. 17.12

которым соответствуют две схемы рис. 17.13, а и б. Если $Z_2(p)$ представить в виде цепных дробей:

$$Z_2(p) = \frac{1}{\frac{1}{2} + \frac{1}{\frac{4}{5}p + \frac{1}{5}}}, \quad Z_2(p) = \frac{1}{3} + \frac{1}{\frac{9}{5p} + \frac{1}{5}}$$

то будут получены те же схемы.

Окончательно для $Z(p)$ получим схемы в виде рис. 17.14, а или б.

17.12. Используя выделение мнимых полюсов и нулей, найти схемы двухполюсников по их входным сопротивлениям. Даны:

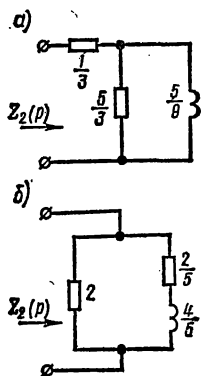


Рис. 17.13

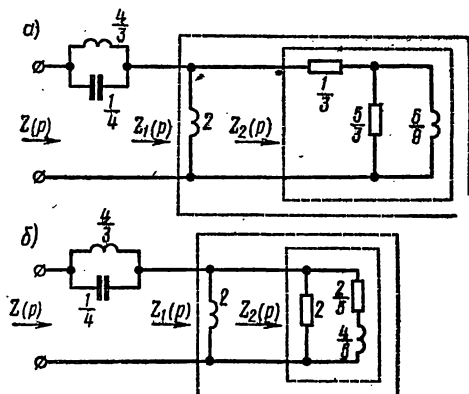


Рис. 17.14

$$a) Z(p) = \frac{8p^3 + 4p^2 + 6p + 2}{p(2p^3 + p^2 + 3p + 1)}; \quad б) Z(p) = \frac{35p^4 + 14p^3 + 66p^2 + 24p + 8}{p(p^2 + 4)(5p^2 + 2p + 1)}$$

17.13. Дана функция входного сопротивления двухполюсника

$$Z(p) = \frac{24p^4 + 58p^3 + 120p^2 + 115p + 20}{12p^3 + 26p^2 + 54p + 45}$$

Реализовать ее, используя метод разложения, в цепную дробь.
Решение. Осуществим разложение в цепную дробь, начиная деление с высших степеней p полиномов:

$$1) \frac{24p^4 + 58p^3 + 120p^2 + 115p + 20}{6p^3 + 12p^2 + 25p + 20} \left| \frac{12p^3 + 26p^2 + 54p + 45}{2p \rightarrow Z_1(p)} \right.;$$

$$2) \frac{12p^3 + 26p^2 + 54p + 45}{2p^2 + 4p + 5} \left| \frac{6p^3 + 12p^2 + 25p + 20}{2 \rightarrow Y_2(p)} \right.;$$

$$3) \frac{6p^3 + 12p^2 + 25p + 20}{10p + 20} \left| \frac{2p^2 + 4p + 5}{3p \rightarrow Z_3(p)} \right.;$$

$$4) \frac{2p^2 + 4p + 5}{5} \left| \frac{10p + 20}{\frac{1}{5}p \rightarrow Y_4(p)} \right.;$$

$$5) \frac{10p + 20}{0} \left| \frac{5}{2p + 4 \rightarrow Z_5(p)} \right.$$

Таким образом, получена следующая цепная дробь:

$$Z(p) = 2p + \frac{1}{2p + \frac{1}{3p + \frac{1}{\frac{1}{5}p + \frac{1}{2p + 4}}}}$$

Ей соответствует схема рис. 17.15.

17.14. Дана функция входного сопротивления двухполюсника

$$Z(p) = \frac{2p^2 + 9p + 2}{8p^2 + 4p + 2}$$

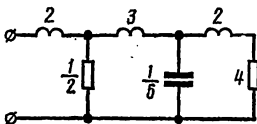


Рис. 17.15

Реализовать ее в виде электрической цепи, используя метод разложения, в цепную дробь.

Решение. Осуществим разложение в цепную дробь, начиная деление с высших степеней p полиномов:

$$\begin{array}{r|l}
 \begin{array}{r}
 2p^2 + 9p + 2 \\
 \hline
 2p^2 + p + 0,5 \\
 \hline
 8p^2 + 4p + 2 \\
 \hline
 8p^2 + 1,5p \\
 \hline
 2,5p + 2
 \end{array} & \left| \begin{array}{l}
 8p^2 + 4p + 2 \\
 \hline
 \frac{1}{4} \rightarrow Z_1(p) \\
 \hline
 8p + 1,5 \\
 \hline
 p \rightarrow Y_2(p)
 \end{array} \right.
 \end{array}$$

Если производить дальнейшее деление $8p + 1,5$ на $2,5p + 2$, начиная его с высших степеней p , то получим отрицательный остаток, который не может быть реализован. Поэтому последующее деление производим начиная с низших степеней, что приводит к положительному остатку:

$$\begin{array}{r|l}
 \begin{array}{r}
 1,5 + 8p \\
 \hline
 1,5 + \frac{15}{8} p \\
 \hline
 2 + 2,5p \\
 \hline
 2
 \end{array} & \left| \begin{array}{l}
 2 + 2,5p \\
 \hline
 \frac{3}{4} \rightarrow Z_3(p) \\
 \hline
 \frac{49}{8} p \\
 \hline
 \frac{16}{49p} \rightarrow Y_4(p)
 \end{array} \right.
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l}
 \begin{array}{r}
 \frac{49}{8} p \\
 \hline
 \frac{49}{8} p \\
 \hline
 0
 \end{array} & \left| \begin{array}{l}
 2,5p \\
 \hline
 \frac{49}{20} \rightarrow Z_5(p)
 \end{array} \right.
 \end{array}$$

Таким образом, $Z(p)$ может быть представлено в виде следующей цепной дроби:

$$Z(p) = \frac{1}{4} + \frac{1}{p + \frac{1}{\frac{3}{4} + \frac{1}{\frac{16}{49p} + \frac{1}{20}}}}}$$

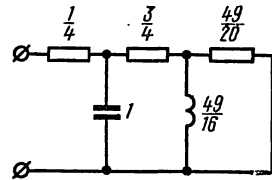


Рис. 17.16

которой соответствует схема рис. 17.16.

17.15. Требуется реализовать следующие функции входных сопротивлений:

а) $Z(p) = \frac{16p^3 + 16p^2 + 8p + 3}{8p^2 + 5p + 3}$;

б) $Z(p) = \frac{6p^3 + 7p^2 + 20p + 10}{p(2p^2 + 7p + 5)}$.

17.16. Проверить положительность следующих функций:

а) $F_1(p) = 6p^5 + 17p^4 + 27p^3 + 37p^2 + 17p + 16$;

б) $F_2(p) = 2p^5 + 2p^4 + 6p^3 + 2p^2 + 4p$;

$$в) F_3(p) = p^4 + 3p^3 + 7p^2 + 5p + 8;$$

$$г) F_4(p) = 2p^4 + p^3 + 9p^2 + 4p + 4.$$

Решение. а) В соответствии с п. 4 основных положений и соотношений составим отношение четной части полинома $F_1(p)$ к его нечетной части:

$$\frac{17p^4 + 37p^2 + 16}{6p^5 + 27p^3 + 17p} = \frac{17p^4 + 37p^2 + 16}{6p(p^4 + 4,5p^2 + 2,83)}. \quad (1a)$$

Вычислим корни знаменателя:

$$p_{1,2}^2 = -2,25 \pm \sqrt{2,25^2 - 2,83} = -2,25 \pm 1,493;$$

$$p_1^2 = -0,757; \quad p_2^2 = -3,743.$$

Таким образом,

$$p^4 + 4,5p^2 + 2,83 = (p^2 - p_1^2)(p^2 - p_2^2) = (p^2 + 0,757)(p^2 + 3,743).$$

Выражение (1a) разложим на простые дроби [см. формулу (17.6)]:

$$\begin{aligned} \frac{17p^4 + 37p^2 + 16}{6p(p^4 + 4,5p^2 + 2,83)} &= \frac{17p^4 + 37p^2 + 16}{6p(p^2 + 0,757)(p^2 + 3,743)} = \\ &= k_\infty p + \frac{k_0}{p} + \frac{2k_1 p}{p^2 + 0,757} + \frac{2k_2 p}{p^2 + 3,743}. \end{aligned} \quad (2a)$$

Коэффициент $k_\infty = 0$, так как выражение (1a) не имеет полюса в бесконечности (степень числителя ниже степени знаменателя).

Определим коэффициент k_0 . Он равен вычету выражения (1a) в полюсе $p = 0$:

$$k_0 = \text{Res} \left[\frac{17p^4 + 37p^2 + 16}{30p^4 + 81p^2 + 17} \right]_{p=0} = \frac{16}{17} = 0,941.$$

Коэффициент $2k_1$ найдем как вычет выражения (2a) в полюсе $p_1^2 = -0,757$:

$$\begin{aligned} 2k_1 &= \text{Res} \left[\frac{17p^4 + 37p^2 + 16}{6p(p^2 + 0,757)(p^2 + 3,743)} \cdot \frac{p^2 + 0,757}{p} \right]_{p^2 = -0,757} = \\ &= \frac{17(-0,757)^2 + 37(-0,757) + 16}{6(-0,757)(-0,757 + 3,743)} = \frac{-2,268}{-13,562} = 0,167. \end{aligned}$$

Аналогично найдем $2k_2$ как вычет выражения (2a) в полюсе $p_2^2 = -3,743$:

$$2k_2 = \text{Res} \left[\frac{17p^4 + 37p^2 + 16}{6p(p^2 + 0,757)(p^2 + 3,743)} \cdot \frac{p^2 + 3,743}{p} \right]_{p^2 = -3,743} = 1,725$$

Таким образом, с учетом найденных значений коэффициентов k_∞ , k_0 , $2k_1$ и $2k_2$ выражение (1а) примет вид

$$\frac{17p^4 + 37p^2 + 16}{6p(p^4 + 4,5p^2 + 2,83)} = \frac{0,941}{p} + \frac{0,167}{p^2 + 0,757} + \frac{1,725}{p^2 + 3,743}.$$

Итак, выражение (1а) — реактивная функция и, следовательно, согласно п. 4 основных положений и соотношений, $F_1(p)$ — полином Гурвица, т. е. положительная функция.

б) Составим отношение четной к нечетной части полинома:

$$\frac{2p^4 + 2p^2}{2p^5 + 6p^3 + 4p} = \frac{p^3 + p}{p^4 + 3p^2 + 2}. \quad (16)$$

Найдем корни знаменателя:

$$p^4 + 3p^2 + 2 = 0; \quad p_1^2 = -1, \quad p_2^2 = -2.$$

Выражение (16) примет вид

$$\frac{p(p^2 + 1)}{(p^2 + 1)(p^2 + 2)} = \frac{p}{p^2 + 2}. \quad (26)$$

Следовательно, выражение (16) является реактивной функцией, т. е. $F_2(p)$ — полином Гурвица (положительная функция).

Наличие в числителе и знаменателе общего множителя $(p^2 + 1)$ указывает на то, что он является множителем заданной функции $F_2(p)$. Действительно, поделив $F_2(p)$ на $p^2 + 1$, получим

$$\begin{array}{r} 2p^5 + 2p^4 + 6p^3 + 2p^2 + 4p \\ \hline 2p^5 \qquad + 2p^3 \\ \hline 2p^4 + 4p^3 + 2p^2 + 4p \\ \hline 2p^4 \qquad + 2p^2 \\ \hline 4p^3 + 4p \\ \hline 4p^3 + 4p \\ \hline 0 \qquad 0 \end{array} \left| \frac{p^2 + 1}{2p^3 + 2p^2 + 4} \right.$$

Таким образом, $F_2(p)$ может быть представлено в виде

$$F_2(p) = 2p^5 + 2p^4 + 6p^3 + 2p^2 + 4p = (p^2 + 1)(2p^3 + 2p^2 + 4p).$$

в) Запишем отношение четной части полинома к его нечетной части, вычислим корни знаменателя этого отношения и разложим его на простые дроби:

$$\frac{p^4 + 7p^2 + 8}{3p^3 + 5p} = k_\infty p + \frac{k_0}{p} + \frac{2k_1 p}{p^2 + \frac{5}{3}}. \quad (1в)$$

Вычисляем вычеты последней функции в точках $p = \infty$, $p = 0$ и $p^2 = -\frac{5}{3}$:

$$k_\infty = \frac{1}{3}; \quad k_0 = \text{Res} \left[p \frac{p^4 + 7p^2 + 8}{3p^3 + 5p} \right] = \frac{8}{5};$$

$$2k_1 = \left[\frac{\left(p^3 + \frac{5}{3}\right)(p^4 + 7p^2 + 8)}{p(3p^3 + 5p)} \right]_{p^2 = -\frac{5}{3}} = \frac{8}{45}.$$

Итак,

$$\frac{p^4 + 7p^2 + 8}{3p^3 + 5p} = \frac{1}{3}p + \frac{8}{5p} + \frac{8p}{45\left(p^2 + \frac{5}{3}\right)},$$

т. е. выражение (1в) — реактивная функция, а $F_3(p)$ — положительная функция.

г) Функцию $F_4(p)$ рассмотрим аналогично:

$$\frac{2p^4 + 9p^2 + 4}{p^3 + 4p} = k_\infty p + \frac{k_0}{p} + \frac{2k_1 p}{p^2 + 4}.$$

Как и выше, находим:

$$k_\infty = 2; \quad k_0 = 1.$$

Найдем вычет функции при $p^2 = -4$:

$$\begin{aligned} 2k_1 &= \text{Res} \left[\frac{p^2 + 4}{p} \cdot \frac{2p^4 + 9p^2 + 4}{p^3 + 4p} \right]_{p^2 = -4} = \left[\frac{2p^4 + 9p^2 + 4}{p^2} \right]_{p^2 = -4} = \\ &= \frac{2(-4)^2 + 9(-4) + 4}{-4} = \frac{0}{-4} = 0. \end{aligned}$$

Равенство нулю вычета при $p^2 = -4$ означает, что рассматриваемая функция $F_4(p)$ имеет множитель $p^2 + 4$. Для этого достаточно убедиться в том, что $F_4(p)$ делится без остатка на $p^2 + 4$. Действительно,

$$\begin{array}{r|l} 2p^4 + p^3 + 9p^2 + 4p + 4 & p^2 + 4 \\ 2p^4 & + 8p^2 \\ \hline & p^3 + p^2 + 4p + 4 \\ & p^3 & + 4p \\ \hline & & p^2 + 4 \\ & & p^2 + 4 \\ \hline & & 0 & 0 \end{array}$$

Следовательно, функция $F_4(p)$ может быть представлена в виде двух сомножителей:

$$F_4(p) = 2p^4 + p^3 + 9p^2 + 4p + 4 = (p^2 + 4)(2p^2 + p + 1).$$

17.17. Проверить вещественность функции

$$F(p) = \frac{6p^5 + 17p^4 + 27p^3 + 37p^2 + 17p + 16}{2p^5 + 2p^4 + 6p^3 + 2p^2 + 4p}.$$

Решение. Для проверки вещественности функции $F(p)$ надо убедиться в том, что ее вещественная часть во всех точках мнимой

оси не имеет отрицательных значений, т. е. выполняется неравенство (17.5), в котором четные и нечетные части числителя и знаменателя соответственно равны:

$$m_1(p) = 17p^4 + 37p^2 + 16; \quad n_1(p) = 6p^5 + 27p^3 + 17p;$$

$$m_2(p) = 2p^4 + 2p^2; \quad n_2(p) = 2p^5 + 6p^3 + 4p;$$

$$\begin{aligned} N(p) &= m_1(p) m_2(p) - n_1(p) n_2(p) = (17p^4 + 37p^2 + 16)(2p^4 + 2p^2) - \\ &- (6p^5 + 27p^3 + 17p)(2p^5 + 6p^3 + 4p) = -12p^{10} - 56p^8 - \\ &- 112p^6 - 104p^4 - 36p^2. \end{aligned}$$

Полагая в этом выражении $p = j\omega$, а следовательно, $p^2 = -\omega^2$, $p^4 = \omega^4$, $p^6 = -\omega^6$, $p^8 = \omega^8$, $p^{10} = -\omega^{10}$, получим $N(\omega^2) = 12\omega^{10} - 56\omega^8 + 112\omega^6 - 104\omega^4 + 36\omega^2$.

Обозначим ω^2 через x , последнее выражение примет вид

$$N(x) = 4(3x^5 - 14x^4 + 28x^3 - 26x^2 + 9x).$$

Здесь x может принимать только положительные значения, а пределы его изменения от 0 до ∞ , так как ω может изменяться в тех же пределах.

Последнее выражение, стоящее в круглых скобках, обозначим через $N_0(x) = 3x^5 - 14x^4 + 28x^3 - 26x^2 + 9x$.

Исследование проведем по методу Штурма (см. п. 4 основных положений и соотношений). $N_0(x)$ — первая функция Штурма. Вторая функция Штурма — это производная от первой функции Штурма

$$N_1(x) = N_0'(x) = 15x^4 - 56x^3 + 84x^2 - 52x + 9.$$

Разделим $N_0(x)$ на $N_1(x)$, прекратив деление, когда показатель высшей степени x остатка будет на единицу меньше высшей степени делителя:

$$\begin{array}{r|l} 3x^5 - 14x^4 + 28x^3 - 26x^2 + 9x & 15x^4 - 56x^3 + 84x^2 - 52x + 9 \\ \hline 3x^5 - 11,2x^4 + 16,8x^3 - 10,4x^2 + 1,8x & 0,2x - 0,1867 \\ \hline -2,8x^4 + 11,2x^3 - 15,6x^2 + 7,2x & \\ \hline -2,8x^4 + 10,453x^3 - 15,68x^2 + 9,707x - 1,68 & \\ \hline & 0,747x^3 + 0,08x^2 - 2,507x + 1,68 \end{array}$$

Итак,

$$\frac{N_0(x)}{N_1(x)} = 0,2x - 0,1867 + \frac{0,747x^3 + 0,08x^2 - 2,507x + 1,68}{15x^4 - 56x^3 + 84x^2 - 52x + 9}.$$

Найдем третью функцию Штурма $N_2(x)$ как остаток от деления первой функции Штурма на вторую, взятый с обратным знаком:

$$N_2(x) = -0,747x^3 - 0,08x^2 + 2,507x - 1,68.$$

Определим четвертую функцию Штурма $N_3(x)$ как остаток с обратным знаком от деления $N_1(x)$ на $N_2(x)$:

$$\begin{array}{r|l}
 15x^4 - 56x^3 + 84x^2 - 52x + 9 & -0,747x^3 - 0,08x^2 + 2,507x - 1,68 \\
 15x^4 + 1,60x^3 - 50,36x^2 + 33,75x & -20,893x + 77,0 \\
 \hline
 & -57,6x^3 + 134,36x^2 - 85,75x + 9 \\
 & -57,6x^3 - 6,16x^2 + 193,05x - 129,36 \\
 \hline
 & 140,52x^2 - 278,8x + 138,36
 \end{array}$$

Итак,

$$N_3(x) = -140,52x^2 + 278,8x - 138,36.$$

Аналогично находим пятую функцию Штурма $N_4(x)$ как остаток с обратным знаком от деления четвертой функции Штурма на третью:

$$\frac{N_2(x)}{N_3(x)} = 0,00533x + 0,0112 + \frac{0,12x - 0,13}{-140,52x^2 + 278,8x - 138,36};$$

$$N_4(x) = -0,12x + 0,13.$$

Аналогично находим шестую функцию Штурма $N_5(x)$:

$$\frac{N_3(x)}{N_4(x)} = 1171x - 1063,3 - \frac{0,13}{-0,12x + 0,13}; \quad N_5(x) = 0,13.$$

Так как нас интересует положительность функции $N(x)$ во всем диапазоне частот, т. е. от $\omega = 0$ до $\omega = \infty$, которым соответствуют $x = 0$ и $x = \infty$, то определим знаки функций Штурма при указанных значениях x и занесем их в табл. 17.2.

Таблица 17.2

$N(x)$ x	$N_0(x)$	$N_1(x)$	$N_2(x)$	$N_3(x)$	$N_4(x)$	$N_5(x)$	W
$x_1 = 0$	0	+	-	-	+	+	2
$x_2 = \infty$	+	+	-	-	-	+	2

Отсюда видно, что число вариаций знака для крайних значений корней $W(x_1) = W(0) = 2$ и $W(x_2) = W(\infty) = 2$, т. е. одинаково, а их разность равна $W(x_1) - W(x_2) = 0$. Поэтому функция $N(x)$ не меняет своего знака на всей оси $j\omega$. Она всюду положительна, ибо при $x_1 = 0$ она положительна. Таким образом, установлено, что вещественная часть $F(p)$ при $p = j\omega$ больше нуля для всех значений ω . Итак, заданная функция $F(p)$ вещественна.

17.18. Проверить положительность и вещественность следующих функций:

а) $F_1(p) = \frac{2p^3 + 6p^2 + 3p + 1}{p^2 + p + 1};$

б) $F_2(p) = \frac{p^4 + 3p^3 + 7p^2 + 5p + 8}{2p^4 + p^3 + 9p^2 + 4p + 4}.$

17.19. По методу Бруне реализовать функцию входного сопротивления

$$Z(p) = \frac{4p^2 + p + 1}{p^2 + p + 1}.$$

Решение. Легко убедиться, что корни числителя и знаменателя комплексно сопряженные. Поэтому реализацию цепи будем осуществлять в соответствии с методикой, указанной в п. 9 основных положений и соотношений.

1. Так как $Z(p)$ не содержит полюсов или нулей на мнимой оси, то этот пункт выпадает, поэтому $Z(p) = Z_1(p)$.

2. Найдем частоту, при которой $[\operatorname{Re} Z_1(p)]$ минимально. Для этого берем производную от $[\operatorname{Re} Z_1(j\omega)]$ и приравняем ее нулю:

$$\frac{d}{d\omega} \left[\frac{(1 - 2\omega^2)^2}{(1 - \omega^2)^2 + \omega^2} \right] =$$

$$= \frac{[(1 - \omega^2)^2 + \omega^2]2(1 - 2\omega^2)(-4\omega) - (1 - 2\omega^2)^2 \cdot [2(1 - \omega^2)(-2\omega) + 2\omega]}{(1 - \omega^2)^2 + \omega^2} = 0.$$

Отсюда находим $\omega' = 0$, $\omega'' = \infty$ и $\omega_0 = 1/\sqrt{2}$.

Для проверки того, какая из этих трех частот соответствует минимуму, можно каждую из них подставить в выражение $[\operatorname{Re} Z_1(j\omega)]$ и результаты сопоставить друг с другом:

$$[\operatorname{Re} Z_1(j\omega)]_{\omega = \omega' = 0} = \frac{(1 - 2\omega^2)^2}{(1 - \omega^2)^2 + \omega^2} \Big|_{\omega = \omega' = 0} = 1;$$

$$[\operatorname{Re} Z_1(j\omega)]_{\omega = \omega'' = \infty} = \frac{(1 - 2\omega^2)^2}{(1 - \omega^2)^2 + \omega^2} \Big|_{\omega = \omega'' = \infty} = 4;$$

$$[\operatorname{Re} Z_1(j\omega)]_{\omega = \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{(1 - 2\omega^2)^2}{(1 - \omega^2)^2 - \omega^2} \Big|_{\omega = \omega_0 = 1/\sqrt{2}} = 0.$$

3. Из последних трех выражений видно, что при частоте $\omega_0 = 1/\sqrt{2}$ вещественная часть функции минимальна, и так как при этом $r_{\min} = 0$, то подпункт 3 п. 9 основных положений и соотношений выпадает.

4. Данный пункт также выпадает, так как r_{\min} имеет место не при частоте, равной нулю или бесконечности, а при конечной частоте ω_0 (рис. 17.17, а):

$$Z_2(p) = Z_1(p) - r_{\min} = Z_1(p).$$

5. Вычисляем $Z_2(p)$ при $p = j\omega_0$:

$$Z_2(p) \Big|_{p = j\omega_0 = j \frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{4p^2 + p + 1}{p + 1} \Big|_{p = j \frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{4 \left(j \frac{1}{\sqrt{2}} \right)^2 + j \frac{1}{\sqrt{2}} + 1}{\left(j \frac{1}{\sqrt{2}} \right)^2 + j \frac{1}{\sqrt{2}} + 1} =$$

$$= j\sqrt{2} = jx_2,$$

т. е. $x_2 = \sqrt{2}$. Так как

$$x_2 = \omega_0 L_2, \quad \text{то} \quad L_2 = \frac{x_2}{\omega_0} = \frac{\sqrt{2}}{\frac{1}{\sqrt{2}}} = 2.$$

6. Составляем разность $Z_2(p) - pL_2$ и приводим ее к общему знаменателю (рис. 17.17, б):

$$Z_3(p) = Z_2(p) - pL_2 = \frac{4p^2 + p + 1}{p^2 + p + 1} - 2p = \frac{(2p^2 + 1)(1 - p)}{p^2 + p + 1}.$$

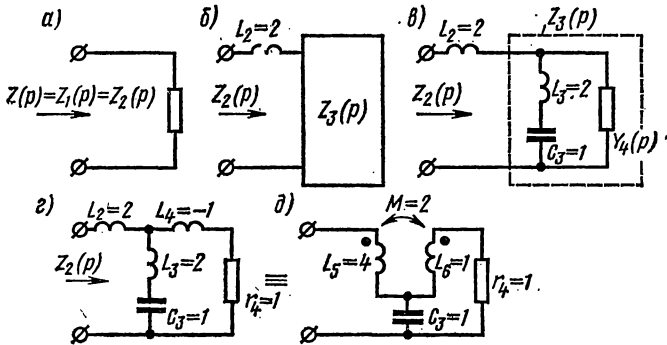


Рис. 17.17

7. Проводимость

$$Y_3(p) = \frac{1}{Z_3(p)} = \frac{p^2 + p + 1}{(2p^2 + 1)(1 - p)} = \frac{p^2 + p + 1}{-2p^3 + 2p^2 - p + 1}$$

имеет полюсы на мнимой оси, равные $\pm j1/\sqrt{2}$. Им соответствует ветвь из последовательно соединенных L_3 и C_3 , проводимость которой равна $2k_3p/(p^2 + \omega_0^2)$, где $\omega_0^2 = 1/2$.

Найдем k_3 как вычет функции $Y_3(p)$ при $p = j \frac{1}{\sqrt{2}}$:

$$k_3 = \text{Res } Y_3(p) \Big|_{p=j\frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{p^2 + p + 1}{-6p^2 + 4p - 1} \Big|_{p=j\frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{1}{4}.$$

По формулам (17.9а) находим L_3 и C_3 (рис. 17.17, в):

$$L_3 = \frac{1}{2k_3} = \frac{1}{2 \cdot \frac{1}{4}} = 2, \quad C_3 = \frac{1}{\omega_0^2 L_3} = \frac{1}{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 \cdot 2} = 1.$$

8. Наконец находим оставшуюся для реализации часть проводимости:

$$Y_4(p) = Y_3(p) - \frac{2k_3p}{p^2 + \omega_0^2} = \frac{p^2 + p + 1}{(2p_2^2 + 1)(1-p)} - \frac{2 \frac{1}{4}}{p^2 + \frac{1}{2}} = \frac{1}{1-p}.$$

Сопротивление

$$Z_4(p) = \frac{1}{Y_3(p)} = 1 - p = r_4 + pL_4,$$

отсюда

$$r_4 = 1, L_4 = -1.$$

В результате получена схема рис. 17.17, *з*.

Так как физически невозможно реализовать отрицательную индуктивность L_4 , три индуктивности L_2, L_3, L_4 заменяем в соответствии с п. 9 основных положений и соотношений идеальным трансформатором (рис. 17.17, *д*), у которого

$$L_5 = L_2 + L_3 = 2 + 2 = 4, L_6 = L_4 + M = -1 + 2 = 1, \\ M = L_3 = 2.$$

Окончательная схема реализации заданного $Z(p)$ дана на рис. 17.17, *д*.

17.20. Реализовать по методу Бруне функцию сопротивления

$$Z(p) = \frac{6p^5 + 17p^4 + 27p^3 + 37p^2 + 17p + 16}{2p^5 + 2p^4 + 6p^3 + 2p^2 + 4p}.$$

Решение. При решении задачи будем следовать методике, указанной в п. 9 основных положений и соотношений.

1. Из решения задачи 17.16, п. б) видно, что знаменатель функции $Z(p)$ имеет множители p и $p^2 + 1$, т. е. $Z(p)$ имеет полюсы в точках $p = 0$ и $p = \pm j$. Выделим их. Для этого знаменатель $Z(p)$ разложим на множители и функцию сопротивления $Z(p)$ представим в виде элементарных дробей:

$$Z(p) = \frac{6p^5 + 17p^4 + 27p^3 + 37p^2 + 17p + 16}{p(p^2 + 1)(2p^2 + 2p + 4)} = \frac{k_0}{p} + \frac{2k_1p}{p^2 + 1} + \\ + \frac{F_1(p)}{2p^2 + 2p + 4}. \quad (1)$$

Умножая обе части последнего выражения на p и принимая $p = 0$, найдем

$$k_0 = \left. \frac{6p^5 + 17p^4 + 27p^3 + 37p^2 + 17p + 16}{(p^2 + 1)(2p^2 + 2p + 4)} \right|_{p=0} = \frac{16}{4} = 4.$$

Аналогично, умножая обе части $Z(p)$ на $(p^2 + 1)/p$ и принимая $p^2 = -1$ (т. е. $p = \pm j$), получим

$$2k_1 = \frac{6p^5 + 17p^4 + 27p^3 + 37p^2 + 16}{p^2(2p^2 + 2p + 4)} \Big|_{p^2 = -1} =$$

$$= \frac{j6 + 17 - j27 - 37 + j17 + 16}{-1(-2 + j2 + 4)} = \frac{-4 - j4}{-(2 + j2)} = 2.$$

Из формулы (1) ясно, что если из $Z(p)$ вычтем $k_0/p = 4/p$ и $2k_1p/(p^2 + 1) = 2p/(p^2 + 1)$, то получим

$$Z_1(p) = \frac{F_1(p)}{2p^2 + 2p + 4};$$

$$Z_1(p) = \frac{6p^5 + 17p^4 + 27p^3 + 37p^2 + 17p + 16}{p(p^2 + 1)(2p^2 + 2p + 4)} - \frac{4}{p} - \frac{2p}{p^2 + 1} = \frac{6p^3 + 5p + 9}{2p^2 + 2p + 4}.$$

Выражение $\frac{k_0}{p} = \frac{1}{\frac{1}{4}p}$ представляет собой емкость C_0 , равную

$1/4$, а выражение $\frac{2k_1p}{p^2 + 1} = \frac{2p}{p^2 + 1}$ — параллельный контур, элементы которого находим по формулам (17.7а):

$$L_1 = \frac{2k_1}{\omega_1^2} = \frac{2}{1} = 2, \quad C_1 = \frac{1}{2k_1} = \frac{1}{2}.$$

Таким образом, в соответствии с формулой (1) приходим к схеме рис. 17.18, а.

2. Находим частоту ω_0 , при которой вещественная часть $Z_1(p)$ при $p = j\omega$ минимальна:

$$[\operatorname{Re} Z_1(j\omega)] = \operatorname{Re} \left[\frac{6p^3 + 5p + 9}{2p^2 + 2p + 4} \right]_{p=j\omega} = \operatorname{Re} \left[\frac{9 - 6\omega^2 + j5\omega}{(4 - 2\omega^2) + j2\omega} \right] =$$

$$= \frac{(9 - 6\omega^2)(4 - 2\omega^2) + 10\omega^2}{(4 - 2\omega^2)^2 + 4\omega^2} = \frac{3\omega^4 + 8\omega^2 + 9}{\omega^4 - 3\omega^2 + 4}.$$

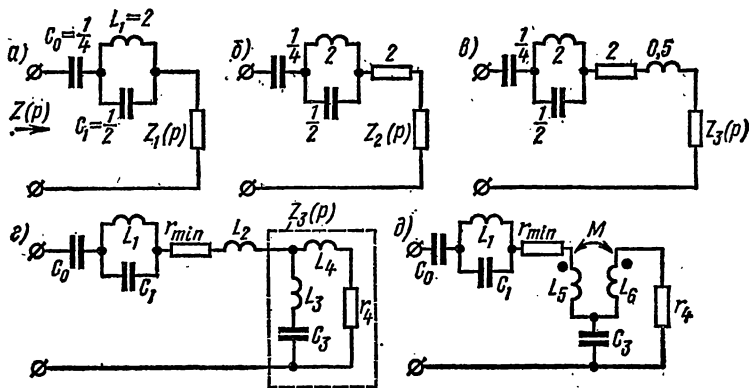


Рис. 17.18

Берем отсюда производную и приравниваем ее нулю:

$$\frac{(\omega^4 - 3\omega^2 + 4)(12\omega^3 - 16\omega) - (3\omega^4 - 8\omega^2 + 9)(3\omega^3 - 6\omega)}{(\omega^4 - 3\omega^2 + 4)^2} =$$

$$= \frac{\omega(\omega^4 - 6\omega^2 + 5)}{(\omega^4 - 3\omega^2 + 4)^2} = 0.$$

Находим экстремальные частоты:

$$\omega' = 0, \quad \omega'' = \infty; \quad \omega''' = \sqrt{5}; \quad \omega_0 = 1.$$

Чтобы определить, какая из найденных четырех частот соответствует минимуму, проще всего найти величины вещественных частей сопротивления $Z_1(j\omega)$ при каждой из найденных частот и сопоставить их друг с другом:

$$Z_1(j\omega) \Big|_{\omega = \omega' = 0} = \frac{3\omega^4 - 8\omega^2 + 9}{\omega^4 - 3\omega^2 + 4} \Big|_{\omega' = 0} = \frac{9}{4}.$$

Аналогично,

$$Z_1(j\omega) \Big|_{\omega = \omega'' = \infty} = 3; \quad Z_1(j\omega) \Big|_{\omega = \omega''' = \sqrt{5}} = \frac{22}{7}; \quad Z_1(j\omega) \Big|_{\omega = \omega_0 = 1} = 2.$$

Таким образом, минимальное значение вещественной части $Z_1(j\omega)$ имеет место при конечной частоте $\omega_0 = 1$ и равняется $r_{\min} = 2$.

3. Вычитая r_{\min} из $Z_1(p)$, получим

$$Z_2(p) = Z_1(p) - r_{\min} = \frac{6p^2 + 5p + 9}{2p^2 + 2p + 4} - 2 = \frac{2p^2 + p + 1}{2p^2 + 2p + 4}.$$

Это соответствует переходу от схемы рис. 17.18, а к схеме рис. 17.18, б.

4. Минимальное активное сопротивление имеет место при конечной частоте $\omega_0 = 1$. Поэтому подпункт 4 п. 9 основных положений и соотношений выпадает и поступаем в соответствии с п. 5.

5. Вычисляем $Z_2(p)$ при $p = j\omega_0 = j1$, которое является чисто мнимой величиной jx_2 :

$$Z_2(p) \Big|_{p=j} = \frac{2p^2 + p + 1}{2p^2 + 2p + 4} \Big|_{p=j1} = \frac{2 \cdot j^2 + j + 1}{2 \cdot j^2 + 2j + 4} = j0,5 = jx_2,$$

т. е. $x_2 = 0,5$.

Отсюда

$$L_2 = x_2/\omega_0 = 0,5/1 = 0,5.$$

6. Составляем разность:

$$Z_3(p) = Z_2(p) - pL_2 = \frac{2p^2 + p + 1}{2p^2 + 2p + 4} - 0,5p = \frac{-p^3 + p^2 - p + 1}{2p^2 + 2p + 4} =$$

$$= \frac{(1-p)(1+p^2)}{2p^2 + 2p + 4}.$$

Это соответствует переходу от схемы рис. 17.18, б к схеме рис. 17.18, в.

7. Сопротивление $Z_3(p)$ имеет нули на мнимой оси при $p = \pm j$, а следовательно, проводимость $Y_3(p)$ имеет в этих точках полюсы:

$$Y_3(p) = \frac{1}{Z_3(p)} = \frac{2p^2 + 2p + 4}{-p^3 + p^2 - p + 1} = \frac{2p^2 + 2p + 4}{(1-p)(1+p^2)}$$

Этим полюсам соответствует ветвь из последовательно соединенных L_3 и C_3 , проводимость которой $\frac{2k_3 p}{p^2 + \omega_0^2} = \frac{2k_3}{p^2 + 1}$.

Находим вычет k_3 функции $Y_3(p)$ в точках $p = \pm j$:

$$k_3 = [\text{Res } Y_3(p)]_{p=j} = \frac{2p + 2p + 4}{-3p^2 + 2p - 1} \Big|_{p=j} = 1.$$

По формулам (17.9а) находим элементы ветви $L_3 C_3$:

$$L_3 = \frac{1}{2k_3} = \frac{1}{2 \cdot 1} = 0,5; \quad C_3 = \frac{1}{\omega_0^2 L_3} = \frac{1}{1^2 \cdot 0,5} = 2.$$

8. Наконец, находим оставшуюся для реализации часть проводимости

$$Y_4(p) = Y_3(p) - \frac{2k_3 p}{p^2 + \omega_0^2} = \frac{2p^2 + 2p + 4}{(1-p)(1+p^2)} - \frac{2p}{p^2 + 1} = \frac{4}{1-p}.$$

Величина, обратная проводимости $Y_4(p)$, — сопротивление

$$Z_4(p) = \frac{1-p}{4} = 0,25 - 0,25p$$

представляет собой последовательно соединенные активное сопротивление $r_4 = 0,25$ и отрицательную индуктивность $L_4 = -0,25$.

Таким образом, получаем схему рис. 17.18, в.

Заменяем три индуктивности идеальным трансформатором (см. п. 9 основных положений и соотношений), параметры которого

$$M = L_3 = 0,5, \quad L_5 = L_2 + M = 0,5 + 0,5 = 1,$$

$$L_6 = L_4 + M = -0,25 + 0,5 = 0,25.$$

Окончательная схема приведена на рис. 17.18, д.

17.21. Осуществить реализацию функции сопротивления по методу Бруне

$$Z(p) = \frac{p^4 + 3p^3 + 7p^2 + 5p + 8}{2p^4 + p^3 + 9p^2 + 4p + 4}. \quad (1)$$

Решение. В решении задачи 17.16, п. г) установлено, что знаменатель $Z(p)$ может быть представлен в виде произведения двух со-

множителей $(p^2 + 4)(2p^2 + p + 1)$. Поэтому $Z(p)$ можно разложить на следующие слагаемые:

$$Z(p) = \frac{p^4 + 3p^3 + 7p^2 + 5p + 8}{2p^4 + p^3 + 9p^2 + 4p + 4} = \frac{2k_1 p}{p^2 + 4} + \frac{F_1(p)}{2p^2 + p + 1}.$$

Коэффициент $2k_1$ найдем как вычет $Z(p)$ при $p^2 = -4$ (или $p = \pm j2$):

$$2k_1 = \operatorname{Res} \left[\frac{p^2 + 4}{p} \cdot \frac{p^4 + 3p^3 + 7p^2 + 5p + 8}{(p^2 + 4)(2p^2 + p + 1)} \right]_{p^2 = -4} = 1.$$

Вычитая из $Z(p)$ выражение $\frac{2k_1 p}{p^2 + 4} = \frac{2p}{p^2 + 4}$, найдем

$$Z_1(p) = \frac{p^4 + 3p^3 + 7p^2 + 5p + 8}{(p^2 + 4)(2p^2 + p + 1)} - \frac{2}{p^2 + 4} = \frac{p^2 + p + 2}{2p^2 + p + 1}. \quad (2)$$

Таким образом, заданное сопротивление $Z(p)$ может быть представлено в виде суммы:

$$Z(p) = Z_1(p) + \frac{2p}{p^2 + 4}. \quad (3)$$

Это сопротивление представляет собой последовательное соединение $Z_1(p)$ и параллельной LC -ветви, элементы которой имеют значения [см. формулу (17.7а)], равные:

$$L = \frac{2k_1}{\omega_1^2} = \frac{2 \cdot 1}{2^2} = 0,5; \quad C = \frac{1}{2k_1} = \frac{1}{2 \cdot 1} = 0,5.$$

Формуле (3) соответствует схема рис. 17.19, а.

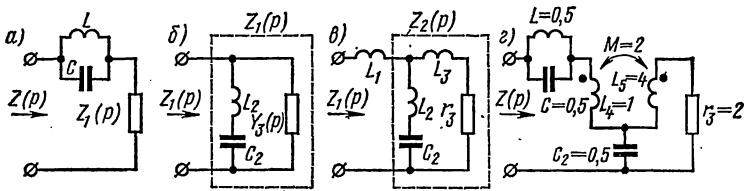


Рис. 17.19

Числитель и знаменатель выражения (2) имеют комплексно сопряженные корни, поэтому реализацию цепи $Z_1(p)$ осуществим по методу Бруне (см. п. 9 основных положений и соотношений).

1. Выражение (2) не имеет полюсов на мнимой оси, поэтому п.1 выпадает.

2. Находим вещественную часть функции $Z_1(p)$ при $p = j\omega$:

$$\begin{aligned} [\operatorname{Re} Z(p)]_{p=j\omega} &= [\operatorname{Re} Z(j\omega)] = \operatorname{Re} \left[\frac{p^2 + p + 2}{2p^2 + p + 1} \right]_{p=j\omega} = \\ &= \operatorname{Re} \left[\frac{2 - \omega^2 + j\omega}{1 - 2\omega^2 + j\omega} \right] = \operatorname{Re} \left[\frac{(2 - \omega^2 + j\omega)(1 - 2\omega^2 - j\omega)}{(1 - 2\omega^2)^2 + \omega^2} \right] = \\ &= \frac{(2 - \omega^2)(1 - 2\omega^2) + \omega^2}{(1 - 2\omega^2)^2 + \omega^2} = \frac{2\omega^4 - 4\omega^2 + 2}{4\omega^4 - 3\omega^2 + 1}. \end{aligned} \quad (4)$$

Находим частоту ω_0 , при которой выражение (4) минимально. Для этого берем производную по ω и приравниваем ее нулю:

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\omega} [\operatorname{Re}(j\omega)] &= \frac{(4\omega^4 - 3\omega^2 + 1)(8\omega^3 - 8\omega) - (2\omega^4 - 4\omega^2 + 2)(16\omega^3 - 6\omega)}{(4\omega^4 - 3\omega^2 + 1)^2} = \\ &= \frac{\omega(5\omega^4 - 6\omega^2 + 1)}{(4\omega^4 - 3\omega^2 + 1)^2} = 0. \end{aligned}$$

Отсюда находим:

$$\omega' = 0; \quad \omega'' = \infty; \quad \omega''' = \sqrt{0,2}; \quad \omega_0 = 1.$$

Подставляя значения этих частот в формулу (4), получим:

$$\begin{aligned} \frac{2\omega^4 - 4\omega^2 + 2}{4\omega^4 - 3\omega^2 + 1} \Big|_{\omega' = 0} &= 2; & \frac{2\omega^4 - 4\omega^2 + 2}{4\omega^4 - 3\omega^2 + 1} \Big|_{\omega'' = \infty} &= \frac{1}{2}; \\ \frac{2\omega^4 - 4\omega^2 + 2}{4\omega^4 - 3\omega^2 + 1} \Big|_{\omega''' = \sqrt{0,2}} &= \frac{16}{7}; & \frac{2\omega^4 - 4\omega^2 + 2}{4\omega^4 - 3\omega^2 + 1} \Big|_{\omega_0 = 1} &= 0. \end{aligned}$$

Таким образом, видно, что минимуму активной части (4) соответствует частота $\omega_0 = 1$, при которой $r_{\min} = 0$.

3. Так как $r_{\min} = 0$, то п. 3 выпадает.

4. Подпункт 4 п. 9 основных положений и соотношений выпадает тоже, так как частота, при которой имеет место минимум вещественной части заданного сопротивления при $p = j\omega$, не равна нулю или бесконечности.

5. Вычисляем $Z_2(p)$ при $p = j\omega_0 = j1$, которое должно быть чисто мнимой величиной jx_1 :

$$Z_1(p) \Big|_{p=j1} = \frac{p^2 + p + 2}{2p^2 + p + 1} = \frac{j^2 + j + 2}{2j^2 + j + 1} = -j \cdot 1 = -j, \text{ т. е. } x_1 = -1.$$

6. Определяем индуктивность:

$$L_1 = x_1/\omega_0 = -1/1 = -1.$$

7. Вычитаем pL_1 из $Z_1(p)$:

$$\begin{aligned} Z_2(p) = Z_1(p) - pL_1 &= \frac{p^2 + p + 2}{2p^2 + p + 1} - (-p) = \frac{p^3 + p^2 + p + 1}{p^2 + 0,5p + 0,5} = \\ &= \frac{(p^2 + 1)(p + 1)}{p^2 + 0,5p + 0,5}. \end{aligned}$$

Величина, обратная $Z_2(p)$,

$$Y_2(p) = \frac{p^2 + 0,5p + 0,5}{(p^2 + 1)(p + 1)}. \quad (5)$$

8. Проводимость $Y_2(p)$ имеет полюсы на мнимой оси, равные $\pm j$. Им соответствует ветвь из последовательно соединенных L_2 и C_2 , проводимость которой равна $\frac{2k_2 p}{p^2 + 1}$, где $\omega^2 = 1$. Коэффициент k_2 находим как вычет функции $Y_2(p)$ при $p = j$:

$$k_2 = \text{Res } Y_2(p) |_{p=j} = \frac{p^2 + 0,5p + 0,5}{3p^2 + 2p + 1} = 0,25.$$

Элементы L_2 и C_2 вычисляем по формулам (17.9а):

$$L_2 = \frac{1}{2k_2} = \frac{1}{2 \cdot 0,25} = 2; \quad C_2 = \frac{1}{\omega^2 L_2} = \frac{1}{1^2 \cdot 2} = 0,5.$$

9. Вычитая из $Y_2(p)$ выражение $\frac{2k_2}{p^2 + 1} = \frac{0,5}{p^2 + 1}$, получим проводимость оставшейся для реализации схемы:

$$Y_3(p) = Y_2(p) - \frac{0,5}{p^2 + 1} = \frac{p^2 + 0,5p + 0,5}{(p^2 + 1)(p + 1)} - \frac{0,5}{p^2 + 1} = \frac{0,5}{p + 1}.$$

Таким образом, $Y_2(p)$ представляет собою сумму двух параллельных ветвей: в первой ветви последовательно соединены L_2 и C_2 , а во второй ветви проводимость $Y_3(p)$ (рис. 17. 19, б). Проводимость $Y_3(p) = 0,5 / (p + 1) = 1 / (2p + 2)$ представляет собой ветвь из последовательно соединенных индуктивности $L_3 = 2$ и активного сопротивления $r_3 = 2$. В результате получаем схему рис. 17. 19, в с отрицательной индуктивностью L_1 .

10. Так как отрицательная индуктивность L_1 физически не может быть реализована, вводим в схему идеальный трансформатор, элементы которого (см. п. 9 основных положений и соотношений)

$$M = L_2 = 2 \text{ гн}, \quad L_4 = L_1 + L_2 = -1 + 2 = 1 \text{ гн}, \quad L_5 = L_2 + L_3 = 2 + 2 = 4 \text{ гн}.$$

Окончательная схема реализации заданного сопротивления изображена на рис. 17. 19, г.

17. 22. Реализовать по Бруне следующие функции сопротивления:

$$\text{а) } Z(p) = \frac{2p^3 + 6p^2 + 3p + 1}{p^2 + p + 1};$$

$$\text{б) } Z(p) = \frac{4p^5 + 3p^4 + 21p^3 + 15p^2 + 13p + 8}{2p^4 + p^3 + 9p^2 + 4p + 4}.$$

Глава восемнадцатая

ЭЛЕМЕНТЫ СИНТЕЗА ЧЕТЫРЕХПОЛЮСНИКОВ

ОСНОВНЫЕ ПОЛОЖЕНИЯ И СООТНОШЕНИЯ

1. **Некоторые общие понятия синтеза четырехполюсников.** Далее рассматриваются простейшие случаи синтеза пассивных четырехполюсников по заданному операторным выражениям функций, характеризующих эти четырехполюсники. Как известно, пассивный обратимый четырехполюсник полностью определяется тремя независимыми параметрами (см. гл. 14). В частности, ими могут быть Z (или Y)-параметры. Таким образом, если известны $Z_{11}(p)$, $Z_{22}(p)$ и $Z_{12}(p)$ [или $Y_{11}(p)$, $Y_{22}(p)$ и $Y_{12}(p)$], то этим четырехполюсник полностью задан.

В ряде случаев характеристика четырехполюсника задается не полностью. Например, могут быть заданы два параметра Z_{11} и Z_{12} или Z_{22} и Z_{12} (или Y_{11} и Y_{12} или Y_{22} и Y_{12}). Однако весьма часто при синтезе четырехполюсников задается лишь одна его передаточная функция. Она может быть задана при различных условиях: при наличии или при отсутствии нагрузки на выходе четырехполюсника, кроме того, с учетом или без учета сопротивления источника энергии и т. п. Одной задаваемой передаточной функцией может быть $Z_{12} = Z_{21}$ или $Y_{12} = Y_{21}$. Иногда задается коэффициент передачи по напряжению в режиме холостого хода $K_U = \frac{U_2}{U_1}$. В литературе его часто обозначают T_{12} .

При синтезе четырехполюсников используются некоторые новые понятия.

Условие вычетов. Обозначим вычеты функций Z_{11} , Z_{22} и Z_{12} (или Y_{11} , Y_{22} и Y_{12}) в каком-либо их полюсе соответственно через k_{11} , k_{22} , k_{12} . Тогда должны выполняться условия $k_{11} \geq 0$ и $k_{22} \geq 0$, k_{12} может быть и больше и меньше нуля

$$k_{11} k_{22} - k_{12}^2 \geq 0. \quad (18.1)$$

Последнее соотношение называется условием вычетов. Оно должно выполняться для каждого из полюсов Z (или Y)-параметров на мнимой оси $j\omega$. Если условие (18.1) выполняется для каждого из полюсов со знаком равенства, то такой полюс называется *компактным*, а соответствующие параметры—*компактными Z (или Y)-параметрами*.

Условие вещественной части. Обозначим вещественные части Z -и Y -параметров через

$$r_{11} = \operatorname{Re} [Z_{11}(j\omega)], \quad r_{22} = \operatorname{Re} [Z_{22}(j\omega)], \quad r_{12} = \operatorname{Re} [Z_{12}(j\omega)], \quad (18.2a)$$

$$g_{11} = \operatorname{Re} [Y_{11}(j\omega)], \quad g_{22} = \operatorname{Re} [Y_{22}(j\omega)], \quad g_{12} = \operatorname{Re} [Y_{12}(j\omega)]. \quad (18.26)$$

Тогда на любой частоте должны выполняться следующие условия: $r_{11} \geq 0$, $r_{22} \geq 0$, $g_{11} \geq 0$, $g_{22} \geq 0$; r_{12} и g_{12} могут быть и не положительными:

$$r_{11} r_{22} - r_{12}^2 \geq 0; \quad (18.3a)$$

$$g_{11} g_{22} - g_{12}^2 \geq 0. \quad (18.36)$$

Условия (18.3a и б) называются условиями вещественной части (условиями Геверца).

Указанная выше функция $K_U = T_{12}$ (а также Z_{12} , Y_{12}) представляет собой дробно-рациональную функцию и имеет вид

$$\begin{aligned} T_{12} &= \frac{a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_1 p + a_0}{b_m p^m + b_{m-1} p^{m-1} + \dots + b_1 p + b_0} = \\ &= K \frac{p^n + a'_{n-1} p^{n-1} + \dots + a'_1 p + a'_0}{p^m + b'_{m-1} p^{m-1} + \dots + b'_1 p + b'_0} = \\ &= K \frac{(p - p_{01})(p - p_{02}) \dots (p - p_{0n})}{(p - p_1)(p - p_2) \dots (p - p_m)} = K \frac{P(p)}{Q(p)}. \end{aligned} \quad (18.4)$$

Здесь p_{01}, \dots, p_{0n} — нули функции T_{12} , а p_1, \dots, p_m — ее полюсы. В общем случае нули и полюсы являются комплексными числами. Коэффициент $K = a_n/b_m$ называется коэффициентом усиления. Он не может быть больше некоторой максимальной величины K_{\max} . Величину K_{\max} ограничивают условия вещественной части.

2. Условия реализации четырехполюсников для полюсов и нулей. Для физической реализации по заданной передаточной функции линейного пассивного обратимого четырехполюсника в виде цепи с сосредоточенными параметрами должны быть выполнены следующие условия:

А. Для полюсов: а) все полюсы Z_{12} , Y_{12} и $K_U = T_{12}$ должны находиться в левой полуплоскости комплексного переменного p ; б) ни один из полюсов функции передачи $T_{12}(p)$ не может находиться в нуле или бесконечности; в) полюсы $Z_{12}(p)$ и $Y_{12}(p)$ на мнимой оси могут быть только простыми с вещественными вычетами; г) полюсы $T_{12}(p)$ на мнимой оси простые с мнимыми вычетами; д) $Z(p)$ - и $Y(p)$ -параметры удовлетворяют условию вычетов во всех полюсах на мнимой оси $j\omega$.

Б. Для нулей: а) нули $Z_{12}(p)$, $Y_{12}(p)$ и $T_{12}(p)$ могут быть кратными и находиться в любой точке плоскости p ; б) число нулей коэффициента передачи должно быть не больше числа полюсов.

В. Для $Z(p)$ - и $Y(p)$ -параметров: $Z(p)$ - и $Y(p)$ -параметры должны удовлетворять условию (18.2 а и б) вещественной части.

В ряде случаев ставятся дополнительные условия, в которых указываются, в виде какой схемы должен быть реализован четырехполюсник (например, в виде Г-схемы, составленной из элементов определенного вида, например r , C , или чтобы он был неуравновешенным* без взаимной индуктивности, или уравновешенным, или имел цепочечный вид и др.). В этих случаях кроме общих условий физической реализуемости, сформулированных в п. 2 основных положений, появляются дополнительные ограничения. О некоторых из них см. ниже.

В общем случае задача синтеза четырехполюсника неоднозначна и может иметь не одно, а несколько решений.

3. Синтез цепей по трем заданным $Z(p)$ или $Y(p)$ -параметрам. В этом случае на основе связей, существующих между $Z(p)$ или $Y(p)$ -параметрами простейших структур: Т-, П-схем и мостовой схемы (табл. 18.1), делается попытка реализовать четырехполюсник по одной из них.

Пример приведен в задаче 18.1.

Таблица 18.1

Схема	Z-матрица	Y-матрица
<p>a)</p>	$\begin{bmatrix} Z_{1Г} + Z_{2Г} & Z_{2Г} \\ Z_{2Г} & Z_{2Г} + Z_{3Г} \end{bmatrix}$	$\frac{1}{Z_{1Г} Z_{2Г} + Z_{1Г} Z_{3Г} + Z_{2Г} Z_{3Г}} \times \begin{bmatrix} Z_{2Г} + Z_{3Г} & -Z_{2Г} \\ -Z_{2Г} & Z_{1Г} + Z_{2Г} \end{bmatrix}$
<p>б)</p>	$\frac{1}{Z_{1П} + Z_{2П} + Z_{3П}} \times \begin{bmatrix} Z_{2П}(Z_{1П} + Z_{3П}) & Z_{2П}Z_{3П} \\ Z_{2П} & Z_{3П}(Z_{1П} + Z_{2П}) \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \frac{1}{Z_{1П}} + \frac{1}{Z_{2П}} & -\frac{1}{Z_{1П}} \\ -\frac{1}{Z_{1П}} & \frac{1}{Z_{1П}} + \frac{1}{Z_{3П}} \end{bmatrix}$
<p>в)</p>	$\frac{1}{2} \begin{bmatrix} Z_1 + Z_2 & Z_2 - Z_1 \\ Z_2 - Z_1 & Z_1 + Z_2 \end{bmatrix}$	$\frac{1}{2Z_1Z_2} \begin{bmatrix} Z_1 + Z_2 & Z_1 - Z_2 \\ Z_1 - Z_2 & Z_1 + Z_2 \end{bmatrix}$

* Неуравновешенным называется четырехполюсник, имеющий один общий входной и выходной зажим.

4. Реализация передаточной функции в виде Г-образного четырехполюсника (рис. 18.1), составленного из r С (или r -L)-элементов.

Для него

$$K_{\dot{u}_{x,x}}(p) = \frac{U_2(p)}{U_1(p)} = \frac{Z_2(p)}{Z_1(p) + Z_2(p)} = \frac{P(p)}{Q(p)} = \frac{\frac{P(p)}{L(p)}}{\frac{Q(p)}{L(p)}} \quad (18.5)$$

Здесь $P(p)$ и $Q(p)$ — заданные полиномы по степеням p , $L(p)$ — полином от p , который выбирается так, чтобы он имел тот же порядок, что полиномы $P(p)$ и $Q(p)$, а его корни чередуются с корнями уравнений $P(p) = 0$ и $Q(p) = 0$. Из (18.5) находим искомые операторные сопротивления элементов Г-образного четырехполюсника:

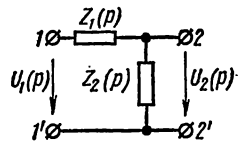


Рис. 18.1

$$Z_2(p) = \frac{P(p)}{L(p)}, \quad Z_1(p) = \frac{Q(p) - P(p)}{L(p)} \quad (18.6)$$

Двухполюсники $Z_1(p)$ и $Z_2(p)$ реализуются методами, указанными в гл. 17.

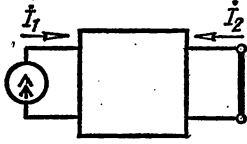
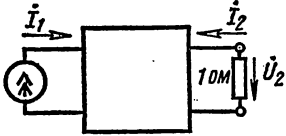
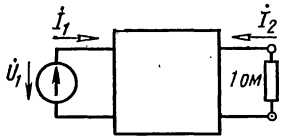
Пример дан в задаче 18.3.

5. Синтез четырехполюсника, нагруженного, на активное сопротивление. Весьма важным является синтез по заданному передаточному сопротивлению T_Z или передаточной проводимости T_Y при нагрузке четырехполюсника на чисто активное сопротивление R_n . При этом для удобства величины T_Z или T_Y задаются в нормированном виде. Это означает, что все сопротивления четырехполюсника уменьшаются в R_n раз, что соответствует приведению нагрузки R_n к 1 ом [табл. 18.2, формулы (18.9) и (18.10)]. В результате синтеза по заданной нормированной величине T_Z или T_Y будут получены нормированные элементы цепи. Для перехода к их истинным значениям надо все полученные величины r и L умножить на R_n , а все емкости C разделить на R_n .

6. Синтез четырехполюсников по заданным передаточным функциям. В табл. 18.2 приведены выражения для этих функций и их связь с Z -и Y -параметрами. Выражения T_Z и T_Y даны в нормализованном виде.

Таблица 18.2

Определяемая величина	Схема	Формулы	№ формулы
Коэффициент передачи напряжения		$K_U = \frac{\dot{U}_2}{\dot{U}_1} = \frac{Z_{21}}{Z_{11}} = -\frac{Y_{21}}{Y_{22}}$	(18.7)

Определяемая величина	Схема	Формулы	№ формулы
Коэффициент передачи тока		$K_I = \frac{i_2}{i_1} = -\frac{Z_{21}}{Z_{22}} = \frac{Y_{21}}{Y_{11}}$	(18.8)
Передаточное сопротивление (нормированное)		$T_Z = \frac{U_2}{i_2} = \frac{Z_{21}}{1+Z_{22}}$	(18.9)
Передаточная проводимость (нормированная)		$T_Y = \frac{i_2}{U_1} = \frac{Y_{21}}{1+Y_{22}}$	(18.10)

Задача синтеза четырехполюсника по заданной передаточной функции может быть решена одним из следующих методов:

1) сначала находят $Z(p)$ -или $Y(p)$ -параметры, а затем по этим параметрам реализуют четырехполюсник; методика определения этих параметров зависит от того, какие передаточные функции заданы: а) T_Z или T_Y ; б) K_U или K_I ;

2) реализация осуществляется непосредственно по передаточной функции.

А. Синтез реактивных четырехполюсников.

а) Нахождение $Z(p)$ или $Y(p)$ -параметров по заданной T_Z или T_Y . Пусть задано передаточное сопротивление при нормированной нагрузке

$$T_Z = \frac{P(p)}{Q(p)} = \frac{P(p)}{m(p) + n(p)}, \quad (18.11)$$

где $m(p)$ и $n(p)$ — соответственно четная и нечетная части полинома $Q(p)$; $P(p)$ является либо четным, либо нечетным полиномом.

Если $P(p)$ — четный полином, то числитель и знаменатель формулы (18.11) делим на нечетную часть знаменателя $n(p)$, а если $P(p)$ — нечетный полином, то делим на четную часть знаменателя $m(p)$. Тогда формула (18.11) примет вид:

$$\begin{array}{ll} \text{для } P(p) \text{ четного} & \text{для } P(p) \text{ нечетного} \\ T_Z = \frac{\frac{P(p)}{n(p)}}{1 + \frac{m(p)}{n(p)}}; & T_Z = \frac{\frac{P(p)}{m(p)}}{1 + \frac{n(p)}{m(p)}}. \end{array} \quad (18.12a) \quad (18.12б)$$

Сопоставляя выражения (18.12а и б) с (18.9), получим:

$$\begin{array}{ll} \text{для } P \text{ четного} & \text{для } P \text{ нечетного} \\ Z_{21}(p) = \frac{P(p)}{n(p)}, & Z_{21}(p) = \frac{P(p)}{m(p)}, \\ Z_{22}(p) = \frac{m(p)}{n(p)}. & Z_{22}(p) = \frac{n(p)}{m(p)}. \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{ll} \text{для } P \text{ четного} & \text{для } P \text{ нечетного} \right\} (18.13a) \quad (18.13б)$$

Если задана нормированная передаточная проводимость T_Y , то аналогично из сопоставления с формулой (18.10) можно найти $Y(p)$ -параметры.

Пример дан в задаче 18.5.

б) Нахождение $Z(p)$ -или $Y(p)$ -параметров по заданной в режиме холостого хода функции $K_U(p)$ или в режиме короткого замыкания функции $K_I(p)$.

Передаточные функции $K_U(p)$ и $K_I(p)$ представляют собой отношения четных полиномов.

Положим, что задано

$$K_U(p) = P(p)/Q(p). \quad (18.14)$$

Разделим числитель и знаменатель формулы (18.14) на нечетный полином $L(p)$, степень которого на единицу больше или меньше степени полинома $Q(p)$, а корни $L(p)$ чередуются с корнями $Q(p)$:

$$K_U(p) = \frac{\frac{P(p)}{L(p)}}{\frac{Q(p)}{L(p)}}. \quad (18.15)$$

Сопоставляя (18.15) с (18.7), найдем:

$$\left. \begin{array}{ll} Z_{21} = \frac{P(p)}{L(p)} & -Y_{21} = \frac{P(p)}{L(p)}, \\ \text{или} & \\ Z_{11} = \frac{Q(p)}{L(p)} & Y_{22} = \frac{Q(p)}{L(p)}. \end{array} \right\} \quad (18.16)$$

Пример приведен в задаче 18.8.

Если задана передаточная функция $K_I(p)$, то $Z(p)$ -или $Y(p)$ -параметры определяются аналогично, используя для сопоставления формулы (18.8).

Итак, вне зависимости от вида заданной передаточной функции по формулам (18.13) или (18.16) находятся два из трех параметров четырехполюсника.

Как известно, двумя параметрами определяется симметричный четырехполюсник. Поэтому, если искомый четырехполюсник синтезировать по симметричной схеме, то для этого следует принять:

$$Z_{22} = Z_{11}; \quad Z_{12} = Z_{21}; \quad Y_{22} = Y_{11}; \quad Y_{12} = Y_{21}.$$

По двум известным Z (или Y)-параметрам можно составить мостовую схему, сопротивления которой Z_1 и Z_2 могут быть найдены из формул табл. 18.1:

$$Z_{11} = Z_{22} = \frac{Z_1 + Z_2}{2}; \quad Z_{12} = Z_{21} = \frac{Z_2 - Z_1}{2},$$

откуда

$$Z_1 = Z_{11} - Z_{12}, \quad Z_2 = Z_{11} + Z_{12}. \quad (18.17)$$

Реализация двухполюсников $Z_1(p)$ и $Z_2(p)$ осуществляется методами, изложенными в гл. 17.

Как известно, мостовая схема с точки зрения ее практической реализации является неэкономной, так как содержит большее число элементов, чем эквивалентные ей симметричные Т- или П-образные схемы. Поэтому в тех случаях, когда физически возможен (т. е. все элементы операторных сопротивлений будут положительны) переход от мостовой к Т- или П-образной схеме его следует осуществить. Соответствующие формулы перехода имеют вид (см. табл. 18.1):

$$Z_{1T} = Z_{3T} = Z_1; \quad Z_{2T} = \frac{Z_2 - Z_1}{2}; \quad (18.18)$$

$$Z_{1П} = \frac{2Z_1Z_2}{Z_2 - Z_1}; \quad Z_{2П} = Z_{3П} = Z_2. \quad (18.19)$$

Пример дан в задаче 18.8.

Б. Синтез четырехполюсников, состоящих из элементов двух типов: r , C или r , L .

В этом случае, как и при синтезе реактивных четырехполюсников, вначале определяют Z - или Y -параметры, а затем по ним синтезируются четырехполюсник. Методика определения этих параметров зависит от того, какие передаточные функции заданы.

а) Определение Z (или Y)-параметров по заданным $T_Z(p)$ или $T_Y(p)$. Положим, что задано передаточное сопротивление

$$T_Z(p) = P(p)/Q(p).$$

Его знаменатель разбиваем на два слагаемых $Q_1(p)$ и $Q_2(p)$ как производится разбивка, см. далее). Тогда

$$T_Z(p) = \frac{P(p)}{Q_1(p) + Q_2(p)} = \frac{\frac{P(p)}{Q_2(p)}}{1 + \frac{Q_1(p)}{Q_2(p)}}.$$

Сопоставляя эту формулу с (18.9), получим:

$$Z_{21} = \frac{P(p)}{Q_2(p)}; Z_{22} = \frac{Q_1(p)}{Q_2(p)}. \quad (18.20)$$

Полиномы $Q_1(p)$ и $Q_2(p)$ выбираются так. Находим корни знаменателя заданного выражения $Q(p)$ и разлагаем его на множители:

$$Q(p) = (p + \sigma_1)(p + \sigma_2) \dots (p + \sigma_n).$$

Составляем полином $Q_1(p)$, число корней которого равно числу корней $Q(p)$:

$$Q_1(p) = k'(p + \sigma'_1)(p + \sigma'_2) \dots (p + \sigma'_n), \quad (18.21)$$

а его корни σ'_k могут быть найдены одним из следующих двух способов:

Способ 1. Каждый из корней σ'_k выбирается так, чтобы он был больше соответствующего корня σ_k , т. е. должны выполняться неравенства

$$\sigma'_k > \sigma_k \quad (k = 1, 2, \dots, n). \quad (18.22a)$$

Постоянная k' выбирается так, чтобы имело место следующее неравенство:

$$k' \sigma'_1 \sigma'_2 \dots \sigma'_n < \sigma_1 \sigma_2 \dots \sigma_n. \quad (18.22b)$$

Способ 2. Корни σ'_k выбираются так, чтобы каждый из них был меньше соответствующего корня σ_k , т. е.

$$\sigma'_k < \sigma_k \quad (k = 1, 2, \dots, n). \quad (18.23a)$$

Постоянная k' должна удовлетворять следующему неравенству:

$$k' \leq 1. \quad (18.23b)$$

После того как по одному из указанных способов полином $Q_1(p)$ определен, полином $Q_2(p)$ находится из равенства

$$Q_2(p) = Q(p) - Q_1(p). \quad (18.24)$$

Задача решается аналогично, если задана не $T_Z(p)$, а $T_Y(p)$.

Примеры приведены в задачах 18.10 и 18.11.

б) Определение Z (или Y)-параметров по заданным $K_U(p)$ или $K_I(p)$.

Положим, что задано

$$K_U(p) = P(p)/Q(p).$$

В этом случае метод определения Z (или Y)-параметров таков. Делим числитель и знаменатель последнего выражения на полином $L(p)$, степень которого равна степени знаменателя $Q(p)$, а корни чередуются с корнями $Q(p)$:

$$K_U(p) = \frac{\frac{P(p)}{L(p)}}{\frac{Q(p)}{L(p)}}. \quad (18.25)$$

Сопоставляя это выражение с (18.7), найдем:

$$Z_{21} = \frac{P(p)}{L(p)} \quad -Y_{21} = \frac{P(p)}{L(p)},$$

или

$$Z_{11} = \frac{Q(p)}{L(p)} \quad Y_{22} = \frac{Q(p)}{L(p)}.$$

Задача решается аналогично, если задана не $K_U(p)$, а $K_I(p)$.

Таким образом, по любой заданной передаточной функции определены два из трех Z (или Y)-параметра. Третий параметр выбирается исходя из условия симметрии схемы, и дальнейшее построение четырехполюсника осуществляется, как в случае синтеза реактивных четырехполюсников.

Пример дан в задаче 18.13.

7. Синтез четырехполюсника постоянного затухания. Его передаточная функция не зависит от частоты и является постоянной величиной, т. е.

$$K(p) = A.$$

Такой четырехполюсник может быть реализован по мостовой схеме (см. рис. в табл. 18.1). Он имеет входное сопротивление, равное R при его нагрузке на согласованное сопротивление R . Его продольное и диагональное сопротивления определяются по формулам:

$$R_1 = R \frac{1 - e^{-g}}{1 + e^{-g}}; \quad R_2 = R \frac{1 + e^{-g}}{1 - e^{-g}}, \quad (18.27)$$

где

$$g = \ln \frac{1}{A}.$$

8. Синтез четырехполюсника постоянного активного сопротивления, т. е. такого, у которого входное сопротивление на всех частотах равно постоянной величине R при его нагрузке на активное сопротивление R .

Частным случаем четырехполюсника постоянного активного сопротивления является симметричный мостовой четырехполюсник, если сопротивление Z_1 его продольного плеча обратно сопротивлению Z_2 диагонального плеча, т. е.

$$Z_1 Z_2 = R^2. \quad (18.28a)$$

В нормализованном мостовом четырехполюснике

$$Z_1 Z_2 = 1. \quad (18.28б)$$

Для мостового четырехполюсника нормализованные передаточные функции связаны между собой соотношениями $T_Z = -T_Y = K_U = -K_I$. Если каждую из них обозначить через $K(p)$, то нормализованное сопротивление продольного плеча определяется по формуле

$$Z_1 = \frac{1 - K(p)}{1 + K(p)}. \quad (18.29)$$

Таким образом, синтез мостового четырехполюсника постоянного активного сопротивления осуществляется в следующем порядке. По (18.29) находим Z_1 , затем по (18.28б) определяем Z_2 . Эти сопротивления реализуются методами, изложенными в гл. 17. Если, по условию, $R \neq 1$, то элементы синтезированного четырехполюсника должны быть нормализованы в отношении R .

Пример приведен в задаче 18.16.

9. Синтез фазового контура или четырехполюсника чисто фазового сдвига. Такой четырехполюсник, будучи нагруженным на согласованное сопротивление R , представляет собой частный случай четырехполюсника постоянного активного сопротивления и реализуется, как указывалось.

Пример дан в задаче 18.18.

УПРАЖНЕНИЯ И ЗАДАЧИ

18.1. Для некоторого четырехполюсника Z -параметры имеют следующие выражения:

$$Z_{11} = \frac{3p^2 + 2p + 1}{p}; \quad Z_{12} = \frac{1}{p}; \quad Z_{22} = \frac{p + 1}{p}.$$

Проверить выполнимость условий вычетов и вещественной части. Найти схему четырехполюсника, реализующую Z -параметры.

Решение. Проверяем условие вычетов (18.1). Все заданные параметры имеют единственный полюс при $p = 0$. Находим вычеты в этом полюсе:

$$k_{11} = [\text{Res } Z_{11}(p)]_{p=0} = \left[\text{Res } \frac{3p^2 + 2p + 1}{1} \right]_{p=0} = \left[\frac{3p^2 + 2p + 1}{1} \right]_{p=0} = 1;$$

$$k_{22} = [\text{Res } Z_{22}(p)]_{p=0} = 1, \quad k_{12} = [\text{Res } Z_{12}(p)]_{p=0} = 1.$$

Условие вычетов выполняется, так как

$$k_{11}k_{22} - k_{12}^2 = 1 \cdot 1 - 1^2 = 0.$$

Проверяем условие вещественной части (18.2а):

$$r_{11} = \operatorname{Re}[Z_{11}(p)]_{p=j\omega} = \operatorname{Re}\left[\frac{3p^2 + 2p + 1}{p}\right]_{p=j\omega} = \operatorname{Re}\frac{-3\omega^2 + j2\omega + 1}{j\omega} = 2;$$

$$r_{22} = \operatorname{Re}[Z_{22}(p)]_{p=j\omega} = 1; \quad r_{12} = \operatorname{Re}[Z_{12}(p)]_{p=j\omega} = 0.$$

Условие вещественной части выполняются, так как

$$r_{11}r_{22} - r_{12}^2 = 2 \cdot 1 - 0^2 > 0.$$

Попытаемся реализовать заданные Z-параметры T-образной схемой. Для этого воспользуемся Z-матрицей табл. 18.1:

$$Z_{11} = Z_{1T} + Z_{2T} = \frac{3p^2 + 2p + 1}{p}; \quad (1)$$

$$Z_{12} = Z_{2T} = \frac{1}{p}; \quad (2)$$

$$Z_{22} = Z_{2T} + Z_{3T} = \frac{p + 1}{p}. \quad (3)$$

Решая эти уравнения, из (2) находим

$$Z_{2T} = 1/p,$$

а из (1) и (3) — остальные параметры T-образной схемы:

$$Z_{1T} = Z_{11} - Z_{2T} = \frac{3p^2 + 2p + 1}{p} - \frac{1}{p} = 3p + 2;$$

$$Z_{3T} = Z_{22} - Z_{2T} = \frac{p + 1}{p} - \frac{1}{p} = 1.$$

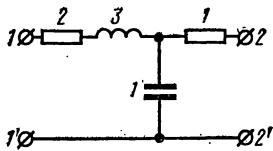


Рис. 18.2

Соответствующая T-образная схема четырехполюсника изображена на рис. 18.2. Если попытаться реализовать четырехполюсник П-образной схемой, то окажется, что сопротивление $Z_{ПП} = 3p^2 + 5p + 3$ физически нереализуемо.

18.2. Выяснить, какие из следующих выражений Z- и Y-параметров могут соответствовать физически реализуемым четырехполюсникам, и для них найти соответствующие схемы:

а) $Z_{11} = Z_{12} = \frac{1}{p}, \quad Z_{22} = \frac{2p^2 + p + 5}{p};$

б) $Y_{11} = Y_{12} = \frac{4p + 1}{20p^2 + 9p + 1}, \quad Y_{22} = \frac{14p + 3}{20p^2 + 9p + 1};$

$$в) Z_{11} = Z_{22} = \frac{3p^2 + p + 2}{p}, \quad Z_{12} = \frac{p^2 + 2}{p};$$

$$г) Z_{11} = \frac{5p^2 + 4}{p^2 + 4p}, \quad Z_{12} = \frac{2}{p}, \quad Z_{22} = \frac{3}{p}.$$

18.3. Четырехполюсник имеет передаточную функцию по напряжению при холостом ходе

$$K_{U_{x,x}} = \frac{p}{4p^2 + 7p + 2}.$$

Реализовать его в виде Г-образной схемы рис. 18.1.

Решение. В соответствии с формулой (18.5) обозначим полиномы числителя и знаменателя соответственно через

$$P(p) = p, \quad Q(p) = 4p^2 + 7p + 2.$$

Находим корни знаменателя из $Q(p) = 0$:

$$p_1 \approx -0,36; \quad p_2 \approx -1,39.$$

Согласно п. 4 основных положений разделим числитель и знаменатель передаточной функции на полином $L(p)$, корни которого чередуются с корнями $Q(p)$.

Рассмотрим три варианта выбора полинома $L(p)$.

1. Пусть $L(p) = p(p+1)$, его корни $p'_1 = 0$ и $p'_2 = -1$ чередуются с корнями p_1 и p_2 полинома $Q(p)$. Элементы Г-образных плеч вычисляем по формуле (18.6):

$$Z_2(p) = \frac{P(p)}{L(p)} = \frac{p}{p(p+1)} = \frac{1}{p+1}.$$

Согласно (17.126) это выражение представляет собой параллельный контур, состоящий из $r = 1$ и $C = 1$.

Спротивление

$$Z_1(p) = \frac{Q(p) - P(p)}{L(p)} = \frac{4p^2 + 7p + 2 - p}{p(p+1)} = 4 + \frac{2}{p}.$$

Это выражение — последовательное соединение $r = 4$ и $C = 0,5$. Искомый четырехполюсник имеет вид рис. 18.3,а.

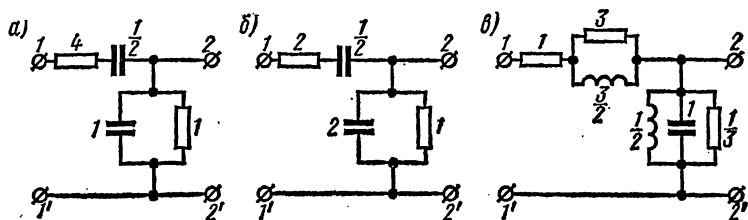


Рис. 18.3

2. Выберем $L(p) = p(2p + 1)$. Его корни $p'_1 = 0$ и $p'_2 = -0,5$ также чередуются с корнями p_1 и p_2 . Аналогично предыдущему вычисляем

$$Z_2(p) = \frac{P(p)}{L(p)} = \frac{p}{p(2p + 1)} = \frac{1}{2p + 1}.$$

Этому сопротивлению соответствует параллельная цепочка из $r = 1$ и $C = 2$.

Сопротивление

$$Z_1(p) = \frac{Q(p) - P(p)}{L(p)} = \frac{4p^2 + 6p + 2}{p(2p + 1)} = 2 + \frac{2}{p}.$$

Это последовательная цепочка из $r = 2$ и $C = 0,5$.

Схема реализации имеет вид рис. 18.3,б.

3. Пусть $L(p) = (p + 1)(p + 2)$, его корни также чередуются с p_1 и p_2 . По (18.6) вычисляем

$$Z_2(p) = \frac{p}{(p + 1)(p + 2)} = \frac{p}{p^2 + 3p + 2} = \frac{1}{p + 3 + \frac{2}{p}}.$$

Этому выражению соответствуют три параллельно соединенных сопротивления, элементы которых $r_2 = 3$, $L_2 = 0,5$, $C_2 = 1$.

Сопротивление

$$Z_1(p) = \frac{4p^2 + 6p + 2}{(p + 1)(p + 2)} = \frac{2 + 4p}{2 + p} = 1 + \frac{1}{\frac{1}{3} + \frac{1}{\frac{3}{2}p}}.$$

Этому выражению соответствуют последовательное соединение активного сопротивления $r_2 = 1$ ом и параллельной цепочки из $r_3 = = 3$ ом и $L = 3/2$ гн.

Схема реализации имеет вид рис. 18.3,в.

Заметим, что наиболее простая схема оказалась в случае 1.

18.4. Реализовать четырехполюсники в виде Г-образных схем, имеющие следующие передаточные функции по напряжению при холостом ходе:

$$а) K_{U_{x,x}} = \frac{2p(p + 1)}{5p^2 + 9p + 2}; \quad б) K_{U_{x,x}} = \frac{2p + 5}{10p + 9}.$$

18.5. Найти схему реактивного четырехполюсника, нормированное передаточное сопротивление которого имеет вид

$$T_Z = \frac{2,5 \cdot 10^{-21} p^4 - 5 \cdot 10^{-11} p^2 + 0,5}{2,5 \cdot 10^{-21} p^4 + 5 \cdot 10^{-18} p^3 + 20 \cdot 10^{-11} p^2 + 5 \cdot 10^{-8} p + 0,5}.$$

Вычислить элементы четырехполюсника, если нагрузкой является активное сопротивление $R = 100$ ом.

Решение. В данной задаче

$$P(p) = 2,5 \cdot 10^{-21} p^4 - 5 \cdot 10^{-11} p^2 + 0,5; \quad m(p) = 2,5 \cdot 10^{-21} p^4 + 20 \cdot 10^{-11} p^2 + 0,5; \quad n(p) = 5 \cdot 10^{-18} p^3 + 5 \cdot 10^{-8} p.$$

Числитель T_z представляет собой четный полином, поэтому в соответствии с п. 6, А, а) основных положений и соотношений для определения нормированных Z -параметров воспользуемся формулами (18.13а):

$$Z_{12}(p) = \frac{P(p)}{n(p)} = \frac{2,5 \cdot 10^{-21} p^4 - 5 \cdot 10^{-11} p^2 + 0,5}{5 \cdot 10^{-18} p^3 + 5 \cdot 10^{-8} p};$$

$$Z_{22}(p) = Z_{11}(p) = \frac{m(p)}{n(p)} = \frac{2,5 \cdot 10^{-21} p^4 + 20 \cdot 10^{-11} p^2 + 0,5}{5 \cdot 10^{-18} p^3 + 5 \cdot 10^{-8} p}.$$

По этим Z -параметрам по формулам (18.17) находим нормированные параметры мостовой схемы:

$$Z_1(p) = Z_{11}(p) - Z_{12}(p) = \frac{25 \cdot 10^{-11} p^2}{5 \cdot 10^{-18} p^3 + 5 \cdot 10^{-8} p} = \frac{5 \cdot 10^7 p}{p^2 + 10^{10}};$$

$$Z_2(p) = Z_{11}(p) + Z_{12}(p) = \frac{5 \cdot 10^{-21} p^4 + 15 \cdot 10^{-11} p^2 + 1}{5 \cdot 10^{-18} p^3 + 5 \cdot 10^{-8} p} = 10^{-3} p + \frac{2 \cdot 10^7}{p}.$$

Сопротивление $Z_1(p)$ — параллельно соединенные индуктивность $L_{1н}$ и емкость $C_{1н}$, параметры которых находим по (17.7а), сопротивление $Z_2(p)$ — последовательно соединенные $L_{2н}$ и $C_{2н}$ (индекс «н» указывает на нормированность элементов):

$$L_{1н} = 5 \cdot 10^{-3}, \quad C_{1н} = 2 \cdot 10^{-8}, \quad L_{2н} = 10^{-3}, \quad C_{2н} = 5 \cdot 10^{-8}.$$

Так как нагрузка $R = 100 \text{ ом}$, то, переходя от нормированных величин к действительным, получим:

$$L_1 = L_{1н} R = 5 \cdot 10^{-3} \cdot 100 = 0,5 \text{ гн}; \quad C_1 = C_{1н} / R = 2 \cdot 10^{-8} / 100 = 2 \cdot 10^{-10} \text{ ф};$$

$$L_2 = L_{2н} R = 10^{-3} \cdot 100 = 0,1 \text{ гн}; \quad C_2 = C_{2н} / R = 5 \cdot 10^{-8} / 100 = 5 \cdot 10^{-10} \text{ ф}.$$

Схема реализации представлена на рис. 18.4.

18.6. По заданным нормированным передаточным функциям найти схемы реактивных четырехполюсников и вычислить значения их элементов, если нагрузкой является активное сопротивление R :

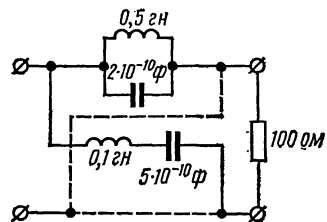


Рис. 18.4

$$а) T_z = \frac{p^3 + 10^{12} p}{p^3 + 10^5 p^2 + 3 \cdot 10^{12} p + 2 \cdot 10^{17}}, \quad R = 500 \text{ ом};$$

$$б) T_Y = \frac{2 \cdot 10^5 p^2 + 10^{17}}{8 p^3 + 6 \cdot 10^5 p^2 + 2 \cdot 10^{12} p + 10^{17}}, \quad R = 200 \text{ ом}.$$

18.7. Коэффициент передачи напряжения реактивного четырех-
 полюсника в режиме холостого хода имеет вид

$$K_{U_{x,x}} = \frac{(p^2 + 2)(p^2 + 6)(p + 20)}{(p^2 + 4)(p^2 + 12)(p^2 + 25)}$$

Указать, какие из приведенных далее выражений функции $L(p)$ могут быть выбраны для знаменателей Z - и Y -параметров формул (18.16):

$$\begin{aligned} L_1(p) &= (p^2 + 5)(p^2 + 16)(p^2 + 30); & L_5(p) &= p(p^2 + 5)(p^2 + 12); \\ L_2(p) &= (p^2 + 5)(p^2 + 15); & L_6(p) &= p(p^2 + 5)(p^2 + 16); \\ L_3(p) &= p(p^2 + 8)(p^2 + 10); & L_7(p) &= p(p^2 + 5)(p^2 + 16)(p^2 + 30); \\ L_4(p) &= p(p^2 + 7)(p^2 + 30); \end{aligned}$$

Решение. Полином $L_1(p)$ неприемлем, так как является четным.

Полином $L_2(p)$ не годится, так как его степень отличается от степени знаменателя $K_{U_{x,x}}$ больше чем на единицу.

Полином $L_3(p)$ не годится, так как его степень отличается от степени знаменателя $K_{U_{x,x}}$ больше чем на единицу.

Полином $L_3(p)$ и $L_4(p)$ неприемлемы, так как у них нет чередования нулей с нулями знаменателя $K_{U_{x,x}}$.

Полином $L_5(p)$ так же неприемлем, так как один из его корней равен корню знаменателя $K_{U_{x,x}}$.

Полиномы $L_6(p)$ и $L_7(p)$ приемлемы.

18.8. Реализовать четырехполюсник с передаточной функцией по напряжению в режиме холостого хода:

$$K_{U_{x,x}} = \frac{10^{-3}p^2 + 0,5 \cdot 10^9}{10^{-3}p^2 + 1,5 \cdot 10^9}$$

Решение. Задачу будем решать в соответствии с п. 6А,б основных положений и соотношений. Примем степень полинома, на который будем делить числитель и знаменатель передаточной функции, на единицу меньше степени полинома знаменателя $K_{U_{x,x}}$. Пусть, например, $L(p) = p$. Тогда по (18.16) найдем Z -параметры симметричного мостового четырехполюсника:

$$\begin{aligned} Z_{21} = Z_{12} &= \frac{P(p)}{L(p)} = \frac{10^{-3}p^2 + 0,5 \cdot 10^9}{p} = 10^{-3}p + \frac{1}{2 \cdot 10^{-9}p}; \\ Z_{22} = Z_{11} &= \frac{Q(p)}{L(p)} = \frac{10^{-3}p^2 + 1,5 \cdot 10^9}{p} = 10^{-3}p + \frac{1}{\frac{2}{3} \cdot 10^{-9}p}. \end{aligned}$$

Сопровиления плеч мостового четырехполюсника находим по (18.17):

$$Z_1 = Z_{11} - Z_{12} = \frac{1}{10^{-9}p};$$

$$Z_2 = Z_{11} + Z_{12} = 2 \cdot 10^{-3}p + \frac{1}{0,5 \cdot 10^{-9}p}$$

Синтезированный четырехполосник изображен на рис. 18.5,а. Он содержит шесть элементов. Выясним, нельзя ли его преобразовать в эквивалентный симметричный Т-образный четырехполосник. По формулам (18.18) находим элементы эквивалентного Т-образного четырехполосника:

$$Z_{1T} = Z_1 = \frac{1}{10^{-9}p}; \quad Z_{2T} = \frac{Z_2 - Z_1}{2} = 10^{-3}p + \frac{1}{10^{-9}p}$$

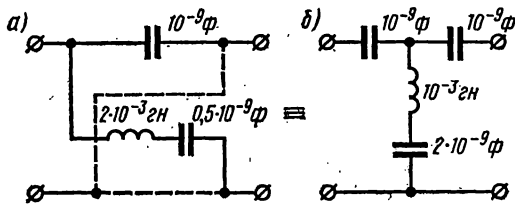


Рис. 18.5

Полученные сопротивления могут быть реализованы в виде Т-образной схемы (рис. 18.5,б), которая содержит четыре элемента.

18.9. По заданной передаточной функции четырехполосника без потерь в режиме холостого хода осуществить симметричную реализацию в виде мостовой схемы:

$$K_{U_{x,x}} = \frac{-2 \cdot 10^{-12}p^2 + 1}{4 \cdot 10^{-12}p^2 + 1}$$

Задачу решить в двух вариантах, выбрав полином $L(p)$ так, чтобы его степень была: 1) на единицу меньше и 2) на единицу больше степени знаменателя $K_{U_{x,x}}$.

18.10. Дана нормированная передаточная проводимость

$$T_Y = \frac{(p+1)(p+8)(p+15)}{(p+3)(p+12)(p+20)}$$

Выяснить, какие из приведенных далее полиномов $Q_1(p)$ являются пригодными для возможности реализации четырехполосника:

- 1) $Q_1(p) = 0,05(p+2)(p+4)$;
- 2) $Q_1(p) = 0,02(p+1)(p+4)(p+16)(p+24)$;
- 3) $Q_1(p) = 0,03(p+4)(p+7)(p+14)(p+16)$;
- 4) $Q_1(p) = 0,7(p+5)(p+16)(p+25)$;
- 5) $Q_1(p) = 5(p+2)(p+5)(p+16)$;
- 6) $Q_1(p) = 0,3(p+4)(p+14)(p+25)$;
- 7) $Q_1(p) = 0,4(p+1)(p+5)(p+16)$;
- 8) $Q_1(p) = (p+2)(p+5)(p+16)$.

Решение. Полином 1 неприемлем, так как число его корней меньше числа корней знаменателя T_Y .

Полином 2 неприемлем, так как число его корней больше числа корней знаменателя T_Y .

Полином 3 неприемлем, так как его корни не чередуются с корнями знаменателя T_Y .

Полином 4 не годится, так как не выполняется условие (18.22б). Действительно,

$$0,7 \cdot 5 \cdot 16 \cdot 25 > 3 \cdot 12 \cdot 20.$$

Полином 5 неприемлем, так как не выполняется условие 18.23б.

Полиномы 6, 7 и 8 приемлемы.

18.11. По заданному нормированному передаточному сопротивлению T_Z определить Z-параметры четырехполюсника и найти его схему. Нагрузкой является активное сопротивление $R = 100 \text{ ом}$.

Сопротивление

$$T_Z = \frac{0,2p + 0,1 \cdot 10^8}{p + 0,6 \cdot 10^8} = \frac{P(p)}{Q(p)}.$$

Решение. Решим задачу двумя способами [(см. п. 6, Б, а) основных положений и соотношений].

Способ 1. Значение σ' выберем больше, чем $\sigma_1 = 0,6 \cdot 10^8$ [см. формулу (18.22а)]. Пусть, например, $\sigma'_1 = 1 \cdot 10^8$. Коэффициент k' должен удовлетворять неравенству (18.22б):

$$k'\sigma'_1 < \sigma_1 \quad \text{или} \quad k' < \frac{\sigma_1}{\sigma'_1} = \frac{0,6 \cdot 10^8}{1 \cdot 10^8} = 0,6.$$

Примем, например, $k' = 0,2$. Составим полином $Q_1(p)$ согласно (18.21), а $Q_2(p)$ найдем по (18.24):

$$Q_1(p) = k'(p + \sigma'_1) = 0,2(p + 10^8); \quad Q_2(p) = Q(p) - Q_1(p) = \\ = p + 0,6 \cdot 10^8 - 0,2p - 0,2 \cdot 10^8 = 0,8p + 0,4 \cdot 10^8.$$

Далее по (18.20) находим Z-параметры:

$$Z_{21} = \frac{P(p)}{Q_2(p)} = \frac{0,2p + 0,1 \cdot 10^8}{0,8p + 0,4 \cdot 10^8}; \quad Z_{22} = \frac{Q_1(p)}{Q_2(p)} = \frac{0,2p + 0,2 \cdot 10^8}{0,8p + 0,4 \cdot 10^8}.$$

Параметры (нормализованные) мостовой симметричной схемы определяем по (18.17):

$$Z_1 = Z_{22} - Z_{21} = \frac{0,2p + 0,2 \cdot 10^8}{0,8p + 0,4 \cdot 10^8} - \frac{0,2p + 0,1 \cdot 10^8}{0,8p + 0,4 \cdot 10^8} = \\ = \frac{0,125 \cdot 10^8}{p + 0,5 \cdot 10^8};$$

$$Z_2 = Z_{22} + Z_{21} = \frac{0,4p + 0,3 \cdot 10^8}{0,8p + 0,4 \cdot 10^8} = 0,5 + \frac{0,1 \cdot 10^8}{0,8p + 0,4 \cdot 10^8}.$$

Согласно (17.126) Z_1 представляет собой параллельно соединенные активное сопротивление и емкость, нормализованные величины которых равны $r_{1н} = 0,25$, $C_{1н} = 8 \cdot 10^{-8}$, а их действительные значения $r_1 = r_{1н} R = 0,25 \cdot 100 = 25 \text{ ом}$, $C_1 = C_{1н}/R = 8 \cdot 10^{-10} \text{ ф}$. Сопротивление Z_2 состоит из последовательного соединения активного сопротивления и параллельной rC -цепочки. Схема четырехполюсника изображена на рис. 18.6, а.

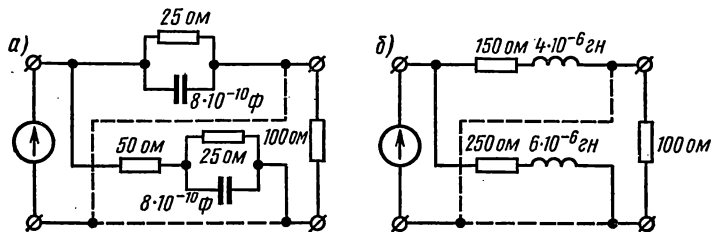


Рис. 18.6

Способ 2. Значение σ'_1 выберем меньше, чем σ_1 [см. формулу (18.23а)]. Примем $\sigma'_1 = 0,4 \cdot 10^8$ и $k' = 1$. Тогда

$$Q_1(p) = 1 \cdot (p + 0,4 \cdot 10^8); \quad Q_2(p) = 0,2 \cdot 10^8;$$

$$Z_{21} = \frac{0,2p + 0,1 \cdot 10^8}{0,2 \cdot 10^8}; \quad Z_{22} = \frac{p + 0,4 \cdot 10^8}{0,2 \cdot 10^8};$$

$$Z_1 = \frac{0,8p + 0,3 \cdot 10^8}{0,2 \cdot 10^8} = 4 \cdot 10^{-8} p + 1,5, \quad Z_2 = 6 \cdot 10^{-8} p + 2,5.$$

Сопротивления Z_1 и Z_2 — последовательно соединенные индуктивность и активное сопротивление, нормированные величины которых $L_{1н} = 4 \cdot 10^{-8}$, $r_{1н} = 1,5$, $L_{2н} = 6 \cdot 10^{-8}$, $r_{2н} = 2,5$. Их истинные величины равны:

$$L_1 = L_{1н} R = 4 \cdot 10^{-6} \text{ гн}; \quad r_1 = 150 \text{ ом}; \quad L_2 = 6 \cdot 10^{-6} \text{ гн}; \quad r_2 = 250 \text{ ом}.$$

Схема четырехполюсника изображена на рис. 18.6, б.

18.12. Синтезировать четырехполюсник по заданному нормированному передаточному сопротивлению $T_Z = 10^9/(p + 4 \cdot 10^6)$, считая, что нагрузкой является активное сопротивление $R = 500 \text{ ом}$.

18.13. Известен коэффициент передачи напряжения в режиме холостого хода

$$K_{U_{x.x}} = \frac{(p + 2)(p + 7)}{(p + 6)(p + 10)}.$$

Указать, какие из указанных далее полиномов $L(p)$ являются приемлемыми для возможности реализации четырехполюсника:

- 1) $L(p) = 2(p + 3)(p + 5)$;
- 2) $L(p) = (p + 7)(p + 12)$;
- 3) $L(p) = 5(p + 2)(p + 8)$;

- 4) $L(p) = (p + 1)(p + 8)(p + 12)$;
 5) $L(p) = 3(p + 8)$;
 6) $L(p) = 8(p + 2)(p + 7)$.

18.14. Коэффициент передачи напряжения четырехполюсника в режиме холостого хода имеет вид

$$K_{U_{x,x}} = \frac{2p + 10^8}{2p + 3 \cdot 10^8}.$$

Осуществить реализацию четырехполюсника в виде мостовой симметричной схемы в двух вариантах: 1) корень полинома $L(p)$ выбрать больше корня знаменателя $K_{U_{x,x}}$; 2) корень $L(p)$ выбрать меньше корня знаменателя $K_{U_{x,x}}$.

18.15. Синтезировать четырехполюсник постоянного затухания, нагрузка которого $R = 600 \text{ ом}$, а коэффициент передачи $K(p) = 0,2$.

18.16. Требуется синтезировать мостовой четырехполюсник постоянного активного сопротивления $R = 600 \text{ ом}$, нормализованный коэффициент передачи напряжения которого имеет вид

$$K_U = \frac{0,9 - 9 \cdot 10^{-4}p}{1,1 + 9 \cdot 10^{-4}p}.$$

Решение. Выражение нормализованного сопротивления продольного плеча мостового четырехполюсника определяем по (18.29):

$$Z_1(p) = \frac{1 - K(p)}{1 + K(p)} = \frac{1 - \frac{0,9 - 9 \cdot 10^{-4}p}{1,1 + 9 \cdot 10^{-4}p}}{1 + \frac{0,9 - 9 \cdot 10^{-4}p}{1,1 + 9 \cdot 10^{-4}p}} = 0,1 + 9 \cdot 10^{-4}p.$$

Оно представляет собой последовательное соединение активного сопротивления и индуктивности, нормализованные величины которых $r_{1н} = 0,1$ и $L_{1н} = 9 \cdot 10^{-4}$, а истинные $r_1 = 0,1 \cdot 600 = 60 \text{ ом}$, $L_1 = 9 \cdot 10^{-4} \cdot 600 = 0,54 \text{ гн}$.

Диагональное плечо $Z_2(p)$ — двухполюсник, обратный $Z_1(p)$ [см. формулу (18.28a)]. Он представляет собой параллельное соединение активного сопротивления и емкости (см. гл. 13). Его элементы находим по формулам:

$$r_2 = \frac{R^2}{r_1} = \frac{600^2}{60} = 6000 \text{ ом}; \quad C_2 = \frac{L}{R^2} = \frac{0,54}{600^2} = 1,5 \cdot 10^{-6} \text{ ф}.$$

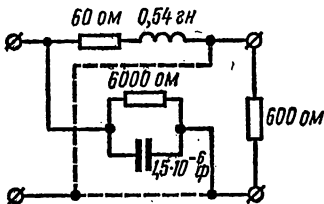


Рис. 18.7

Схема реализации показана на рис. 18.7.

18.17. Найти мостовые схемы четырехполюсников постоянного активного сопротивления R для следующих нормированных передаточных функций:

$$а) K_U = \frac{2 \cdot 10^{-7} p^2 + 0,8}{2 \cdot 10^{-7} p^2 + 4 \cdot 10^{-4} p + 1,2}, \quad R = 100 \text{ ом};$$

$$б) T_Z = \frac{2p}{10^{-8} p^2 + 2p + 4 \cdot 10^8}, \quad R = 200 \text{ ом}.$$

18.18. Реализовать в виде симметричного мостового четырехплюсника фазовый контур второго порядка, нагруженный на входе и выходе цепи на согласованные сопротивления $R = 600 \text{ ом}$. Рабочая передаточная функция контура имеет вид

$$K(p) = \frac{18 \cdot 10^{-10} p^2 - 6 \cdot 10^{-5} p + 1}{18 \cdot 10^{-10} p^2 + 6 \cdot 10^{-5} p + 1}.$$

Решение. Поскольку контур нагружен на согласованные сопротивления, его передаточная функция совпадает с заданной. Расчет сопротивления продольного плеча можно вести по следующей формуле:

$$Z_1 = R \frac{1 - K(p)}{1 + K(p)}.$$

По сравнению с формулой (18.29) здесь в правой части появился множитель R ; это связано с тем, что $K(p)$ задано в ненормированном виде. Подставляя в последнюю формулу заданное $K(p)$, найдем

$$\begin{aligned} Z_1 &= 600 \frac{1 - \frac{18 \cdot 10^{-10} p^2 - 6 \cdot 10^{-5} p + 1}{18 \cdot 10^{-10} p^2 + 6 \cdot 10^{-5} p + 1}}{1 + \frac{18 \cdot 10^{-10} p^2 - 6 \cdot 10^{-5} p + 1}{18 \cdot 10^{-10} p^2 + 6 \cdot 10^{-5} p + 1}} = \frac{36 \cdot 10^{-3} p}{18 \cdot 10^{-10} p^2 + 1} = \\ &= \frac{2 \cdot 10^7 p}{p^2 + \frac{1}{18 \cdot 10^{-10}}} \end{aligned}$$

Полученное выражение сопротивления продольного плеча искомой мостовой схемы реализуется параллельным LC -контуром, параметры которого находим по (17.7а):

$$C_1 = 5 \cdot 10^{-8} \text{ ф}; \quad L_1 = 36 \cdot 10^{-3} \text{ гн}.$$

Элементы диагональных плеч обратны найденным:

$$L_2 = R_0^2 C_1 = 600^2 \cdot 5 \cdot 10^{-8} = 18 \times 10^{-3} \text{ гн}; \quad C_2 = \frac{L_1}{R_0^2} = \frac{36 \cdot 10^{-3}}{600^2} = 10^{-7} \text{ ф}.$$

Схема реализации показана на рис. 18.8.

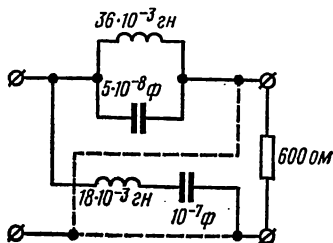


Рис. 18.8

К главе 1

1.3. а) $r_{1x,x} = 120 \text{ ом}$, $r_{1к,з} = 72 \text{ ом}$; б) $r_{1x,x} = 20 \text{ ом}$, $r_{1к,з} = 18 \text{ ом}$;
 в) $r_{1x,x} = 838 \text{ ом}$, $r_{1к,з} = 200 \text{ ом}$; г) $r_{1x,x} = 40 \text{ ом}$, $r_{1к,з} = 30 \text{ ом}$. 1.7. 15 в.
 1.11. 18 а; $r_{ш} = 0,0005 \text{ ом}$. 1.12. а) 0,15; б) 0,05. 1.13. 6 ом 1.15. 750 ом. 1.16.
 12 в; 2 ом. 1.17. На середине линии. 1.19. 7,5%. 1.20. Точное значение
 41,8 мм², по ГОСТу надо взять 50 мм². 1.22. $I_1 = 2,5 \text{ а}$; $I_2 = 1,5 \text{ а}$; $I_3 = 1 \text{ а}$.
 1.23. $I_1 = 5 \text{ а}$; $I_2 = 1 \text{ а}$; $I_3 = 4 \text{ а}$; $U_{ba} = 30 \text{ в}$. 1.24. 20 а; 10 а; 36 в; 36,7 в. 1.25.
 $I_1 = 98 \text{ а}$; $I_2 = 144 \text{ а}$; $I_0 = 46 \text{ а}$; $U_1 = 102 \text{ в}$; $U_2 = 71 \text{ в}$. 1.27. $I_1 = 5 \text{ а}$; $I_2 = 9 \text{ а}$;
 $I_3 = 1 \text{ а}$. 1.28. $I_1 = 8 \text{ а}$; $I_2 = 2 \text{ а}$; $I_3 = 6 \text{ а}$; $\varphi_1 = 78 \text{ в}$; $\varphi_2 = 20 \text{ в}$. 1. 30. $I_1 = 1,2 \text{ а}$;
 $I_2 = 0,3 \text{ а}$; $I = 1,5 \text{ а}$. 1.31. 25 в; $P_1 = 9 \text{ вт}$; $P_2 = 15,6 \text{ вт}$. 1.33. $I_1 = 10 \text{ ма}$;
 $I_2 = 4 \text{ ма}$; $I_3 = 20 \text{ ма}$; $I_4 = 6 \text{ ма}$; $U = 30 \text{ в}$. 1.35. $I_1 = 105 \text{ ма}$; $I_2 = 45 \text{ ма}$; $I_3 =$
 $= 5 \text{ ма}$. 1.37. $I_1 = 2 \text{ а}$; $I_2 = 2,7 \text{ а}$; $I_3 = 0,7 \text{ а}$; $I_4 = 2,2 \text{ а}$; $I_5 = 4,7 \text{ а}$; $I_6 = 2,5 \text{ а}$;
 $\varphi_a = -22 \text{ в}$; $\varphi_b = 47 \text{ в}$; $\varphi_c = -10 \text{ в}$. 1.38. $I_1 = 5 \text{ ма}$; $I_2 = 10 \text{ ма}$; $I_3 = 95 \text{ ма}$;
 $I_4 = 15 \text{ ма}$; $I_5 = 30 \text{ ма}$; $I_6 = 65 \text{ ма}$. 1.41. $\varphi_1 = 0$, $\varphi_2 = -60 \text{ в}$, $\varphi_3 = 80 \text{ в}$. 1.43.
 $I_1 = 2,25 \text{ ма}$; $I_2 = 1,4 \text{ ма}$; $I_3 = 0,85 \text{ ма}$; $I_4 = 0,75 \text{ ма}$; $I_5 = 0,1 \text{ ма}$; $I_6 = 1,5 \text{ ма}$.
 1.45. См. ответ к задаче 1.35. 1.46. $I_1 = 5 \text{ ма}$; $I_2 = 20 \text{ ма}$; $I_3 = 140 \text{ ма}$; $I_4 = 40 \text{ ма}$;
 $I_5 = 60 \text{ ма}$; $I_6 = 65 \text{ ма}$. 1.50. $I_1 = 0,8 \text{ а}$; $I_2 = 0,75 \text{ а}$; $I_3 = 2 \text{ а}$; $I_4 = 1,55 \text{ а}$; $I =$
 $= 2,75 \text{ а}$. 1.53. См. ответы к задаче 1.35. 1.55. 0,3 а; 0,2 а; 0,15 а; 0,1 а; 0,15 а;
 0,005 а; $r_{ab} = 100 \text{ ом}$; $P = 9 \text{ вт}$. 1.56. $I = 3,8 \text{ а}$; $I_1 = 0,5 \text{ а}$; $I_2 = 1,5 \text{ а}$; $I_3 = 3,3 \text{ а}$;
 $I_4 = 1,8 \text{ а}$; $I_5 = 2 \text{ а}$; $r_{11} = 33 \text{ ом}$. 1.60. $I_3 = 0,56 \text{ а}$; 1.61. а) $E_r = kE$, $r_r =$

$$= k(1 - k); \text{ б) } E_r = kE - E_1, \quad r_r = r_1 \nabla k(1 - k) r; \text{ в) } E_r = \frac{kEr}{r_1 + kr}, \quad r_r =$$

$$= (1 - k)r + \frac{kr_1 r}{kr + r_1}; \text{ г) } E_r = \frac{Er_3 f_4}{r_1 r_2 + r_1 r_3 + r_1 r_4 + r_2 r_3 + r_3 r_4}, \quad r_r =$$

$$= \frac{r_4 (r_1 r_2 + r_1 r_3 + r_2 r_3)}{r_1 r_2 + r_1 r_3 + r_1 r_4 + r_2 r_3 + r_3 r_4}; \text{ д) } E_r = E + rJ, \quad r_r = r + r_1. \text{ 1.62. 1) } E = 0, \quad r_0 =$$

$= 10 \text{ ом}$; 2) $E = 40 \text{ в}$, $r_0 = 5 \text{ ом}$; 3) $E = 5 \text{ в}$, $r_0 = 5 \text{ ом}$. 1.66. 40 ма. 1.67. 0,4 а.
 1.69. $I_4 = 3,8 \text{ ма}$; $I_5 = 1 \text{ ма}$. 1.70. $I_1 = 3,6 \text{ а}$; $I_2 = 1,6 \text{ а}$; $I_3 = 5,2 \text{ а}$; $I_4 = 0$. 1.71.
 См. ответ к задаче 1.50. 1.73. Для схемы рис. 1.14, а: $r_2 = 45 \text{ ом}$; $P_2 = 7,2 \text{ вт}$;
 $P_2/P_1 = 12,5\%$; $U_2/U_1 = 0,25$; для схемы рис. 1.14, б; $r_2 = 20 \text{ ом}$. $P_2 = 7,2 \text{ вт}$,
 $P_2/P_1 = 2,63\%$; $U_2/U_1 = 1/6$. 1.75. $g_{11} = 1/30 \text{ сим}$; $g_{22} = 1/48 \text{ сим}$; $g_{33} =$

$$= \frac{1}{75} \text{ сим}; \quad g_{44} = \frac{1}{48} \text{ сим}; \quad g_{55} = \frac{7}{400} \text{ сим}; \quad g_{12} = g_{14} = \frac{1}{60} \text{ сим}; \quad g_{13} = \frac{1}{150} \text{ сим};$$

$$g_{15} = \frac{1}{100} \text{ сим}; \quad g_{23} = \frac{1}{120} \text{ сим}; \quad g_{24} = \frac{1}{240} \text{ сим}; \quad g_{25} = \frac{1}{80} \text{ сим}; \quad g_{34} = \frac{1}{600} \text{ сим};$$

$$g_{35} = \frac{1}{200} \text{ сим}; \quad g_{45} = \frac{1}{400} \text{ сим}; \quad I_1 = 2,2 \text{ а}; \quad I_2 = 0,25 \text{ а}; \quad I_3 = 0,8 \text{ а}; \quad I_4 = 2,45 \text{ а};$$

$$I_5 = 0,55 \text{ а}. \text{ 1.77. } U = 40,5 - 3,75 I. \text{ 1.78. } I = 8 \cdot 10^{-3} - 4 \cdot 10^{-4} U; \quad I_1 = 8 \times$$

$$\times 10^{-3} - 2 \cdot 10^{-4} U; \quad I_2 = 2 \cdot 10^{-4} U; \quad I_3 = 2 \cdot 10^{-3} + 2 \cdot 10^{-4} U.$$

2.2. а) $\varphi = \frac{\pi}{12}$; $u_1 = 300 \sin \omega t$ в; $i_1 = 10 \sin \left(\omega t - \frac{\pi}{12} \right)$ а; $T = 0,02$ сек; $t = 50$ мс; б) $\varphi = \frac{2\pi}{3}$; $i_2 = 5 \sin \left(\omega t \pm \frac{2\pi}{3} \right)$ ма; $i_3 = 3 \sin \omega t$ ма; $T = 10$ мксек; $\dot{h} = 10^5$ мс; в) $\varphi = 1,57$ рад $= 90^\circ$; $u_2 = 300 \sin \omega t$ в; $u_3 = 200 \sin \left(\omega t + \frac{\pi}{2} \right) = 200 \cos \omega t$ в; $T = 0,06$ сек. $\dot{h} = 16 \frac{2}{3}$ мс.

2.4. 1) $232 \sin(\omega t \pm 32^\circ 45')$ в; 2) $475 \sin(\omega t \pm 79^\circ 05')$ в. 2.6. 1) $i = 9,1 \sin(\omega t - 57^\circ 30')$ а. $u_a = 91 \sin(\omega t - 57^\circ 30')$ в; $u_L = 146 \cos(\omega t - 57^\circ 30')$ в; $p_a = 416 [1 - \cos(2\omega t - 115^\circ)]$ вт; $p_L = 653 \sin(2\omega t - 115^\circ)$ вар; $p = 416 - 773 \cos(2\omega t - 57^\circ 30')$ вв; $\omega = 1,04 [1 - \cos(2\omega t - 115^\circ)]$ дж. 2.8. 12 ом; 0,51 мжн. 2.10. $u = 311 \sin(\omega t - 41^\circ 30')$ в; $u_a = 233 \sin \omega t$ в; $u_G = -206 \cos \omega t$ в; $p = 226 - 302 \cos(2\omega t - 41^\circ 30')$ вв; $\omega_0 = 0,319 (1 \pm \cos 2\omega t)$ дж. 2.12. $\dot{h} = 400$ мс; $r_0 = 16,2$ ом; $x_0 = 11,8$ ом (индуктивное). 2.14. 110 втн. 2.16. $U = 121$ в; $P_{сх} = 252$ вт; $Q_{сх} = 87,1$ вар; $S_{сх} = 266$ вв; $P_{реост} = 193,6$ вт; $P_{кат} = 58,4$ вт; $Q_{кат} = 87,1$ вар; $\varphi - \varphi_{кат} = 37^\circ 30'$. 2.17. $I = 7,68$ а; $U_1 = 82,5$ в; $P_1 = 307$ вт; $Q_1 = 557$ вар; $U_2 = 40$ в; $P_2 = 248$ вт; $Q_2 = 186$ вар; $P_{сх} = 555$ вт; $Q_{сх} = 743$ вар. 2.18. $r = 18,3$ ом; $L = 7,05$ мжн. 2.19. $U = 120$ в; $U_{кат} = 38,2$ в; $P_{кат} = 60,6$ вт; $U_{конт} = 144$ в; $P_{конт} = 20,2$ вт; $Q_L = 1,14$, $Q_C = 17,2$. 2.21. 1) 19,5 ом (емкостный), 2) 19,5 ом (индуктивный). 2.23. $U_1 = 6,3$ кв; $U_{пад} = 1,27$ кв; $\Delta U = 1,2$ кв; $\eta = 93\%$. 2.24. 1) $r_2 = 100$ ом; $x_2 = 100$ ом; 2) $r_2 = 100$ ом; $x_2 = -220$ ом. 2.25. $P'_{пр \max} \approx 18,3$ квт; $P''_{пр \max} = 50$ квт и $P_{пр \max} = 151$ квт. 2.28. 210 вт. 2.31. $i_1 = 2,5 \sqrt{2} \cos \omega t$ а; $i_2 = 5 \sqrt{2} \sin(\omega t \pm 126^\circ 55')$ а; $i = 7,2 \sqrt{2} \sin(\omega t \pm 114^\circ 45')$ а; $u = 125 \sqrt{2} \sin(\omega t \pm 73^\circ 45')$ в. 2.32. $I_1 = 15$ а; $I_2 = 16$ а; $I = 10,3$ а; $P = 900$ вт; $Q = 415$ вар; $S = 990$ вв; $r_0 = 8,5$ ом; $x = -3,9$ ом. 2.33. $I = 8,9$ а; $U = 120$ в; $r_0 = 12,4$ ом; $x_0 = 5,23$ ом. 2.35. $G = 155$ мкф; $Q_C = 2330$ вар.

3.1. $\dot{U} = 100 e^{j15^\circ} = 100 \cos 15^\circ \pm j 100 \sin 15^\circ = 96,6 \pm j 25,9 = 100 \angle 15^\circ$ в; $\dot{I} = 5 e^{-j20^\circ} = 5 \cos 20^\circ - j 5 \sin 20^\circ = 4,7 - j 1,71 = 5 \angle -20^\circ$ а. 3.2. 1) $3,44 e^{\pm j21^\circ 20'}$; 2) $3,44 e^{\pm j68^\circ 40'}$; 3) $3,44 e^{\pm j158^\circ 40'}$; 4) $3,44 e^{\pm j111^\circ 20'}$; 5) $12,9 e^{j75^\circ 40'}$; 6) $3,2 e^{-j2^\circ 14'}$; 7) $3,2 e^{j87^\circ 46'}$; 8) $3,2 e^{j92^\circ 14'}$; 9) $1,29 e^{-j75^\circ 40'}$; 10) $23 e^{j0^\circ 9'}$; 11) $64 e^{-j92^\circ 30'}$. 3.3. 1) $30,2 \pm j 10,4$; 2) $10,4 \pm j 30,2$; 3) $-30,2 \pm j 10,4$; 4) $-32 \mp j 1,44$; 5) $1,44 \pm j 32$; 6) $32 \pm j 0,4$; 7) $32 - j 0,112$; 8) $-1,44 \pm j 32$; 9) $-32 - j 1,44$; 10) $0,425 - j 7,3$; 11) $-147 - j 28,6$; 12) $-3,66 - j 27,8$; 13) $0,54 \pm j 0,841$; 14) $8,78 - j 4,79$. 3.6. а) $Z = (4 \pm j 12)$ ом; $Y = (0,025 - j 0,075)$ сим; $r_0 = 4$ ом; $x_0 = 12$ ом (индуктивный); $\varphi = 71^\circ 35'$; $U_a = 17,9$ в; $U_p = 53,6$ в; $I_a = 1,41$ а; $I_p = 4,24$ а; $P = 80$ вт; $Q = 240$ вар; $S = 253$ вв; б) $Z = (0,952 \pm j 3,888)$ ом; $Y = (0,0595 - j 0,243)$ сим; $r_0 = 0,952$ ом; $x_0 = 3,888$ ом (индуктивный); $\varphi = 76^\circ 15'$; $U_a = 23,8$ в; $U_p = 97$ в; $I_a = 5,95$ а; $I_p = 24,25$ а; $P = 595$ вт; $Q = 2425$ вар; $S = 2500$ вв; в) $Z = j 20$ ом; $Y = -j 0,05$ сим; $r_0 = 0$; $x_0 = 20$ ом (индуктивный); $\varphi = 90^\circ$; $U_a = 0$; $U_p = 120$ в; $I_a = 0$; $I_p = 6$ а; $P_a = 0$; $Q = 720$ вар; $S = 720$ вв. 3.8. $U_1 = 51,1$ в; $U_2 = 69,5$ в; $\alpha = 2^\circ 44'$; $\varphi_1 = -1^\circ 31'$; $\varphi_2 = 1^\circ 13'$; $P_1 = 188$ вт; $P = 236$ вт. 3.9. $L = 35$ мжн. 3.10. $I \approx 7$ а; $P \approx 400$ вт. 3.11. $U = 116$ в. 3.13. $U = 232$ в; $P = 43,5$ вт. 3.14. $\dot{U}_1 = 284 e^{j17^\circ 30'}$ в; $\dot{U}_2 = 167 e^{-j149^\circ 15'}$ в; $\dot{U}_1, \dot{U}_2 = 166^\circ 45'$. 3.17. $\dot{I}_1 = 5 e^{j53^\circ 10'}$ а; $\dot{I}_2 = 4 e^{j73^\circ 45'}$ а; $\dot{I} = 8,85 e^{j62^\circ 20'}$ а; а) $U_V = 35,2$ в; $I_A \approx 1,2$ а; б) $93,5$ в. 3.18. $U = 50,8$ в. 3.19. $\dot{I}_1 = 4$ а; $\dot{I}_2 =$

$= 8,8 e^{-j74^\circ} a$; $\dot{I}_3 = j5 a$; $\dot{I} = 7,3e^{-j28^\circ} a$. 3.21. $\dot{I}_1 = (0,384 - j 0,112) ma$; $\dot{I}_2 = (0,3744 \nabla j 0,1408) ma$; $\dot{I}_3 = (0,0096 - j 0,2528) ma$. 3.22. $\dot{I}_2 = 2,06 e^{j87^\circ 20'}$ a; $\dot{I}_1 = 2,94 e^{j44^\circ 25'}$ a; $\dot{U} = 161 e^{j23^\circ}$ в; угол между \dot{U} и \dot{U}_{ab} $\alpha = 33^\circ 20'$; $P = 440$ вт; $Q = 173$ вар (емкостный). 3.23. $I_1 = 12$ а; $I_2 = 2,68$ а; $I_3 = 14,45$ а; $U = 30$ в; $U = 42,4 \sin(\omega t - 36^\circ 50')$ в; $i_2 = 3,8 \sin(\omega t - 153^\circ 25')$ а; $i_3 = 20,4 \sin(\omega t \nabla 4^\circ 45')$ а; 3.25. $\omega L_1 = 51$ ом. 3.26. $\dot{I}_2 = 2,56 e^{j38^\circ 40'}$ а; $\dot{I}_3 = 4,3 e^{-j21^\circ 50'}$; $\dot{U} = 109 e^{j35^\circ 45'}$ в; 3.27. $\dot{I} = (8,1 - j 11,35) a$; $\dot{I}_1 = (3,25 - j 10,5) a$; $\dot{I}_2 = (4,85 - j 0,85) a$; $\dot{I}_3 = (6,8 - j 7,1) a$; $\dot{I}_H = (-3,55 - j 3,4) a$. 3.28. $\dot{U} = (3,125 \nabla j 14,5) e$; $\dot{I} = (-0,75 \nabla j 0,4375) a$; $\dot{I}_1 = (-0,2 \nabla j 0,25) a$; $\dot{I}_2 = (-0,55 \nabla j 0,1875) a$; $\dot{I}_3 = (-0,6 \nabla j 0,25) a$. 3.30. $x_C = 10$ ом; $\dot{I}_1 = -10 a$. 3.31. $r_2 = 10$ ом. 3.32. $C = 1,012$ мкф. 3.33. $C = 53$ мкф. 3.36. $r_2 = 2 \cdot 10^6$ ом; $C = 0,5$ мкф. 3.38. $\dot{I}_1 = -j 0,5$ а; $\dot{I}_2 = (0,8 - j 0,2) a$; $\dot{I}_3 = (-0,8 - j 0,3) a$; $\dot{I} = (0,8 - j 0,7) a$. 3.39. $\dot{U}_2 : \dot{U}_1 = 0,38 e^{-j91^\circ 20'}$; а) $0,265 e^{-j64^\circ 10'}$; б) $0,38 e^{-j86^\circ 50'}$. 3.41. 50 ом. 3.42. $0,18$. 3.44. $\dot{I} = 97 e^{-j54^\circ}$ а; $\dot{I}_1 = 58,2 e^{-j54^\circ}$ а; $\dot{I}_2 = 38,8 e^{-j54^\circ}$ а. 3.46. Схема а: $\dot{\varphi}_2 = 5,17 e^{j27^\circ}$ в; $\dot{\varphi}_3 = 6,15 e^{-j5^\circ 55'}$ в; $\dot{I}_1 = 0,198 e^{-j0^\circ 33'}$ а, $\dot{I}_2 = 0,0694 e^{j2^\circ 37'}$ а; $\dot{I}_3 = 0,206 e^{j2^\circ 7'}$ а; $\dot{I}_4 = 0,0615 e^{-j5^\circ 55'}$ а; $\dot{I}_C = 0,0126 e^{j49^\circ 5'}$ а; Схема б: $\dot{\varphi}_2 = 40,3 e^{-j4^\circ 7'}$ в; $\dot{\varphi}_3 = 23,6 e^{j14^\circ 10'}$ в; $\dot{I}_1 = 0,632 e^{j2^\circ 37'}$ а; $\dot{I}_2 = 0,183 e^{-j39^\circ 5'}$ а; $\dot{I}_3 = 0,403 e^{-j4^\circ 7'}$ а; $\dot{I}_4 = 0,236 e^{j14^\circ 10'}$ а; $\dot{I}_5 = 0,51 e^{j16^\circ 28'}$ а; $\dot{I}_C = 0,194 e^{j63^\circ 25'}$ а; Схема в: $\dot{\varphi}_2 = 17,1 e^{-j7^\circ 7'}$ в; $\dot{I}_1 = 0,186 e^{j36^\circ 15'}$ а; $\dot{I}_2 = 0,171 e^{-j7^\circ 7'}$ а; $\dot{I}_C = 0,153 e^{j56^\circ 20'}$ а. Схема г: $\dot{\varphi}_2 = \dot{\varphi}_4 = 20$ в; $\dot{\varphi}_3 = 7,07 e^{-j45^\circ}$ в; $\dot{I} = 0,453 e^{j6^\circ 20'}$ а; $\dot{I}_1 = 0,16 e^{j18^\circ 25'}$ а; $\dot{I}_2 = 0,4$ а, $\dot{I}_0 = 0,55 e^{j5^\circ 12'}$ а; $\dot{I}_C = 0,0707 e^{j45^\circ}$ а. 3.47. Для схемы рис. 3.36, б: $\dot{E}_r = \frac{\dot{E}(r_L + j\omega L)}{r + r_L + j\omega L}$, $Z_r = \frac{r(r_L + j\omega L)}{r + r_L + j\omega L}$; для схемы рис. 3.36, в: $\dot{E}_r = \frac{\dot{E}r_1}{r + r_1}$, $Z_r = \frac{r r_1}{r + r_1} - j \frac{1}{\omega C}$. 3.48. $E = 150$ в; $I_A = 0,6$ а. 3.49. $\dot{I} = (6 - j22) a$; $\dot{I}_1 = (4 - j6) a$; $\dot{I}_2 = (12 - j18) a$; $\dot{I}_3 = (2 - j16) a$; $\dot{I}_4 = (-6 - j4) a$; $\dot{I}_5 = (-8 + j12) a$; $P = 780$ вт. 3.50. См. ответ к задаче 3.49. 3.51. 56 ма. 3.52. $\dot{I}_1 = 1,82 e^{j20^\circ 10'}$ а; $\dot{I}_2 = 0,56 e^{-j38^\circ}$ а; $\dot{I}_3 = 2,37 e^{-j53^\circ 05'}$ а; $\dot{I}_4 = 1,59 e^{j37^\circ 35'}$ а; $\dot{I}_5 = 2,55 e^{j83^\circ 35'}$ а; $\dot{I}_6 = 1,83 e^{-j122^\circ 20'}$ а. 3.53. $\dot{I}_1 = 13,1 e^{j58^\circ 10'}$ ма; $\dot{I}_2 = 11,5 e^{-j74^\circ 20'}$ ма; $\dot{I}_3 = 23,6 e^{j70^\circ 40'}$ ма; $\dot{I}_4 = 22,2 e^{-j84^\circ 20'}$ ма; $\dot{I}_5 = 11,1 e^{j85^\circ 25'}$ ма; $P = 23,6$ вт. 3.54. $\dot{I}_1 = 35 e^{j2^\circ 50'}$ ма; $\dot{I}_2 = 17,8 e^{-j8^\circ 30'}$ ма; $I_3 = 17,5 e^{j2^\circ 50'}$ ма; $\dot{I}_C = 3,6 e^{j47^\circ}$ ма; $\dot{\varphi}_3 = 0$; $\dot{\varphi}_1 = 350 e^{j2^\circ 50'}$ в; $\dot{\varphi}_2 = 445 e^{-j8^\circ 30'}$ в. 3.56. $Z_H = (8 + j4)$ ом; $P_{\max H} = 250$ вт; $P_{\max H} : P_{\text{ист}} = 0,5$; $K = 0,5$. 3.57. 1) $2,85$ а; 2) $2,23$ а. 3.58. $15,2$ ом или $6,6$ ом; $I = 3,7$ а или $6,7$ а (соответственно); $I_1 = 4,2$ а или $6,3$ а. 3.59. При резонансе $r_2 = 10$ ом; $I = 12$ а; $I_{\min} = 6,35$ а при $r_2 = \infty$; $I_{\max} = 15$ а при $r_2 = 2,2$ ом.

К главе 4

4.1. 160 нф; 50 ма; 40 ват; $49,6$ в. 4.2. 16 ом; 40 ват. 4.3. 125 в. 4.4. 10 ом; $0,4$ гн; $0,1$ мкф; 1 в. 4.5. $\dot{I}_0 = \frac{1}{2\pi \sqrt{LC}} = \sqrt{\frac{1}{L_1 L_2}}$. 4.6. 24 ом; $0,143$ гн; $70,8$ мкф;

$r_1 = 31 \text{ ом}$. 4.8. 1) $\omega_0 = 62,8 \cdot 10^3 \text{ сек}^{-1}$; $\omega_L = 88,6 \cdot 10^3 \text{ сек}^{-1}$; $\omega_C = 44,4 \times$
 $\times 10^3 \text{ сек}^{-1}$; $U_{L\text{max}} = U_{C\text{max}} = 11,6 \text{ в}$; 2) $\omega_0 = 62,8 \cdot 10^3 \text{ сек}^{-1}$; $\omega_L = \infty$; $\omega_C =$
 $= 0$; 10 в. 4.9. 6,37 ом; 50,7 мкн. 4.14. 19 ма; $71^\circ 30'$; 47,5. 4.15. 1) 400; 2) 100.
4.16. $0,995 \cdot 10^7 \text{ сек}^{-1}$; $1,005 \cdot 10^7 \cdot \text{сек}^{-1}$. 4.18. 50. 4.20. Дошунтирования: 46,4 ма;
37 в; после шунтирования: 34 ма; 27 в. 4.21. $I_{\Pi} = 870 \text{ мка}$; $U_{C\text{C}}: U_{C\Pi} = 3,86$;
после шунтирования это отношение равно 2,78. 4.22. $\omega_p = 500 \text{ сек}^{-1}$; $I_p = I_a =$
 $= 0,625 \text{ а}$; $I_{Lp} = I_{Cp} = 1,25 \text{ а}$. 4.23. 1,6 мкн; $i = i_r = \frac{\sqrt{2}U}{r} \sin \omega t$; $i_L =$
 $= -\frac{\sqrt{2}U}{\omega L} \cos \omega t$; $i_C = \sqrt{2}U\omega C \cos \omega t$; $p_L = -\frac{U^2}{\omega L} \sin 2\omega t$; $p_C =$
 $= U^2\omega C \sin 2\omega t$; $p_r = \frac{U^2}{r} (1 - \cos 2\omega t)$; $\omega_m = \frac{U^2}{\omega L} (1 \mp \cos 2\omega t)$; $\omega_s = U^2 C (1 -$
 $- \cos 2\omega t)$. 4.26. $r_2 = 32 \text{ ом}$, $r_p = 24 \text{ ом}$. 4.27. 9600 сек^{-1} ; 143 ом. 4.28. $L' = 19,6 \text{ мкн}$;
 $L'' = 0,4 \text{ мкн}$; $\varphi' = 81^\circ 52'$; $\varphi'' = 8^\circ 08'$; $\varphi' \mp \varphi'' = \pi/2$. 4.29. $f_{\text{min}} = 138 \text{ кГц}$;
 $f_{\text{max}} = 184 \text{ кГц}$. 4.33. 500 кГц; $r_p = 70,2 \text{ ком}$; 32,9 ком; 34,9 ком; 48 ком; 3,12 ма;
141 ма; 320 вт. 4.34. 1) 25,6 ком; 33,4 ком; 42 ком; 2) 27,4 ком; 14,6 ком; 31 ком;
3) 50,7 ком; 50 ком; 71,2 ком. 4.37. $I = 1,64 e^{j15^\circ} \text{ ма}$; $\dot{U} = 95 e^{-j18^\circ} \text{ в}$; $I_1 =$
 $= 90 e^{-j107^\circ 05'} \text{ ма}$; $I_2 = 90 e^{j72^\circ} \text{ ма}$; $P_r = 317 \text{ вт}$; $P_{\text{вн}} = 186 \text{ вт}$; $P = 131 \text{ вт}$.
4.39. 1) 400 кГц; 525 кГц; 136 вт; 21,8 кГц; $S_0 = 0,0545$. 4.42. а) $Q'_s = 21,7$;
 $S_A = 23 \text{ кВ}$; $I_p = 1,93 \text{ ма}$; $U_0 = 67 \text{ в}$; $P_{\text{нр}} = 64 \text{ вт}$; б) $Q'_s = 16,25$; $S_a =$
 $= 30,8 \text{ кВ}$; $I_p = 2,18 \text{ ма}$; $U_p = 50 \text{ в}$; $P_{\text{нр}} = 72,25 \text{ вт}$. 4.44. Резонанс на-
пряжений: а) 605 кГц; 9,4 ом; б) 298 кГц; 12 ом; резонанс токов при 408 кГц;
 $r_p = 28,8 \text{ ком}$. 4.46. $C_1 = 1180 \text{ пф}$; $C_2 = 865 \text{ пф}$; $r_{p\text{max}} = 60 \text{ ком}$. 4.47. $r_a =$
 $= 13 \text{ ком}$; $x_s = \pm 14,3 \text{ ком}$; $z_a = 19,3 \text{ ком}$. 4.48. $I = 2,32 \text{ ма}$; $I_1 = I_2 \approx 86 \text{ ма}$;
 $I_{\text{н}} = 0,8 \text{ ма}$. При расстройке: $I' = 2,42 \text{ ма}$; $I'_1 = 82 \text{ ма}$; $I'_2 = 81 \text{ ма}$; $I'_{\text{н}} =$
 $= 0,77 \text{ ма}$. $r_{\text{ш}} = 80 \text{ ком}$; $P_{\text{max}} = 50 \text{ вт}$. 4.49. $L_1 = 240 \text{ мкн}$; $L_2 = 160 \text{ мкн}$;
 $C = 400 \text{ пф}$; $r_1 = r_2 = 5 \text{ ом}$; Частота резонанса токов: $2,5 \cdot 10^6 \text{ сек}^{-1}$; при этом
 $I = 2,55 \text{ ма}$; $I_1 = I_2 = 102 \text{ ма}$; $P = 104 \text{ вт}$; частота резонанса напряжений
 $3,22 \cdot 10^6 \text{ сек}^{-1}$, при этом $I' = 3,2 \text{ ма}$; $I'_1 = 3,2 \text{ ма}$; $I'_2 = 0,4 \text{ а}$; $P = 0,8 \text{ вт}$. 4.51.
 $r_{2\text{min}} = 2\omega L$; $I = \frac{U(1 + r_2^2\omega^2 C^2)}{r_1 + r_2 + r_1 r_2^2\omega^2 C^2}$. 4.52. $Z_1 = j 1,28 \text{ ом}$; $P_{\text{max}} = 1,9 \text{ вт}$.
4.53 а) $Z_3 = -j 10 \text{ ом}$; $I_1 = 6 \text{ а}$; $I_2 = (-2,4 - j 4,8) \text{ а}$; $I_3 = (8,4 \mp j 4,8) \text{ а}$;
б) $Z_3 = -j 15,7 \text{ ом}$; $I_1 = 3,28 \text{ а}$; $I_2 = (0,36 - j 5,12) \text{ а}$; $I_3 = (2,92 \mp j 5,12) \text{ а}$.
4.54. $x_C = 5 \text{ ом}$; $I_1 = 10 \text{ а}$; $I_2 = 5,6 e^{-j26^\circ 35'} \text{ а}$; $I_3 = 5,6 e^{j26^\circ 35'} \text{ а}$. 4.55.
1) $\omega L' = 4 \text{ ом}$; $I_1 = 30 \text{ а}$; $I_2 = (15 - j 7,5) \text{ а}$; $I_3 = (15 \mp j 7,5) \text{ а}$; 2) $\omega L_2 =$
 $= 16 \text{ ом}$; $I_1 = 20,4 \text{ а}$; $I_2 = (2,55 - j 5,1) \text{ а}$; $I_3 = (17,85 \mp j 5,1) \text{ а}$. 4.56. $r =$
 $= 10 \text{ ом}$; $\omega L = 5 \text{ ом}$; 4.57. $r_2 = 24 \text{ ом}$; $x_C = 10 \text{ ом}$; $I_2 = 1,4 e^{-j26^\circ 30'}$; $I_3 =$
 $= 1,4 e^{j26^\circ 30'}$. 4.58. 1) $x'_4 = \omega L'_4 = 1 \text{ ом}$; $I = 15 \text{ а}$; $I_1 = (6 \mp j 3) \text{ а}$; $I_2 =$
 $= (2,25 - j 0,75) \text{ а}$; $I_3 = (3,75 \mp j 3,75) \text{ а}$; $I_4 = (9 - j 3) \text{ а}$; 2) $x''_4 = \omega L''_4 =$
 $= 9 \text{ ом}$; $I'' = 7 \text{ а}$; $I_1 = (6 \mp j 3) \text{ а}$; $I_2 = (2,25 - j 0,75) \text{ а}$; $I_3 = (3,75 \mp$
 $+ j 3,75) \text{ а}$; $I_4 = (1 - j 3) \text{ а}$. 4.59. $I_{\text{r}} = 2200 \text{ гц}$; $I_{\text{н}} = 2800 \text{ гц}$. 4.60. $-x'_4 =$
 $= \frac{1}{\omega C_4} = 88 \text{ ом}$; $-x''_4 = \frac{1}{\omega C_4} = 8 \text{ ом}$. 4.61. Частоты резонанса напряжений
2770 или 3480 гц, частота резонанса токов 2200 гц.

К главе 5

5.1. 2,5 мкф. 5.2. 900 пф. 5.3. 0,5. 5.6. $\dot{I} = (0,8 - j 0,6) \text{ а}; \dot{U}_{ab} = (69 \angle j 42) \text{ в}; \dot{U}_{ca} = (31 - j 42) \text{ в}.$ 5.7. $\dot{I} = 10 e^{-j36^\circ 50'} \text{ а}; \dot{U}_{ab} = 78 e^{j13^\circ 20'} \text{ в}.$
 5.8. $\dot{U}_C = 74 e^{-j128^\circ} \text{ в}.$ 5.10. $k = 0,111.$ 5.12. Включение встречное. $M = 11,1 \text{ мкн}.$ 5.14. $\dot{I}_1 = (8 - j1) \text{ а}; \dot{I}_2 = (6 - j2) \text{ а}; \dot{I} = (14 - j3) \text{ а}.$ 5.15. $\dot{I}_1 = (6,4 + j 8,6) \text{ а}; \dot{I}_2 = (2,1 \angle j 0,22) \text{ а}; \dot{I} = (8,5 - j 8,38) \text{ а};$ 5.16. $C = 0,0324 \text{ мкф}; \dot{I} = 1,42 \text{ ма}; \dot{I}_1 = (0,75 \angle j 0,17) \text{ ма}; \dot{I}_2 = (0,67 - j 0,17) \text{ ма}.$
 5.17. $C = 0,182 \text{ мкф}; \dot{I} = 1,46 \text{ ма}; \dot{I}_1 = (0,82 \angle j 0,07) \text{ ма}; \dot{I}_2 = (0,64 - j 0,007) \text{ ма}.$ 5.19. $C = 0,35 \text{ мкф}; \dot{I}_1 = j 2,25 \text{ ма}; \dot{I}_2 = -j 2,25 \text{ ма}.$ 5.23. $Z_H = (3 - j7) \text{ ом}.$ 5.25. $\dot{I}_1 = 1,05 e^{-j59^\circ 50'} \text{ а}; \dot{I}_2 = 0,685 e^{j144^\circ} \text{ а}; \dot{I}_3 = 1,7 e^{-j50^\circ 30'} \text{ а}.$
 5.27. $x_C = 8 \text{ ом}; \dot{I}_1 = 5 \text{ а}; \dot{I}_2 = -j5 \text{ а}; \dot{I}_3 = (5 \angle j5) \text{ а}.$ 5.28. $\dot{I}_1 = (2,4 - j 1,8) \text{ а}; \dot{I}_2 = -j5 \text{ а}; \dot{I}_3 = (2,4 \angle j 3,2) \text{ а}.$ 5.29. $x_C = 10 \text{ ом}; \dot{I}_1 = (7,06 - j 1,76) \text{ а}; \dot{I}_2 = (5,3 - j 8,82) \text{ а}; \dot{I}_3 = (1,76 \angle j 7,06) \text{ а}.$ 5.30. $k = \frac{1}{3}; \dot{I}_1 = 4,55 e^{-j18^\circ 20'} \text{ а}; \dot{I}_2 = 10,2 e^{-j81^\circ 50'} \text{ а}; \dot{I}_3 = 9,1 e^{j71^\circ 40'} \text{ а};$ 5.32 $\dot{I}_1 = (3,2 + j 4,6) \text{ а}; \dot{I}_2 = (2,2 + j 2,6) \text{ а}; \dot{I}_3 = (1 \angle j 2) \text{ а}; \dot{I}_4 = 2 \text{ а}; \dot{U}_1 = (16 \angle j 113) \text{ в}; U_{\text{нагр}} = 0,35.$ 5.33. $I_1 = (0,64 - j 0,48) \text{ а}; \dot{I}_2 = (1,28 - j 0,96) \text{ а}; \dot{I}_3 = (-0,64 \angle j 0,48) \text{ а}; \dot{U}_{ab} = (19,2 \angle j 25,6) \text{ в}.$ 5.35. $\dot{I}_1 = (1,85 - j 1,42) \text{ а}; \dot{I}_2 = (-1,0 - j 0,22) \text{ а}; \dot{I}_3 = (0,93 - j 0,01) \text{ а}; \dot{I}_4 = (2,85 - j 1,20) \text{ а}.$ 5.37. $Z_{\text{вх}} = -j 19 \text{ ом}; x_C = 10,24 \text{ ом}.$ 5.38. а) $x_C = 28 \text{ ом}; A_1 = 0; A_2 = A_3 = 2 \text{ а};$ б) $x_C = 20 \text{ ом}; A_1 = 1,2 \text{ а}; A_2 = 0,6 \text{ а}; A_3 = 1,8 \text{ а}.$ 5.45. $C_2 = 250 \text{ пф}; P_{1\text{maxII}} = 4,85 \text{ вт}; P_{2\text{maxII}} = 7,85 \text{ вт}; \eta = 0,617.$ 5.46. $M_{\text{опт}} = 77 \text{ мккн}; C_2 = 270 \text{ пф}; P_{1\text{max max}} = P_{2\text{max max}} = 8,33 \text{ вт}; \eta = 0,5.$ 5.47. $C_1 = 278 \text{ пф}; C_2 = 222 \text{ пф}; M_{\text{опт}} = 4,6 \text{ мккн}; P_{1\text{max max}} = P_{2\text{max max}} = 8,33 \text{ вт}; \eta = 0,5.$ 5.49. $C_1 = 800 \text{ пф}; C_2 = 400 \text{ пф}; Q_1 = 50; Q_2 = 50; M = 5,66 \text{ мккн}; I_2 = 3,54 \text{ мка}; U_2 = 3,54 \text{ мв}; S_0 = 2,82 \cdot 10^{-2}.$ 5.51. 1250 гц; 0,011; 4,4 мккн. 5.55. 61,5 вт; 57%.

К главе 6

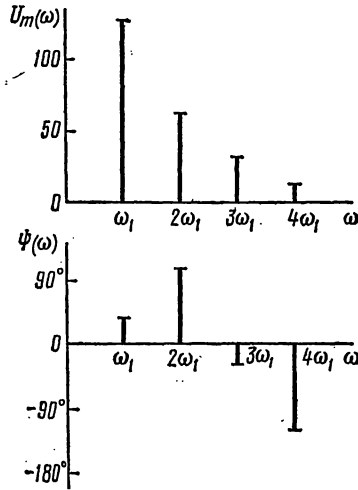
6.2. $I_A = I_B = I_C = I_\phi = 8,97 \text{ а}; U_\phi = 127 \text{ в}; P = 3,43 \text{ квт}.$ 6.3. $E_\phi = 230 \text{ в}.$ 6.4. $I_{\phi.r} = I_{\phi.n} = 163 \text{ а}; U_{\phi.r} = 4230 \text{ в}; U_{\phi.n} = 4070 \text{ в}; P_r = 1670 \text{ квт}.$ 6.6. $I_\phi = 15,6 \text{ а}; I_\Delta = 27 \text{ а}; P_1 = 5730 \text{ вт}; P_2 = 1530 \text{ вт}.$ Обрыв в точке a_1 ; $I_{bc} = 15,5 \text{ а}; I_{ba} = I_{ac} = 7,75 \text{ а}; I_A = 0; I_B = I_C = 23,3 \text{ а}; P = 0; P_2 = 3630 \text{ вт}.$ Обрыв в точке b_1 ; $I_{ca} = 15,5 \text{ а}; I_{cb} = I_{ba} = 7,75 \text{ а}; P_1 = P_2 = 1815 \text{ вт}.$ Обрыв в точке b_2 ; фазные и линейные токи те же, что и при обрыве в точке b_1 ; $P_1 = 4950 \text{ вт}; P_2 = 1330 \text{ вт}.$ 6.7. Линейные токи и общая мощность уменьшатся в три раза. 6.8. $I_\Delta = 26,8 \text{ а}; I_\phi = 15,5 \text{ а}; U_{\phi.n} = 165 \text{ в}; \Delta U = 65 \text{ в}.$ 6.9. $U_r = 209 \text{ в}; I_r = 26 \text{ а}; U_{\text{пр}} = 112,5 \text{ в}; I_{\text{пр}} = 45 \text{ а}.$ 6.10. $I_r = 59 \text{ а}; I_\Delta = 102 \text{ а}; U_H = 148 \text{ в}; I_H = 59 \text{ а};$ 6.11. $U_\phi = 127 \text{ в}; I = 8,75 \text{ а}; \varphi_\phi = 25^\circ 50'; P = 3 \text{ квт}.$ 6.12. $U_\phi = 220 \text{ в}; I = 7,6 \text{ а}; \varphi_\phi = 30^\circ; P = 2,5 \text{ квт}.$ 6.13. $I_H = 11 \text{ а}; I_\Delta = 19,05 \text{ а}; Z_\phi = (16 \angle j 12) \text{ ом}.$ 6.14. 3,34 квар. 6.15. 10,02 квар. 6.16. При удельном сопротивлении $\rho = 1,75 \cdot 10^{-8} \text{ ом}\cdot\text{см}$ и удельном весе $d = 8,9 \text{ г/см}^3$: а) 129 т, б) 172 т. 6.17. 6,3 кв. 6.18. 6,1 кв. 6.21. При наличии нейтрального провода $\dot{I}_A = 38,76 e^{-j 61^\circ 30'} \text{ а}; \dot{I}_B = 27,65 e^{-j 66^\circ} \text{ а}; \dot{I}_C = 40,3 e^{j 108^\circ 20'} \text{ а}; \dot{I}_N = 26,9 e^{-j 50^\circ 35'} \text{ а}.$ Напряжения на фазах генератора: $\dot{U}_{A0} = 194 e^{-j 1^\circ 55'} \text{ в}; \dot{U}_{B0} = 246 e^{-j 125^\circ} \text{ в}; \dot{U}_{C0} = 213,3 e^{j 111^\circ 5'} \text{ в}.$ Напряжение на фазах нагрузки:

$\dot{U}_{a0_1} = 173,5 e^{j1^\circ 55'}$; $U_{b0_1} = 247 e^{-j129^\circ 20'}$; $\dot{U}_{c0_1} = 202 e^{j108^\circ 20'}$ в. 6.22. $I_N = 3,46$ а; $U_1 = 108$ в; $U_{111} = 132$ в. 6.24. а) $I_A = 0$; $I_B = I_C = 8,54$ а; $P_1 = 0$; $P_2 = 3200$ вт; б) $I_A = I_C = 14$ а; $I_B = 0$; $P_1 = 1170$ вт; $P_2 = 5080$ вт; в) $I_A = I_C = 14$ а; $I_B = 0$; $P_1 = 1190$ вт; $P_2 = 3890$ вт; г) $I_A = 31,8$ а; $I_B = 15,2$ а; $I_C = 19$ а; $P_1 = 9160$ вт; $P_2 = 3600$ вт; д) $I_A = 38$ а; $I_B = 35,2$ а; $I_C = 19$ а; $P_1 = 8660$ вт; $P_2 = 7220$ вт. 6.25. $I_A = 19,8$ а; $I_B = 18,4$ а; $I_C = 16,1$ а; $U_A = 178$ в; $U_B = 202$ в; $U_C = 225$ в. 6.28. Если принять $\dot{U}_{AB} = U_{AB} = 220$ в, то $\dot{i}_{ab} = 22$ а; $\dot{i}_{bc} = 22 e^{-j173^\circ 10'}$ а; $\dot{i}_{ca} = 22 e^{-j150^\circ}$ а; $\dot{i}_A = (41 \nabla j 11)$ а; $\dot{i}_B = -(43,8 \nabla j 2,6)$ а; $\dot{i} = (2,8 - j 8,4)$ а; $P_1 = 9040$ вт; $P_2 = -1296$ вт. 6.29. Линейные токи: $I_A = 17,3$ а; $I_B = 10$ а; $I_C = 14,3$ а. Фазные токи $I_{ab} = 8,1$ а; $I_{bc} = 10,1$ а; $I_{ca} = 9,34$ а; $P = 4220$ вт. 6.30. а) Линейные токи: $I_A = 11,6$ а; $I_B = 12,9$ а; $I_C = 13,6$ а. Фазные токи: $I_{AB} = 6,34$ а; $I_{BC} = 8,55$ а; $I_{CA} = 7,07$ а; б) Линейные токи: $I_A = I_B = 10,22$ а; $I_C = 0$. Фазные токи: $I'_{AB} = 6,34$ а; $I'_{BC} = I'_{CA} = 3,88$ а. 6.31. $I_A = I_1 = 0,433$ а; $I_B = 1,83$ а; $I_C = I_2 = 1,57$ а; $P_1 = 28$ вт; $P_2 = 227$ вт. 6.32. $\dot{I}_A = 6,54 e^{-j29^\circ 35'}$ а; $\dot{I}_B = 4,2 e^{-j146^\circ}$ а; $\dot{I}_C = 5,98 e^{j111^\circ 20'}$ а; $\dot{U}_A = (142 - j 80,8)$ в; $\dot{U}_B = (-68 - j 80,8)$ в; $\dot{U}_C = (31,8 \nabla j 115)$ в; $P_1 = 1,19$ кват; $P_2 = 870$ вт. 6.33. $U_A = 125,3$ в; $U_B = 122,2$ в; $U_C = 131$ в; $I_A = 5,01$ а; $I_B = 4,88$ а; $I_C = 5,24$ а. 6.34. $I_A = 6,43$ а; $I_B = 2,19$ а; $I_C = 7,03$ а; $U_A = 82,2$ в; $U_B = 30,7$ в; $U_C = 81,8$ в. 6.35. $I_{AB} = 4,8$ а; $I_{BC} = 5,5$ а; $I_{CA} = 6,98$ а; $I_A = 9,15$ а; $I_B = 8,68$ а; $I_C = 11,9$ а. 6.36. $I_A = 19,1$ а; $I_B = 17,2$ а; $I_C = 14$ а; $I_{AB} = 8,5$ а; $I_{BC} = 10,7$ а; $I_{CA} = 11,1$ а. 6.37. При $\dot{U}_{AB} = U_{AB} = 220$ в для звезды $\dot{i}'_A = (6,06 - j 2,68)$ а; $\dot{i}'_B = (-4,95 - j 2,69)$ а. $\dot{i}'_C = (-1,11 \nabla j 5,37)$ а; для треугольника: $\dot{i}_{AB} = (7,04 - j 5,28)$ а; $\dot{i}_{BC} = (-8,1 - j 3,46)$ а. $\dot{i}_{CA} = (-5,5 \nabla j 9,5)$ а, на входе линии $\dot{i}_A = (18,60 - j 17,46)$ а; $\dot{i}_B = (-20,1 - j 0,87)$ а; $\dot{i}_C = (1,5 \nabla + j 18,33)$ а. 6.38. На фазах звезды $U_A = U_C = 93,2$ в; $U_B = 97,6$ в; на фазах треугольника $U_{AB} = U_{BC} = 146$ в, $U_{CA} = 139$ в.

К главе 7

7.3 $u = 128 \sin(\omega_1 t + 38^\circ 40') + 63,3 \sin(2\omega_1 t + 108^\circ 25') + 33,6 \sin(3\omega_1 t - 26^\circ 30') + 14,4 \sin(4\omega_1 t - 123^\circ 40')$ в; $u(t) = \frac{1}{2} \sum_{n=-4}^{n=4} \dot{U}_n e^{jn\omega_1 t}$, где $\dot{U}_1 = \dot{U}_{-1}^* = 128 e^{-j51^\circ 20'}$ в, $\dot{U}_2 = \dot{U}_{-2}^* = 63,3 e^{j18^\circ 20'}$ в, $\dot{U}_3 = \dot{U}_{-3}^* = 33,6 e^{-j116^\circ 30'}$ в, $\dot{U}_4 = \dot{U}_{-4}^* = 14,4 e^{j146^\circ 20'}$ в. 7.4. $i = \frac{I_{1m} + I_{2m}}{2} + \frac{2(I_{2m} - I_{1m})}{\pi} \left(\sin \omega_1 t + \frac{1}{3} \times \sin 3\omega_1 t + \frac{1}{5} \sin 5\omega_1 t + \dots \right)$. 7.5. $u = \frac{U_m}{2} - \frac{U_m}{\pi} \left(\sin \omega_1 t + \frac{1}{2} \sin 2\omega_1 t + \frac{1}{3} \sin 3\omega_1 t + \dots \right)$. 7.6. $\frac{a_0}{2} = \frac{U_m}{2}$; $a_k = -\frac{4U_m}{k^2} \cdot \frac{\sin^2 \frac{k \omega_1 t_1}{2}}{\omega_1 t_1 (2\pi - \omega_1 t_1)}$;

$$b_k = \frac{2U_m}{k^2} \cdot \frac{\sin k \omega_1 t_1}{\omega_1 t_1 (2\pi - \omega_1 t_1)} \quad 1) \quad u = \frac{U_m}{2} - \frac{U_m}{\pi} \left(\sin \omega_1 t + \frac{1}{2} \sin 2\omega_1 t + \right.$$



К ответу зад. 7. 3.
Амплитудный и фазочастотный спектры

$$+ \frac{1}{3} \sin 3\omega_1 t + \dots); \quad 2) \quad u = \frac{U_m}{2} - \frac{4U_m}{\pi^2} \left(\cos \omega_1 t + \frac{1}{3^2} \cos 3\omega_1 t + \right.$$

$$+ \frac{1}{5^2} \cos 5\omega_1 t + \dots); \quad 3) \quad u = \frac{U_m}{2} - \frac{8U_m}{3\pi^2} \times$$

$$\times \left(\sin \omega_1 t - \frac{1}{3^2} \sin 3\omega_1 t + \frac{1}{5^2} \sin 5\omega_1 t - \dots \right) - \frac{8U_m}{3\pi^2} \left(\cos \omega_1 t + \frac{2}{2^2} \cos 2\omega_1 t + \right.$$

$$+ \frac{1}{3^2} \cos 3\omega_1 t + \frac{2}{4^2} \cos 4\omega_1 t + \dots). \quad 7.9. \quad I = 22,4 \text{ а}; \quad \cos \varphi = 0,82. \quad 7.10. \quad I =$$

$= 13,1 \text{ а}; \quad P = 516 \text{ вт}; \quad i = [10 \nabla 12 \sin(\omega_1 t - 53^\circ)] \text{ а}; \quad u_L = 48 \cos(\omega_1 t - 53^\circ) \text{ в}.$
 7.11. $i = [34,3 \sin(\omega_1 t \nabla 31^\circ) \nabla 5,9 \sin(3\omega_1 t - 78^\circ 40')] \text{ а}; \quad u_C = [100 \nabla 103 \sin(\omega_1 t - 59^\circ) \nabla 5,9 \sin(3\omega_1 t - 168^\circ 40')] \text{ в}; \quad U = 174 \text{ в}; \quad I = 24,6 \text{ а}; \quad P = 3040 \text{ вт}; \quad a) \quad 100 \text{ в};$
 б) $127 \text{ в}.$ 7.13. $280 \text{ в}; \quad 388 \text{ вт}.$ 7.14. $i_1 = [0,1 \nabla 0,0744 \sin(\omega_1 t - 42^\circ 25') \nabla 0,0157 \sin(3\omega_1 t - 71^\circ 20')] \text{ а}; \quad i_2 = [0,1 \nabla 0,0336 \sin(\omega_1 t - 79^\circ 40') \nabla 0,00458 \times$
 $\times \sin(3\omega_1 t - 124^\circ 20')] \text{ а}; \quad i_3 = [0,052 \sin(\omega_1 t - 19^\circ 25') \nabla 0,0134 \sin(3\omega_1 t - 55^\circ 30')] \text{ а};$
 $P = 17,9 \text{ вт}.$ 7.15. При подключении через фильтр $I'_{2(0)} : I_2 \approx 1$, без филь-
 тра $I'_{2(0)} : I_2 = 0,905.$ 7.16. $C_1 = 17,8 \text{ мкф}; \quad C_2 = 2,22 \text{ мкф}; \quad i_1 = 0,4 \sin \omega_1 t \text{ а};$
 $i_2 = (-0,05 \sin \omega_1 t \nabla 0,333 \cos 3 \omega_1 t) \text{ а}; \quad i_3 = (0,45 \sin \omega_1 t - 0,333 \cos 3 \omega_1 t) \text{ а};$
 $u_{ab} = (4,5 \cos \omega_1 t \nabla 10 \sin 3 \omega_1 t) \text{ в}; \quad I_1 = 0,283 \text{ а}; \quad I_2 = 0,238 \text{ а}; \quad I_3 = 0,4 \text{ а};$
 $U_{ab} = 7,75 \text{ в}; \quad P = 4 \text{ вт}.$ 7.17. $P = 0,271 \text{ вт}; \quad Q = 0,215 \text{ вар}; \quad S = 0,418 \text{ ва};$
 7.18. $r_3 = 20 \text{ ом}; \quad I_1 = 1,8 \text{ а}; \quad I_2 = 1,06 \text{ а}; \quad I_3 = 0,81 \text{ а}.$ 7.20. $I_1 = 4,26 \text{ а}; \quad I_2 =$
 $= 1,18 \text{ а}.$ 7.21. $I_5 = 0,0263 \text{ а}.$ 7.22. $U_C : U = 1,95.$ 7.23. $78 \text{ в}.$ 7.24. $L_2 \approx 4,29 \text{ мгн}$
 (большее значение); $L_1 = 0,545 \text{ мгн}.$ 7.26. $k_\phi = 1,28; \quad k_A = 1,76; \quad k_H = 0,96.$

К главе 8

8.3. При частоте $f P_{1r} = P_{1b} = 300$ вт; при частоте $2f P_{2r} = 600$ вт, $P_{2b} = 1200$ вт. 8.4. При повышении напряжения на 10% потери равны 1,2] квт, а при понижении напряжения на 10% — 0,81 квт. 8.6. 710 вт. 8.9. $P_{ст} = 757$ вт; $I_0 = 26,6$ а.

К главе 9

9.1. $\tau = 0,12$ сек; 250 а/сек; $I_{пр} = 30$ а. 9.2. 9,2 мсек; $i = 1,2(1 - e^{-500t})$ а; $e_L = -120 e^{-500t}$ в; $\omega_M = 0,144(1 - e^{-500t})^2$ дж; $p_M = 144(e^{-500t} - e^{-1000t})$ вт; 1,4 мсек. 9.3. 6,67 а/сек; 3,34 а/сек. 9.4. $i = 3e^{-500t}$ а; $W_M = W_S = 0,5625$ дж. 9.5. В 125 раз; 450 дж. 9.8. $i = (12 - 9e^{-100t})$ а. 9.9. $i = (3 \diamond 9e^{-400t})$ а. 9.10. $i_1 = (20 - 8e^{-20t})$ а; $i_2 = 12e^{-5t}$ а; 7,7 а. 9.11. 7,8 мсек. 9.12. $i_2 = 2,4e^{-40t}$ а; $i_3 = 6(1 - e^{-40t})$ а; $i_1 = i_2 \diamond i_3$. 9.14. $i_1 = 0,4 e^{-\frac{t}{\tau}}$; где $\tau = 3$ мсек. $i_{сраб} = 2,07$ мсек. 9.17. 1) $i_1(0) = 1$ а; $i_2(0) = 0,6$ а; $i_3(0) = 0,4$ а; $u_C(0) = 30$ в; $i_{1пр} = i_{2пр} = 0,8$ а; $i_{3пр} = 0$; $u_{снпр} = 40$ в; $i_{1св}(0) = 0,2$ а; $i_{2св}(0) = -0,2$ а; $i_{3св} = 0,4$ а; $u_{св}(0) = -10$ в; 2) $i_1 = (0,8 \diamond 0,2 e^{-4 \cdot 10^4 t})$ а; $i_2 = (0,8 - 0,2 e^{-4 \cdot 10^4 t})$ а; $i_3 = 0,4 e^{-4 \cdot 10^4 t}$ а; $u_C = (40 - 10 e^{-4 \cdot 10^4 t})$ в. 9.18. $i_{1св}(0) = -0,9$ а; $i_{2св}(0) = -1,14$ а; $i_{3св}(0) = 0,24$ а; $u_{св}(0) = 18,6$ в; $\left(\frac{du_{св}}{dt}\right)_{t=0} = -12,2 \cdot 10^3$ в/сек; $i_1 = (3,87 - 0,9 e^{-668t})$ а; $i_2 = (2,905 - 1,14 e^{-668t})$ а; $i_3 = (0,965 \diamond 0,24 e^{-668t})$ а. 9.20. 100 в; 0,23 сек. 9.21. $11,25 \cdot 10^{-3}$ к; 25 ма. 9.22. При $t = 0 U_{ab} = 80$ в; $U_{bc} = 40$ в; при $t = \infty U_{ab} = 40$ в, $U_{bc} = 80$ в. 9.23. При $t = 0 I_1 = 54,6$ ма; $I_2 = 10,9$ ма; при $t = \infty I_1 = 60$ ма, $I_2 = 0$. 9.24. При $t = 0 I_1 = I_2 = 1,5$ а. $I_3 = 0$, $U_1 = 45$ в, $U_2 = 75$ в, при $t = \infty I_1 = I_3 = 1,2$ а, $U_1 = 36$ в, $U_2 = 84$ в, $I_2 = 0$. 9.25. $u_C = U \diamond (U_0 - U) e^{-\frac{1}{rC}t}$; $t = \frac{U - U_0}{r} e^{-\frac{1}{rC}t}$. 9.26. $i = 0,64 e^{-1000t}$ а; $u_{C1} = (64 e^{-1000t} + 36)$ в; $u_{C2} = (-16 e^{-1000t} \diamond 36)$ в; $W_{нач} = 58$ мдж; $W_{кон} = 32,4$ мдж; $W_{тепл} = 25,6$ мдж. 9.27. $i = 0,96 e^{-1000t}$ а; $u_{C1} = (4 \diamond 96 e^{-1000t})$ в; $u_{C2} = (-4 \diamond 24 e^{-1000t})$ в. 9.28. $i = 0,2 e^{-2000t}$ а; $u_{C1} = 5(4 \diamond e^{-2000t})$ в; $u_{C2} = 20(1 - e^{-2000t})$ в. 9.29. $i_1 = (0,2 \diamond 0,05 e^{-5 \cdot 10^4 t})$ а; $i_2 = (0,2 - 0,2 e^{-5 \cdot 10^4 t})$ а; $i_3 = 0,25 e^{-5 \cdot 10^4 t}$ а. 9.30. $u_{C2} = 81,3(e^{-175t} - e^{-6325t})$ в. 9.31. $u_C = 120 e^{-10t}$ в; при $t = 0,1$ сек $u_C = 44,2$ в. 9.32. $u_C = (16 \diamond 8e^{-6,25 \cdot 10^4 t})$ в; $i_1 = (0,16 - 0,1 e^{-6,25 \cdot 10^4 t})$ а; $i_2 = (0,16 \diamond 0,05 e^{-6,25 \cdot 10^4 t})$ а; $i = -0,15 e^{-6,25 \cdot 10^4 t}$ а. 9.33. $-0,39$ а. 9.35. $i_1 = [2 \cos(\omega t \diamond 20^\circ 35') - 1,47 e^{-3750t}]$ а; $i_2 = 0,4 e^{-1000t}$ а. 9.36. $t = \frac{U_m}{\omega} (\sin \omega t - \text{tg} \varphi \cdot e^{-\frac{t}{\tau}})$, где $z = \sqrt{r^2 + \left(\frac{1}{\omega C}\right)^2}$; $\tau = rC$; $\text{tg} \varphi = -\frac{1}{\omega Cr}$. 9.37. $u = U_m \sin \psi$, где $\psi = \frac{\pi}{2} + \varphi$; $\text{tg} \varphi = -\frac{1}{\omega Cr}$. 9.39. $u_C = 5[\sin(\omega t \diamond 22^\circ 40') - 0,385 e^{-\frac{1}{12 \cdot 10^{-6}t}}]$ мв. 9.40. $I_{max} = 4,68$ а при $t_m = 405$ мсек; $E_L max = 86,5$ в при $t = 2t_m$. 9.41. $I_{max} = 13,1$ а при $t_m = 0,707$ мсек; $E_L max = 68,5$ в при $t_m = 1,414$ мсек. 9.42. $\omega_0 = 98 \cdot 10^3$ сек $^{-1}$; $\omega_0' = 126,4 \cdot 10^3$ сек $^{-1}$; 9.43. 230 колебаний. 9.46. $i_1 = 0,02(16e^{-500t} - e^{-125t})$ а; $i_2 = 0,1(4e^{-500t} - e^{-125t})$ а; $i_3 = 0,08(e^{-125t} - e^{-500t})$ а; $u_C = (30 - 40e^{-500t} \diamond 10e^{-125t})$ в. При $r > \frac{1}{2} \sqrt{\frac{L}{C}}$

имеет место колебательный заряд. 9.48. $i_1 = \frac{E_m}{z_1} \left[\sin(\omega t + \psi - \varphi_1) - \sin(\psi - \varphi_1) e^{-\frac{t}{\tau}} \right]$; $i_2 = \frac{E_m}{z_2} \sin(\omega t + \psi - \varphi_2) + \frac{E_m}{z_1} \sin(\psi - \varphi_1) e^{-\frac{t}{\tau}}$; $i = \frac{E_m}{r} \times \sin(\omega t + \psi)$, где $z_1 = \sqrt{r^2 + (\omega L)^2}$; $\operatorname{tg} \varphi_1 = \frac{\omega L}{r}$; $z_2 = \sqrt{r^2 + \left(\frac{1}{\omega C}\right)^2}$; $\operatorname{tg} \varphi_2 = -\frac{1}{\omega Cr} = \operatorname{ctg} \varphi_1$. 9.49. 1) $u_C = U \left\{ 1 - e^{-at} \left[\operatorname{ch} bt + \frac{1}{b} \left(\frac{r}{2L} - \frac{1}{rC} \right) \operatorname{sh} bt \right] \right\}$; $i = \frac{U}{r} e^{-at} \left(\operatorname{ch} bt + \frac{r}{2bL} \operatorname{sh} bt \right)$, где $b = \sqrt{\left(\frac{r}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}} = 750 \text{ сек}^{-1}$; $a = \frac{r}{2L} = 1250 \text{ сек}^{-1}$; 2) $u_C = U \left\{ 1 - e^{-at} \left[\cos \omega_0 t + \frac{1}{\omega_0} \left(\frac{r}{2L} - \frac{1}{rC} \right) \sin \omega_0 t \right] \right\}$; $i = \frac{U}{r} e^{-at} \left(\cos \omega_0 t + \frac{r}{2\omega_0 L} \sin \omega_0 t \right)$, где $\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{r}{2L}\right)^2} = 5000 \text{ сек}^{-1}$; $a = \frac{r}{2L} = 1000 \text{ сек}^{-1}$. 9.50. $i_1 = (2 - 2e^{-5 \cdot 10^4 t} + 5 \cdot 10^4 t e^{-5 \cdot 10^4 t}) a$; $i_2 = (2 - 2e^{-5 \cdot 10^4 t}) a$; $i_3 = 5 \cdot 10^4 t e^{-5 \cdot 10^4 t} a$. 9.51. $i_1(0) = 2a$; $u_C(0) = 0$; $\left. \frac{di_1}{dt} \right|_{t=0} = 6,67 \cdot 10^8 \text{ а/сек}$; $\left. \frac{du_C}{dt} \right|_{t=0} = 6,67 \cdot 10^8 \text{ в/сек}$; $i_2 = 2 + 0,94 e^{-3 \cdot 10^4 t} \sin(10^4 t - 45^\circ) a$; $u_C = 20 + 21,2 e^{-3 \cdot 10^4 t} \sin(10^4 t - 71^\circ 35') \text{ в}$. 9.52. $u_C = (40 + 24 e^{-10^4 t} - 16 e^{-1,5 \cdot 10^4 t}) \text{ в}$. 9.53. Для $t = 0$ $u_2 = 64,3 \text{ в}$, $u_L = -42,9 \text{ в}$, $u_C = 90 \text{ в}$, $\frac{du_2}{dt} = -2,32 \cdot 10^6 \text{ в/сек}$, $\frac{du_L}{dt} = 1,3 \cdot 10^6 \text{ в/сек}$; $\frac{du_C}{dt} = -2,58 \cdot 10^6 \text{ в/сек}$; для $t = \infty$, $u_2 = 40 \text{ в}$, $u_L = 0$, $u_C = 40 \text{ в}$. 9.55. Для схем $a - \partial n = 1$; для схемы $e n = 2$; для схемы $ж n = 3$. 9.59. $u_C(0_-) = 80 \text{ в}$; $u_C(0_+) = -20 \text{ в}$. 9.61. $i_1(0_-) = 10 \text{ а}$; $i_1(0_+) = 2,5 \text{ а}$. 9.63. $u_C = 20 \text{ в}$ при $t < 0$; $u_C = (70 \mp 8,5 e^{-3,62 \cdot 10^3 t} - 58,5 e^{-1,38 \cdot 10^3 t}) \text{ в}$.

К главе 10

10.2. $u_2 = (83,3 - 33,3 e^{-800t}) \text{ в}$. 10.3. См. ответы к задаче 9.12. 10.4. См. ответы к задаче 9.14. 10.6. См. ответы к задаче 9.46. 10.7. При вещественных корнях $t = \frac{E r_1 e^{-at}}{\beta L (r_1 + r_2)} \operatorname{sh} \beta t$; при комплексных корнях $t = \frac{E r_1 e^{-at}}{\omega L (r_1 + r_2)} \sin \omega t$; при равных корнях $t = \frac{E r_1 t e^{-at}}{L (r_1 + r_2)}$, где $\alpha = \frac{b}{a}$, $\beta = j \omega = \frac{1}{2a} \sqrt{b^2 - 4aa}$, $a = LC (r_1 + r_2)$; $b = C (r_1 r_2 + r r_2 + r r_1)$, $a = r + r_1$. 10.8. $t = \frac{U}{r_0 + r + r_{ш}} \left\{ 1 + e^{-at} \left[\left(\frac{r_0 + r + r_{ш}}{\omega_0 L} - \frac{a}{\omega_0} \right) \sin \omega_0 t - \cos \omega_0 t \right] \right\}$, где $a = \frac{1}{2} \left(\frac{r_0 + r}{L} + \frac{1}{Cr_{ш}} \right)$,

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{1}{4} \left(\frac{r_0 + r}{L} - \frac{1}{Cr_{\text{ш}}} \right)^2}. \quad 10.9. \quad u_C = \frac{U_m \sin(\omega_0 t + \psi - \varphi)}{\sqrt{\left(\frac{r_1 + r_2}{r_2} \right)^2 + (\omega_0 Cr_1)^2}} +$$

$$+ \frac{U_m \sin(\psi - \varphi) e^{-\frac{r_1 + r_2}{Cr_1 r_2} t}}{\sqrt{\left(\frac{r_1 + r_2}{r_2} \right)^2 + (\omega_0 Cr_1)^2}}. \quad 10.10. \quad i_1 = \frac{U_m}{\sqrt{(r_1 r_2)^2 + (\omega L r_1 + \omega L r_2)^2}} \times$$

$$\times \left[\sqrt{r_2^2 + \omega^2 L^2} \sin(\omega t + \psi - \alpha + \beta) - \frac{r_2^2 \sin(\psi - \alpha) e^{-\frac{t}{\tau}}}{r_1 + r_2} \right], \quad \text{где } \operatorname{tg} \alpha =$$

$$= \frac{\omega L (r_1 + r_2)}{r_1 r_2}; \quad \operatorname{tg} \beta = \frac{\omega L}{r_2}; \quad \tau = \frac{L (r_1 + r_2)}{r_1 r_2}. \quad 10.11. \quad i = [(7,22 \sin(314 t \diamond$$

$$+ 43^\circ 50') \diamond 8,3 e^{-100t} \sin(153 t - 37^\circ 20')] a; \quad u_C = 346 \sin(314 t - 46^\circ 10') -$$

$$- 412 e^{-100t} \sin(153 t - 37^\circ 20') \text{ в.} \quad 10.13. \quad \text{См. ответ к задаче 9.8.} \quad 10.14. \quad \text{См. ответ к задаче 9.9.} \quad 10.18. \quad \text{См. ответ к задаче 9.48.} \quad 10.19. \quad \text{См. ответ к задаче 9.49.}$$

$$10.20. \quad \text{См. ответ к задаче 9.50.} \quad 10.21. \quad \text{См. ответ к задаче 9.51.} \quad 10.24. \quad i_2 =$$

$$= [1,18 \sin(314 t \diamond 16^\circ 40') \diamond 0,43 e^{-398t} a. \quad 10.26. \quad 1,85 a. \quad 10.27. \quad i = (0,1 e^{-10t} -$$

$$- 0,05 e^{-5t}) a; \quad u_C = 200 (e^{-5t} - e^{-10t}) \text{ в.} \quad 10.28. \quad i = (12 \diamond 20 e^{-4t} - 32 e^{-2,5t}) a;$$

$$u_L = 320 (e^{-2,5t} - e^{-4t}) \text{ в.} \quad 10.29. \quad i = 0,024 (e^{-2t} - e^{-4t}) a; \quad u_C = (120 \diamond 120 e^{-4t} -$$

$$- 240 e^{-2t}) \text{ в.} \quad 10.31. \quad \text{а) } u_{ab} = \frac{1}{45} U \left(9 \diamond e^{-\frac{5rt}{3L}} \right); \quad u_{ab} = \frac{1}{6} r J \left(2 \diamond e^{-\frac{3r}{L} t} \right);$$

$$\text{б) } u_{ab} = \frac{1}{30} U \left(10 - e^{-\frac{3}{5rC} t} \right); \quad u_{ab} = \frac{1}{3} J r \left(3 - e^{-\frac{1}{3rC} t} \right). \quad 10.33. \quad \text{Для схемы}$$

$$\text{рис. 10.22, а } i_2(t) = 0,25 (e^{-2000t} - e^{-400t}) a; \quad \text{для схемы рис. 10.22, б, как}$$

$$\text{в случае действия } U, \text{ так и } J, \quad i_2(t) = 2 (e^{-600t} - e^{-100t}) a; \quad \text{для схемы рис. 10.22, в}$$

$$i_2(t) = (10 - 13,5 e^{-100t} \diamond 3,5 e^{-300t}) a.$$

К главе 11

$$11.2. \quad y(t) = \frac{1}{r_2} - \frac{r_1}{r_2 (r_1 + r_2)} e^{-\frac{r_1 r_2}{L (r_1 + r_2)} t}; \quad k(t) = 1 - \frac{r_1}{r_1 + r_2} e^{-\frac{r_1 r_2}{L (r_1 + r_2)} t}.$$

$$11.3. \quad y(t) = (5,5 e^{-7,6t} + 14,5 e^{-52,4t}) 10^{-5} \text{ см}; \quad k(t) = (1 - 0,72 e^{-7,6t} -$$

$$- 0,28 e^{-52,4t}) \text{ в.} \quad 11.4. \quad k(t) = \frac{r_1}{r + r_1} \left(1 - e^{-\frac{r+r_1}{Crr_1} t} \right); \quad y(t) = \frac{1}{r + r_1} \left(1 +$$

$$+ \frac{r_1}{r} e^{-\frac{r+r_1}{Crr_1} t} \right); \quad y_1(t) = \frac{1}{r + r_1} \left(1 - e^{-\frac{r+r_1}{Crr_1} t} \right).$$

$$11.6. \quad \text{Для схемы рис. 11.11, а: } k_1(t) = \frac{r_2}{r_1 + r_2} \left(1 - e^{-\frac{r_1+r_2}{L} t} \right); \quad k_2(t) =$$

$$= \frac{1}{r_1 + r_2} \left(r_1 + r_2 e^{-\frac{r_1+r_2}{L} t} \right); \quad z(t) = \frac{r_2}{r_1 + r_2} \left(r_1 + r_2 e^{-\frac{r_1+r_2}{L} t} \right); \quad \text{для схемы}$$

$$\text{рис. 11.11, б: } k_1(t) = \frac{1}{r_1 + r_3} \left(r_3 + \frac{r_1 r_2}{r_1 + r_2 + r_3} e^{p_1 t} \right); \quad k_2(t) = \frac{r_1}{r_1 + r_2 + r_3} e^{p_1 t};$$

$$z_2(t) = \frac{r_1 r_2}{r_1 + r_2 + r_3} e^{p_1 t}; \quad \text{где } p_1 = -\frac{r_2 (r_1 + r_3)}{L (r_1 + r_2 + r_3)}. \quad 11.8. \quad \text{а) } u_2(t) = U_1 k(t)$$

при $0 \leq t < t_1$; $u_2(t) = U_1 k(t) - (U_1 - U_2) k(t_1)$ при $t_1 < t < t_2$; $u_2(t) = U_1 k(t) - (U_1 - U_2) k(t_1) - U_2 k(t_2)$ при $t > t_2$. б) $u_2(t) = U_1 k(t)$ при $0 \leq t < t_1$; $u_2(t) = U_1 k(t) - (U_1 + U_2) k(t_1)$ при $t_1 < t < t_2$; $u_2(t) = U_1 k(t) - (U_1 + U_2) k(t_1) + U_2 k(t_2)$ при $t > t_2$. в) $u_2(t) = U_1 k(t) + \frac{U_2 - U_1}{t_1} \int_0^t k(t - \tau) d\tau$ при $0 < t < t_1$;

$u_2(t) = U_1 k(t) + \frac{U_2 - U_1}{t_1} \int_0^{t_1} k(t - \tau) d\tau - U_2 k(t_1)$ при $t > t_1$. 11.10. При $0 < t <$

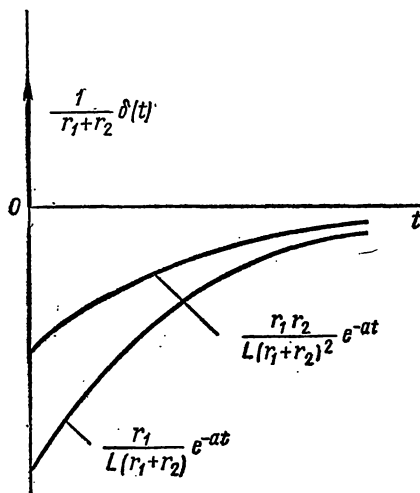
$< \frac{T}{2}$ $t = \frac{U_m}{z} \left[\sin(\omega t - \varphi) + \sin \varphi \cdot e^{-\frac{1}{rC} t} \right]$; при $\frac{T}{2} < t < \infty$ $t = \frac{U_m}{z} \times$
 $\times \left[\sin(\omega t - \varphi) \cdot e^{-\frac{1}{rC}(t-t_1)} + \sin \varphi \cdot e^{-\frac{1}{rC} t} \right]$, где $z = \sqrt{r^2 + \left(\frac{1}{\omega C}\right)^2}$.

$\text{tg } \varphi = -\frac{1}{\omega C r}$. 11.12. $i(t) = U \omega_0 C \left(1 - e^{-\frac{1}{rC} t}\right)$; $u_C(t) = U \omega_0 t - U \omega_0 C r \times$

$\times \left(1 - e^{-\frac{1}{rC} t}\right)$. 11.14. При $0 < t \leq 2 \cdot 10^{-3}$ сек $i(t) = [50t - 0,1 + 0,1e^{-500t}]$ а;
 при $t \geq 2 \cdot 10^{-3}$ сек $i(t) = 0,1e^{-500t}$ а. 11.15. При $0 \leq t \leq t_1$ $u_2 = 25(1 - e^{-10^3 t})$ в;
 при $t \geq t_1$ $u_2 = 1340 e^{-10^3 t} = 24,5 e^{-10^3(t-t_1)}$ в. 11.16. $u_2 = U[\omega_0 t -$

$- \sqrt{LC} \omega_0 \sin \frac{t}{\sqrt{LC}}$. 11.20. $u_2(t) = \frac{U_0 r_2}{r_1 r_2 - aL(r_1 + r_2)} \left[(r_1 - aL) e^{-at} - \right.$
 $\left. - \frac{r_1^2}{r_1 + r_2} e^{-\frac{r_1 r_2}{L(r_1 + r_2)} t} \right]$; $y_{\delta r}(t) = \frac{1}{r_1 + r_2} \delta(t) - \frac{r_1 r_2}{L(r_1 + r_2)^2} e^{-\frac{r_1 r_2}{L(r_1 + r_2)} t}$;

$y_{\delta L}(t) = \frac{r_1}{L(r_1 + r_2)} e^{-\frac{r_1 r_2}{L(r_1 + r_2)} t}$; $i_r = \frac{U_0}{r_1 r_2 - aL(r_1 + r_2)} \times$
 $\times \left[\frac{r_1 r_2}{r_1 + r_2} e^{-\frac{r_1 r_2}{L(r_1 + r_2)} t} - aL e^{-at} \right]$; $i_L = \frac{U_0 r_1}{r_1 r_2 - aL(r_1 + r_2)} \left[e^{-at} - \right.$
 $\left. - e^{-\frac{r_1 r_2}{L(r_1 + r_2)} t} \right]$.



К отв. зад. 11.20

$$11.21. k_{\delta C}(t) = \delta(t) - \frac{1}{r_2 C} e^{-\frac{1}{r_2 C} t}; k_{\delta r_1}(t) = \delta(t); z_{\delta}(t) = \frac{1}{C} e^{-\frac{1}{r_2 C} t}.$$

11.23. Для rC -схемы: 1) да; 2) нет; для rL -схемы: 1) да; 2) нет. 11.24. 1) Дифференцирующая, 2) интегрирующая, 3) переходная. 11.25. а) Нет; б) да.

$$11.27. \text{Для рис. 11.7: } K(j\omega) = \frac{r_2(r_1 + j\omega L)}{r_1 r_2 + j\omega L(r_1 + r_2)}; Y(j\omega) = \frac{r_1 + j\omega L}{r_1 r_2 + j\omega L(r_1 + r_2)};$$

$$\text{для рис. 11.8: } K(j\omega) = \frac{1 + j\omega C_1 r_2}{a}; Y(j\omega) = \frac{j\omega C_2(1 + j\omega C_1 r_2)}{a}, \text{ где } a =$$

$$= 1 - \omega^2 C_1 C_2 r_1 r_2 + j\omega(C_1 r_2 + C_2 r_1 + C_2 r_2). 11.29. K_{11}(j\omega) = \frac{r_2}{r_1 + r_2 + j\omega L};$$

$$K_{21}(j\omega) = \frac{r_1 + j\omega L}{r_1 + r_2 + j\omega L}; Z(j\omega) = \frac{r_2(r_1 + j\omega L)}{r_1 + r_2 + j\omega L}. 11.30. \omega = 150 \text{ рад/сек.}$$

$$11.32. U(j\omega) = 2 \cdot 10^{-2} \frac{\sin 5 \cdot 10^{-6} \omega}{\omega}. 11.34. |U(j\omega)| =$$

$$= \sqrt{\frac{1 + e^{-2\alpha t_n} - 2e^{-\alpha t_n} \cos \omega t_n}{\alpha^2 + \omega^2}}, \psi(\omega) = \arctg \frac{\omega}{\alpha} - \arctg \frac{e^{-\alpha t_n} \sin \omega t_n}{1 - e^{-\alpha t_n} \cos \omega t_n}.$$

$$11.35. U(j\omega) = \frac{2 \cdot 10^7}{4 \cdot 10^{10} - \omega^2} \sin(\pi \cdot 10^{-5} \omega) e^{-j\pi(10^{-5}\omega - \frac{1}{2})}. 11.36. U_1(j\omega) =$$

$$= j \frac{4\pi T_0}{4\pi^2 - \omega^2 T_0^2} \sin \omega T_0; U_2(j\omega) = \frac{8\pi T_0}{\omega^2 T_0^2 - 4\pi^2} \sin^2\left(\frac{\omega T_0}{2}\right). 11.38. K(j\omega) =$$

$$= 0,1 \omega e^{j\frac{\pi}{2}}. 11.39. K(j\omega) = a + j\left(b\omega - \frac{c}{\omega}\right). 11.40. K(j\omega) = \frac{250}{j\omega + 500}.$$

$$11.42. \text{а) } U(j\omega) = \frac{a}{\alpha^2 + \omega^2} e^{-j2\arctg \frac{\omega}{\alpha}}; \text{б) } U(j\omega) = \frac{4U_m t_1}{(\omega t_1)^2} \sin \frac{\omega t_1}{2} \sin \frac{3\omega t_1}{2} \times$$

$$\times e^{-j2\omega t_1}; \text{в) } U(j\omega) = \frac{U_m}{\omega} \frac{\sin \frac{\omega t_1}{2}}{\frac{\omega t_1}{2}} e^{-j\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\omega t_1}{2}\right)}. 11.43. U_2(j\omega) =$$

$$= \frac{U \omega_0}{\omega^2 (\omega^2 LC - 1)}. 11.44. \text{а) } u(t) = U \left(1 - e^{-\frac{1}{rC} t}\right); \text{б) } u(t) = U e^{-\frac{1}{rC} t};$$

$$\text{в) } u(t) = \frac{1}{1 - \alpha rC} \left(e^{-\alpha t} - e^{-\frac{1}{rC} t}\right); \text{г) } u(t) = \frac{1}{a^2} (1 - \cos at);$$

$$\text{д) } u(t) = \frac{1}{a^2} (\operatorname{ch} at - 1).$$

К главе 12

$$12.5. r_0 = 5,05 \frac{\text{ОМ}}{\text{км}}; L_0 = 2,06 \frac{\text{мГН}}{\text{км}}; C_0 = 6 \cdot 10^{-9} \frac{\text{Ф}}{\text{км}}; g_0 = 0,7 \times 10^{-8} \frac{\text{СИМ}}{\text{км}}; Z_B = 620 e^{-j12^\circ 25'} \text{ Ом}; \gamma = 18,7 \cdot 10^{-8} e^{j76^\circ 15'} \text{ км}^{-1}; \alpha = 4,45 \frac{\text{мНеп}}{\text{км}}$$

$$\beta = 18,2 \frac{\text{мрад}}{\text{км}}; \quad v_{\phi} = 276000 \frac{\text{км}}{\text{сек}}; \quad \lambda = 345 \text{ км.}$$

12. 6.

$Z_B, \text{ ом}$	$\gamma, \text{ км}^{-1}$	$\alpha, \text{ неп/км}$	$\beta, \text{ рад/км}$	$v, \text{ км/сек}$	$\lambda, \text{ км}$	$U_{2т}/U_{1т}$
$1340e^{-j15^\circ 40'}$	$40 \cdot 10^{-3} e^{j72^\circ 25'}$	$12,2 \cdot 10^{-3}$	$38,4 \cdot 10^{-3}$	130000	163	0,297
$615e^{-j13^\circ 20'}$	$18,5 \cdot 10^{-3} e^{j74^\circ 45'}$	$4,9 \cdot 10^{-3}$	$18,1 \cdot 10^{-3}$	277000	346	0,62
$250e^{-j37^\circ 25'}$	$47,3 \cdot 10^{-3} e^{j52^\circ 15'}$	$29,2 \cdot 10^{-3}$	$37,6 \cdot 10^{-3}$	133000	167	0,053
$84,6e^{-j39^\circ}$	$8,46 \cdot 10^{-2} e^{j51^\circ}$	$5,36 \cdot 10^{-2}$	$6,62 \cdot 10^{-2}$	75600	95	0,000025

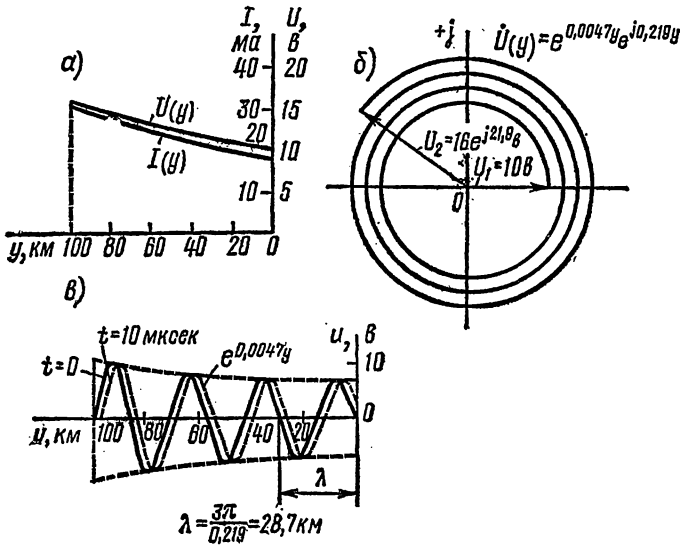
12.7. $Z_B = 387 \text{ ом}; \alpha = 39 \cdot 10^{-8} \text{ неп/м}; \beta = 0,21 \text{ рад/м.}$ 12.8. а) По полным формулам (12.1) ÷ (12.2), $Z_B = 564e^{-j8^\circ 15'}$ ом; $\alpha = 2,37 \text{ мнп/км}; \beta = 18,1 \text{ мрад/км};$ по приближенным формулам (12.4) $Z_B = 554 \text{ ом}; \alpha = 2,64 \text{ мнп/км}; \beta = 17,6 \text{ мрад/км.}$ б) По формулам (12.1) ÷ (12.2) $Z_B = 550e^{-j0^\circ 40'}$ ом; $\alpha = 7,6 \text{ мнп/км}; \beta = 435 \text{ мрад/км};$ по приближенным формулам (12.4) $Z_B = 546 \text{ ом}; \alpha = 8,2 \text{ мнп/км}; \beta = 435 \text{ мрад/км.}$ 12.9. По полным формулам (12.1) ÷ (12.2), $Z_B = 357 e^{-j41^\circ 05'}$ ом; $\gamma = 0,0634 e^{j48^\circ 40'}$ км⁻¹; $\alpha = 0,042 \text{ неп/км}; \beta = 0,048 \text{ рад/км};$ по приближенным формулам $Z_B = 358 e^{-j45^\circ}$ ом; $\gamma = 0,0634 e^{j45^\circ}$ км⁻¹; $\alpha = 0,045 \text{ неп/км}; \beta = 0,045 \text{ рад/км.}$

Ответ к задаче 12.10

$f, \text{ кГц}$	Вспомогательный параметр γ , вычисленный по формуле (П5.4)	$\Gamma_0, \text{ ом/км}$	$L_0, \text{ мнп/км}$	$C_0, \text{ нп/км}$	$g_0, \text{ мкснп/км}$	$Z_B, \text{ ом}$	$R_B, \text{ ом}$	$X_B, \text{ ом}$	$\gamma \cdot 10^3, \text{ 1/км}$	$\alpha, \text{ мнп/км}$	$\beta, \text{ мрад/км}$
0,25	2,85	23,6	12,68	5,12	0,022	1960/—24°50'	1775	—820	15,75/65°	6,66	14,25
0,40	3,61	28,4	11,28	5,12	0,03	1770/—22°28'	1635	—675	22,7/67°23'	8,65	20,9
0,8	5,1	38,4	8,84	5,12	0,05	1510/—20°21'	1415	—525	38,8/69°32'	13,6	36,4
1,5	7	50,7	7,08	5,12	0,085	1320/—18°32'	1250	—420	63,6/71°22'	20	60,2
2,0	8,06	58	6,58	5,12	0,11	1252/—17°27'	1193	—375	80,5/72°27'	24	76,7
2,8	9,57	67,5	5,88	5,12	0,15	1170/—16°32'	1120	—332	105/73°22'	30	101
4,0	11,4	79	5,26	5,12	0,21	1090/—15°24'	1050	—290	140/74°29'	37,4	135
7,0	15,1	103,5	4,53	5,12	0,36	998/—13°42'	970	—236	224,7/76°12'	53,8	219
8,0	16,1	110	4,38	5,12	0,41	980/—13°12'	955	—224	252/76°42'	58	245
10,0	18	122,5	4,16	5,12	0,51	960/—12°27'	938	—207	302/77°27'	63,8	295

12.16. $\dot{U}_1 = 11,1 e^{j177^\circ 40'}$ в; $\dot{I}_1 = 9,1 e^{j169^\circ 20'}$ ма; $u_1 = 15,5 \sin(\omega t + 177^\circ 40')$ в; $i_1 = 12,9 \sin(\omega t + 169^\circ 20')$ ма; $U_{y=20} = 3,4 e^{j195^\circ 20'}$ в; $I_{y=20} = 17,4 e^{j259^\circ 20'}$ ма; $u_{y=20} = 4,8 \sin(\omega t + 195^\circ 20')$ в; $i_{y=20} = 24,6 \sin(\omega t + 259^\circ 20')$ ма. 12.17. $\dot{U}_{1к.з} = 2,74 e^{j167^\circ}$ в; $u_{1к.з} = 3,88 \sin(\omega t + 167^\circ)$ в; $\dot{I}_{1к.з} = 11,07 e^{j177^\circ 40'}$ ма; $i_{1к.з} =$

$= 15,6 \sin(\omega t + 177^\circ 40') \text{ ма}; Z_{x,x} = 1210e^{j8^\circ 20'} \text{ ом}; Z_{k,з} = 248e^{-j10^\circ 40'} \text{ ом}.$
12.18. $\dot{U}_1 = 16,6e^{j2^\circ 30'} \text{ в}; \dot{I}_1 = 31e^{j4^\circ 50'} \text{ ма}; \dot{U}_{\text{пр1}} = 16,8e^{j3^\circ 15'} \text{ в}; U_{\text{обпр1}} = 0,6e^{-j132^\circ 20'} \text{ в}.$ **12.19.** $u_1 = 19,1 \sin(\omega t + 175^\circ 55') \text{ в}; i_1 = 27,2 \sin(\omega t + 173^\circ 10') \text{ ма}; Z_{\text{вх}} = 705e^{j2^\circ 45'} \text{ ом}.$ **12.20.** $\dot{U}_{2x,x} = 12,6 \text{ в}; I_{1x,x} = 7,35 \text{ ма}; u_{2x,x} = 17,8 \sin(\omega t - 18^\circ 20') \text{ в}; i_{1x,x} = 10,4 \sin(\omega t + 76^\circ 50') \text{ ма}.$ **12.21.** $\dot{U}_2 = 5,55e^{-j34^\circ 50'} \text{ в}; \dot{I}_2 = 5,55e^{-j34^\circ 50'} \text{ ма}; \dot{I}_1 = 6,05e^{j16^\circ} \text{ ма}; u_2 = 7,83 \sin(\omega t - 34^\circ 50') \text{ в}; i_2 = 7,83 \sin(\omega t - 34^\circ 50') \text{ ма}; i_1 = 8,55 \sin(\omega t + 15^\circ) \text{ ма}; \dot{U}_{\text{прп}} = 9,04e^{-j4^\circ} \text{ в}; \dot{U}_{1\text{отрп}} = 1,15e^{j33^\circ 20'} \text{ в}; \dot{I}_{1\text{прп}} = 6,65e^{j17^\circ 20'} \text{ ма}; \dot{I}_{1\text{отрп}} = 0,85e^{j58^\circ} \text{ ма}; \dot{U}_{2\text{пр}} = 6,45e^{-j48^\circ 40'} \text{ в}; \dot{U}_{2\text{отрп}} = 1,63e^{j78^\circ} \text{ в}; \dot{I}_{2\text{пр}} = 4,5e^{-j27^\circ 20'} \text{ ма}; \dot{I}_{2\text{отрп}} = 1,2e^{j102^\circ 40'} \text{ ма}.$ **12.23.** $\alpha l = 0,47 \text{ неп}; U(y) = 10e^{4,7 \cdot 10^{-3} y} \text{ в}; I(y) = 18,2e^{4,7 \cdot 10^{-3} y} \text{ ма}.$ $\dot{U}_1 = 16e^{j21,9} \text{ в}; \dot{I}_1 = 29,1e^{j3,07} \text{ ма}; U_2 = 10 \text{ в}; \dot{I}_2 = 18,2e^{j0,02} \text{ ма}; P_1 = 0,465 \text{ вт}; P_2 = 0,182 \text{ вт}.$



К отв. зад. 12.23

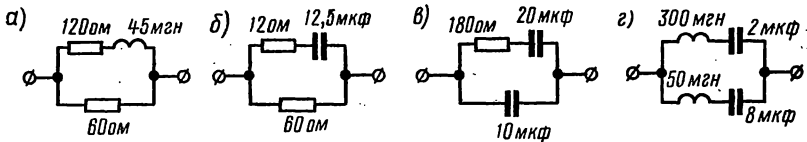
а — кривые действующих значений напряжения и тока вдоль линии; **б** — спиральная диаграмма изменения величины и фазы действующих значений напряжения; **в** — кривые распределения мгновенных значений напряжения вдоль линии для двух моментов времени: 1) $t = 0$; 2) $t = 10 \text{ мксек}$. **12.26.** Индуктивность следует увеличить на $41,24 \text{ мГн}$. $Z_B = 2660e^{j5^\circ 52'} \text{ ом}, \alpha = 10,3 \frac{\text{мнеп}}{\text{км}}, \beta = 81,4 \frac{\text{мрад}}{\text{км}}$ $\dot{U}_1 = 130,3e^{j1^\circ 5'}$ в, $\dot{I}_1 = 49e^{j83^\circ 2'}$ ма, $P_1 = 895 \text{ вт}, I_2 = 3,76 \text{ ма}, P_2 = 37,6 \text{ вт}.$ **12.27.** $Z_{1T} = Z_{3T} = 2,61e^{j40^\circ 36'} \text{ ом}, Z_{2T} = 1,96e^{-j1^\circ 20'} \text{ ом}.$ **12.28.** $Z_{1п} = 676e^{j82^\circ 35'} \text{ ом}; Z_{2п} = Z_{3п} = 502e^{-j75^\circ 55'} \text{ ом}.$ **12.31.** $Z_B = 615e^{-j13^\circ 20'} \text{ ом}; \gamma = (4,9 + j18,1) \cdot 10^{-3} \text{ км}^{-1}; r_0 = 5,4 \frac{\text{ом}}{\text{км}}; L_0 =$

$= 2 \frac{\text{мГн}}{\text{кМ}} C_0 = 6 \cdot 10^{-9} \frac{\phi}{\text{кМ}}; g_0 = 1 \cdot 10^{-8} \frac{\text{СИМ}}{\text{кМ}} \cdot 12.35. 0,173 \text{ ма. } 12.37. u_1 =$
 $= 10 \sin(\omega t - 108^\circ 45') \text{ мВ}; i_1 = 21,3 \sin(\omega t - 108^\circ 45') \text{ мкА, при } t_1 = 0 u =$
 $= 10 \sin(2,1y) \text{ мВ}; i = 21,3 \sin(2,1y) \text{ мкА, при } t_2 = \frac{T}{8} u = 10 \sin\left(2,1y + \frac{\pi}{4}\right) \text{ мВ};$
 $i = 21,3 \sin\left(2,1y + \frac{\pi}{4}\right) \text{ мкА, при } t_3 = \frac{T}{4} u = 10 \cos(2,1y) \text{ мВ};$
 $i = 21,3 \cos(2,1y) \text{ мкА. } \rho_H = 0. K_{6.в} = 1. 12.39. u_1 = 5,72 \sin(\omega t + 235^\circ 50') \text{ мВ};$
 $i = 20,4 \sin(\omega t + 260^\circ 20') \text{ мкА; } \rho_H = \frac{1}{3}; K_{6.в} = 0,5.$
 12.42. $Z_{вх} = 141e^{-j45^\circ} \text{ ом}; I_{вх} = 71 \text{ ма. } 12.43. 0,081 \text{ в.}$

К главе 13

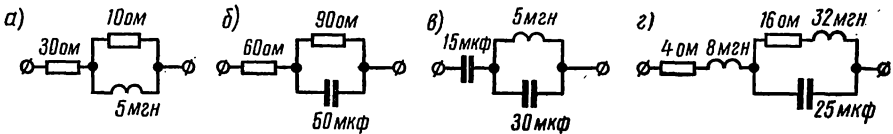
13.1. Для вариантов 2, 3, 4 и 6: $L = 1,8 \text{ мГн}; C = 0,5 \text{ мкФ}$; для вариантов 1 и 5: $L = 3,6 \text{ мГн}, C = 1 \text{ мкФ}$. Эквиваленты 2 и 3, 4 и 6. Обратны 1 и 5; 2 и 3 обратны 4 и 6. 13.2 а) $\omega_p = 5 \cdot 10^3 \text{ сек}^{-1}$; б) $\omega_p = 5 \cdot 10^3 \text{ сек}^{-1}$; в) $\omega_{p1} = 3,54 \cdot 10^3 \text{ сек}^{-1}$; $\omega_{p2} = 5 \cdot 10^3 \text{ сек}^{-1}$; г) $\omega_{p1} = 2,5 \cdot 10^4 \text{ сек}^{-1}$; $\omega_{p2} = 5 \cdot 10^4 \text{ сек}^{-1}$.

13.4.



К отв. зад. 13.4

13.5.



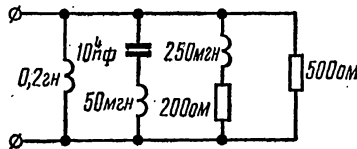
К отв. зад. 13.5

13.6. а) 500 ом; б) 500 ом.

$$13.7. Z(p) = \frac{p^3 CL_1 L_2 + p^2 C (L_2 r_1 + L_1 r_2) + p (r_1 r_2 C + L_1 + L_2) + (r_1 + r_2)}{p^2 CL_2 + p Cr_2 + 1};$$

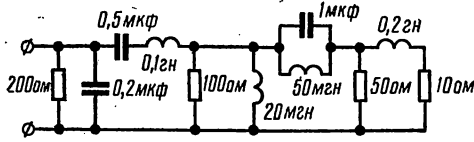
$$a_3 = CL_1 L_2; a_2 = C (L_2 r_1 + L_1 r_2); a_1 = r_1 r_2 C + L_1 + L_2; a_0 = r_1 + r_2; b_2 = CL_2; b_1 = Cr_2; b_0 = 1.$$

13.9.



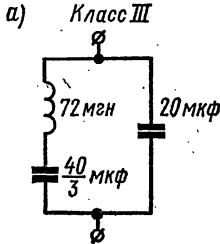
К отв. зад. 13.9

13.10.

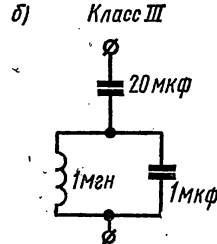


К отв. зад. 13.10

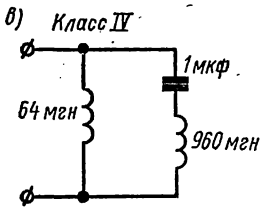
13.12.



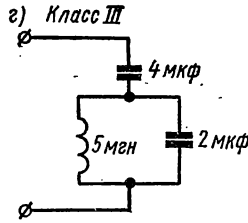
$$Z(j\omega) = \frac{5 \cdot 10^4}{j\omega} \cdot \frac{1020^2 - \omega^2}{2550^2 - \omega^2}$$



$$Z(j\omega) = \frac{1,05 \cdot 10^6}{j\omega} \cdot \frac{6900^2 - \omega^2}{31600^2 - \omega^2}$$



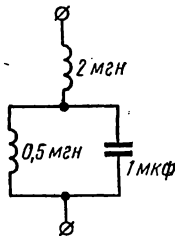
$$Z(j\omega) = j\omega \cdot 60 \cdot 10^{-3} \cdot \frac{1020^2 - \omega^2}{990^2 - \omega^2}$$



$$Z(j\omega) = \frac{0,75 \cdot 10^6}{j\omega} \cdot \frac{5780 - \omega^2}{10000^2 - \omega^2}$$

К отв. зад. 13.12 (а, б, в, г)

13.14.



$$Z(j\omega) = j\omega 2 \cdot 10^{-3} \cdot \frac{50000^2 - \omega^2}{44600^2 - \omega^2}$$

К отв. зад. 13.14

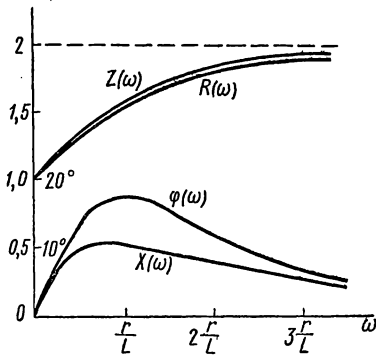
13.16. $C = 1,13$ нФ; класс IV. $Z(j\omega) = j\omega \cdot 222 \cdot 10^{-6} \cdot \frac{(2,22 \cdot 10^{15} - \omega^2)}{(9,85 \cdot 10^{14} - \omega^2)}$.

13.17. $C_1 = 0,3$ мкФ; $C_2 = 0,15$ мкФ; $L = 133$ мГн. 13.18. Для рис. 13.17, б.

$$R(\omega) = r \left[1 + \frac{\left(\frac{\omega L}{r}\right)^2}{1 + \left(\frac{\omega L}{r}\right)^2} \right]; \quad X(\omega) = r \frac{\frac{\omega L}{r}}{1 + \left(\frac{\omega L}{r}\right)^2}; \quad \varphi(\omega) = \operatorname{arctg} \frac{\frac{\omega L}{r}}{1 + 2\left(\frac{\omega L}{r}\right)^2}$$

$$Z(\omega) = \frac{r}{1 + \left(\frac{\omega L}{r}\right)^2} \cdot \sqrt{4\left(\frac{\omega L}{r}\right)^4 + 5\left(\frac{\omega L}{r}\right)^2 + 1}$$

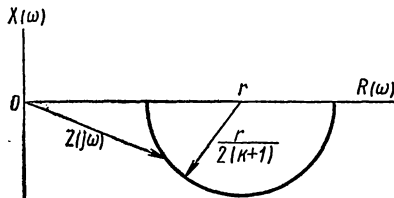
$\frac{R(\omega)}{r}; \frac{X(\omega)}{r}; \frac{Z(\omega)}{r}; \varphi(r)$



К отв. зад. 13.186

13.19. $\left[R(\omega) - r \frac{2k+1}{2(k+1)} \right]^2 + X^2(\omega) = \left[\frac{r}{2(k+1)} \right]^2$ — уравнение окружности, здесь

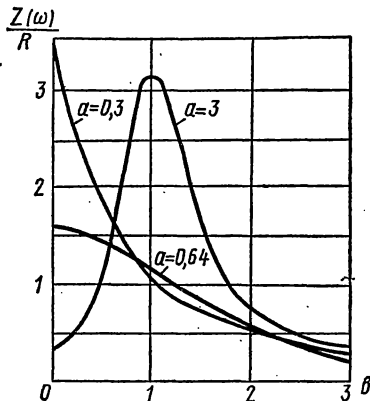
$$R(\omega) = r \left[1 - \frac{(\omega Cr)^2 (k+1)}{1 + (\omega Cr)^2 (k+1)^2} \right], \quad X(\omega) = -r \frac{\omega Cr}{1 + (\omega Cr)^2 (k+1)^2}$$



К отв. зад. 13.19

13.20. Для схемы рис. 13.20, б.

$$\frac{Z(\omega)}{R} = \sqrt{\frac{1 + a^2 b^2}{b^2 + a^2 (b^2 - 1)^2}}$$



К отв. зад. 13.206

К главе 14.

14.3. Для рис. 14.6, а: $A_{11} = 3,26e^{-j10^{\circ}37'}$; $A_{12} = 36,1e^{j56^{\circ}20'}$ ом; $A_{21} = 6,32 \cdot 10^{-2}e^{-j71^{\circ}35'}$ сим; $A_{22} = 1$; $Z_{11} = 51,6e^{j60^{\circ}58'}$ ом; $Z_{12} = Z_{21} = Z_{22} = 15,83e^{j71^{\circ}35'}$ ом; $Y_{11} = 2,77 \cdot 10^{-2}e^{-j56^{\circ}20'}$ сим; $Y_{12} = Y_{21} = 2,77 \times 10^{-2}e^{-j123^{\circ}40'}$ сим; $Y_{22} = 9,03 \cdot 10^{-2}e^{-j66^{\circ}57'}$ сим; $H_{11} = 36,1e^{j56^{\circ}20'}$ ом; $H_{12} = -H_{21} = 1$; $H_{22} = 6,32 \cdot 10^{-2}e^{-j71^{\circ}35'}$ сим; $F_{11} = 1,94 \cdot 10^{-2}e^{-j60^{\circ}58'}$ сим; $F_{12} = -F_{21} = 0,306e^{-j169^{\circ}23'}$; $F_{22} = 11,09e^{j66^{\circ}57'}$ ом; для рис. 14.6, б: $A_{11} = 1,075e^{j21^{\circ}50'}$; $A_{12} = 1000$ ом; $A_{21} = 3,68 \cdot 10^{-4}e^{j12^{\circ}32'}$ сим; $A_{22} = 1,265e^{-j18^{\circ}25'}$; $Z_{11} = 2,92 \cdot 10^3e^{j9^{\circ}19'}$ ом; $Z_{21} = Z_{12} = 2,72 \cdot 10^3e^{-j12^{\circ}32'}$ ом; $Z_{22} = 3,44 \cdot 10^3e^{-j30^{\circ}57'}$ ом; $Y_{11} = 1,265 \cdot 10^{-3}e^{-j18^{\circ}25'}$ сим; $Y_{12} = Y_{21} = -10^{-3}$ сим; $Y_{22} = 1,075 \cdot 10^{-3}e^{j21^{\circ}51'}$ сим; $H_{11} = H_{12} = -H_{21} = 790e^{j18^{\circ}25'}$ ом; $H_{22} = 2,91 \cdot 10^{-4}e^{j30^{\circ}57'}$ сим; $F_{11} = 3,42 \cdot 10^{-4}e^{-j9^{\circ}19'}$ сим; $F_{12} = -F_{21} = 0,932e^{j158^{\circ}9'}$; $F_{22} = 932e^{-j21^{\circ}51'}$ ом. 14.4. $Z_{1T} = (10 + j40)$ ом; $Z_{2T} = -j100$ ом; $Z_{3T} = (20 + j50)$ ом; $Z_{1П} = (17 + j72)$ ом; $Z_{2П} = (20,3 - j136)$ ом; $Z_{3П} = (0,235 - j17,9)$ ом; 14.5. $A_{11} = 1,66 - j0,106$; $A_{12} = (9,76 + j56)$ ом; $A_{21} = -j0,053$ сим; $A_{22} = 2,39 - j0,159$. 14.6. $Z_{1T} = 37,6e^{j86^{\circ}55'}$ ом; $Z_{2T} = 47,1e^{j86^{\circ}22'}$ ом; $Z_{3T} = 15,7e^{j82^{\circ}40'}$ ом. 14.7. $A_{11} = 2 + j6$; $A_{12} = (65 + j10)$ ом; $A_{21} = 0,2$ сим; $A_{22} = 1 - j2$. 14.9. $Z_{1x.x} = 10$ ом; $Z_{1k.3} = (32 + j4)$ ом; $Z_{2x.x} = (10 - j20)$ ом; $Z_{2k.3} = (40 - j60)$ ом. 14.10. Для рис. 14.6, а: $Z_{1x.x} = 51,4e^{j60^{\circ}58'}$ ом; $Z_{1k.3} = 36,1e^{j56^{\circ}20'}$ ом; $Z_{2x.x} = 15,83e^{j71^{\circ}35'}$ ом; $Z_{2k.3} = 11,12e^{j66^{\circ}57'}$ ом; для рис. 14.6, б: $Z_{1x.x} = 2910e^{j9^{\circ}14'}$ ом; $Z_{1k.3} = 790e^{j18^{\circ}25'}$ ом; $Z_{2x.x} = 3430e^{-j31^{\circ}}$ ом; $Z_{2k.3} = 930e^{-j21^{\circ}50'}$ ом. 14.12. $A_{11} =$

$= j2$; $A_{12} = j25$ ом; $A_{21} = j0,2$ сим. 14.14. $Z_{1BX} = 42,5e^{j51^\circ 10'}$ ом; $Z_{2BX} = 10,4e^{-j65^\circ}$ ом. 14.16. а) $A_{11} = 12,87e^{-j20^\circ 11'}$; $A_{12} = 153,2e^{j48^\circ 10'}$ ом; $A_{21} = 0,268e^{-j79^\circ 42'}$ сим; $A_{22} = 3,26e^{-j10^\circ 37'}$; б) $A_{11} = A_{22} = 5,54e^{-j12^\circ 32'}$; $A_{12} = 235e^{j45^\circ 40'}$ ом; $A_{21} = 12,65 \cdot 10^{-2}e^{j71^\circ 35'}$ сим; в) $A_{11} = A_{22} = 5,54e^{-j12^\circ 32'}$; $A_{12} = 72,2e^{j56^\circ 17'}$ ом; $A_{21} = 0,412e^{-j82^\circ 12'}$ сим. 14.19. а) $A_{11} = 3,26e^{-j10^\circ 40'}$; $A_{12} = 72,2e^{j50^\circ 20'}$ ом; $A_{21} = 0,0316e^{-j71^\circ 40'}$ сим; $A_{22} = 1$; б) $A_{11} = 3,26e^{-j10^\circ 40'}$; $A_{12} = 18,05e^{j56^\circ 20'}$ ом; $A_{21} = 0,1264e^{-j71^\circ 40'}$ сим; $A_{22} = 1$; в) $A_{11} = A_{12} = A_{21} = A_{22} = \infty$; г) $A_{11} = A_{12} = A_{21} = A_{22} = \infty$. 14.20. а) $A_{11a} = A_{11}$; $A_{12a} = A_{12}$; $A_{21a} = \frac{A_{11}}{Z} + A_{21}$; $A_{22a} = \frac{A_{12}}{Z} + A_{22}$; б) $A_{11b} = A_{11} + \frac{A_{12}}{Z}$; $A_{12b} = A_{12}$; $A_{21b} = A_{21} + \frac{A_{22}}{Z}$; $A_{22b} = A_{22}$; в) $A_{11b} = A_{11} + ZA_{21}$; $A_{12b} = A_{12} + ZA_{22}$; $A_{21b} = A_{21}$; $A_{22b} = A_{22}$; г) $A_{11r} = A_{11}$; $A_{12r} = A_{12} + ZA_{11}$; $A_{21r} = A_{21}$; $A_{22r} = A_{22} + ZA_{21}$. 14.21. $A_{11} = 1,625 - j1,75$; $A_{12} = (125 - j100)$ ом; $A_{21} = 25 \cdot 10^{-4} (1 - j2)$ сим; $A_{22} = 0,5$. 14.24. а) $Z_{1c} = 43,1e^{j58^\circ 40'}$ ом; $Z_{2c} = 13,2e^{j69^\circ 20'}$ ом; $g = 1,2 - j0,111$; б) $Z_{1c} = 1520e^{j13^\circ 55'}$ ом; $Z_{2c} = 1850e^{j26^\circ 25'}$ ом; $g = 0,575 + j0,058$. 14.26. $A_{11} = A_{22} = 1,74e^{-j26^\circ 20'}$; $A_{12} = 1,09 \cdot 10^3 e^{-j32^\circ}$ ом; $A_{21} = 2,35 \cdot 10^{-3} e^{-j38^\circ 50'}$ сим. 14.27. Для условий задачи 14.15:

а) $Z_{1c} = 284e^{j41^\circ 26'}$ ом; $Z_{2c} = 78,8e^{-j14^\circ 54'}$ ом; $g = 0,61 + j1,71$; б) $Z_{1c} = Z_{2c} = 224$ ом; $g = 0,482 + j1,57$; в) $Z_{1c} = Z_{2c} = 100e^{j26^\circ 30'}$ ом; $g = 0,482 + j1,57$. Для условий задачи 14.18: При последовательном соединении $Z_{1c} = 448$ ом; $Z_{2c} = 200e^{j26^\circ 30'}$ ом; $g = 0,244 - j0,785$; при параллельном соединении: $Z_{1c} = 112$ ом; $Z_{2c} = 50e^{j26^\circ 30'}$ ом; $g = 0,244 - j0,785$; при последовательно-параллельном соединении: $Z_{1c} = 446e^{-j63^\circ 30'}$ ом; $Z_{2c} = j50$ ом; $g = \infty$; при параллельно-последовательном соединении: $Z_{1c} = 112e^{j63^\circ 30'}$ ом; $Z_{2c} = 200e^{-j36^\circ 50'}$ ом; $g = \infty$. Для условий задачи 14.21: $Z_{1c} = 220e^{j7^\circ 10'}$ ом; $Z_{2c} = 131e^{j70^\circ 40'}$ ом; $g = 0,438 - j1,36$. Для условий задачи 14.22:

а) $Z_{1c} = 224$ ом; $Z_{2c} = 400e^{j26^\circ 30'}$ ом; $g = 0,244 - j0,785$. б) $Z_{1c} = 56$ ом; $Z_{2c} = 100e^{j26^\circ 30'}$ ом; $g = 0,244 - j0,785$. 14.28. $Z_c = 21,2e^{j58^\circ 20'}$ ом; $g = 1,46 - j0,5$. 14.29. $Z_{H1} = 224e^{j26^\circ 30'}$ ом; $Z_{H2} = 100$ ом. 14.30. 224 ом. 14.31. $x = -10$ ом или -90 ом. 14.32. 10 ом. 14.34. Одно из сопротивлений П-образной схемы имеет отрицательный знак действительной части. 14.35. $Z_1 = Z_{1T}$; $Z_2 = Z_{1T} \nabla 2Z_{2T}$. 14.38. $\rho_H = 0,74e^{-j106^\circ 40'}$; $\rho_T = 0,87e^{-j166^\circ 20'}$; $Z_{1BX} = 42,5e^{j51^\circ 10'}$ ом; $\frac{|Z_{1BX}| - |Z_{1c}|}{|Z_{1c}|} \cdot 100\% = 1,4\%$;

$\frac{\varphi_{1BX} - \varphi_{1c}}{\varphi_{1c}} \cdot 100\% = 12,8\%$; $a_{\text{зо}} = 0,166$ неп; $a_{\text{вн}} = -0,065$ неп; $a_p = -0,033$ неп; $K_U = 0,175e^{-j24^\circ 50'}$; $K_I = 0,7e^{j24^\circ 50'}$. 14.39. $Z_{1BX} =$

$$= \sqrt{\frac{A'_{12}}{A_{21}}} = \sqrt{\frac{A''_{12}}{A_{21}}}; \quad K_U = K_I = \frac{1}{(A'_{11} + \sqrt{A'_{12}A'_{21}})^2} = \frac{1}{(A''_{11} + \sqrt{A''_{12}A''_{21}})^2}$$

14.40. $a_p = 2,5$ неп; $a_{\text{вн}} = 2,48$ неп. 14.41. $a_p = 0,223$ неп; $a_{\text{вн}} = -1,396$ неп. 14.42. Для Т-схемы: $r_1 = 462$ ом; $r_2 = 425$ ом; схема П: $r_1 = 587,5$ ом; $r_2 = 540$ ом; Т-образно мостовой: $r_1 = 500$ ом; $r_2 = 291$ ом; $r_3 = 860$ ом. 14.43. $Z_T = 454$ ом; $a = 0,988$ неп. 14.47. $n = 0,73$; $L_1 = 0,844$ гн; $L_2 = 1,585$ гн; $C_2 = 7$ мкф. 14.51. Для рис. 14.27, б нуль функции $K(p)$ $p_1 =$

$= \frac{r_1}{r_2 r_3 C}$ лежит в правой полуплоскости. 14.58. $Y_4 = Y_{21} - Y_{12}$. 14.59. $Z_{116} = 215 \text{ ом}$; $Z_{126} = 200 \text{ ом}$; $Z_{216} = 1,9 \cdot 10^6 \text{ ом}$; $Z_{226} = 2 \cdot 10^6 \text{ ом}$. 14.64. $a_{119} = -0,56 \cdot 10^{-3}$; $a_{129} = -62,1 \text{ ом}$; $a_{219} = -1,03 \cdot 10^{-6} \text{ сим}$; $a_{229} = -0,031$; $Z_{\text{вх}} = 1900 \text{ ом}$; $k_U = 495$.

14.65.

$$\text{а) } [A] = \frac{1}{Z_6 + Z_K} \begin{bmatrix} Z_9 + Z_6 & \rho_a \\ 1 & Z_K + Z_6 \end{bmatrix}; \quad [Z] = \begin{bmatrix} Z_9 + Z_6 & Z_6 \\ Z_\Gamma + Z_6 & Z_K + Z_6 \end{bmatrix}; \quad [Y] = \frac{1}{\rho_a} \begin{bmatrix} Z_K + Z_6 & -Z_6 \\ -(Z_\Gamma + Z_6) & Z_9 + Z_6 \end{bmatrix}.$$

$$\text{б) } [A] = \frac{1}{Z_9 - Z_\Gamma} \begin{bmatrix} Z_6 + Z_9 & \rho_6 \\ 1 & Z_9 + Z_K - Z_\Gamma \end{bmatrix}; \quad [Z] = \begin{bmatrix} Z_6 + Z_9 & Z_9 \\ Z_9 - Z_\Gamma & Z_9 + Z_K - Z_\Gamma \end{bmatrix}; \\ [Y] = \frac{1}{\rho_6} \begin{bmatrix} Z_9 + Z_K - Z_\Gamma & -Z_9 \\ -(Z_9 - Z_\Gamma) & Z_6 + Z_9 \end{bmatrix};$$

$$\text{в) } [A] = \frac{1}{Z_K} \begin{bmatrix} Z_6 + Z_K & \rho_B \\ 1 & Z_9 + Z_K - Z_\Gamma \end{bmatrix}; \quad [Z] = \begin{bmatrix} Z_6 + Z_K & Z_K - Z_\Gamma \\ Z_K & Z_9 + Z_K - Z_\Gamma \end{bmatrix}; \\ [Y] = \frac{1}{\rho_B} \begin{bmatrix} Z_9 + Z_K - Z_\Gamma & -(Z_K - Z_\Gamma) \\ -Z_K & Z_6 + Z_K \end{bmatrix}.$$

Здесь

$$\rho_a = (Z_9 + Z_6)(Z_K + Z_6) - Z_6(Z_6 + Z_\Gamma); \quad \rho_6 = (Z_9 + Z_6)(Z_9 + Z_K - Z_\Gamma) - (Z_9 - Z_\Gamma)Z_9;$$

$$\rho_B = (Z_K + Z_6)(Z_9 + Z_K - Z_\Gamma) - Z_K(Z_K - Z_\Gamma).$$

К главе 15

15.1. Схема рис. 15.6, в — полосовой фильтр. $\omega_a = 10^4 \text{ сек}^{-1}$; $\omega_b = 1,73 \cdot 10^4 \text{ сек}^{-1}$;
Схема рис. 15.6, г — полосовой фильтр. $\omega_a = 10^4 \text{ сек}^{-1}$; $\omega_b = 1,1 \cdot 10^4 \text{ сек}^{-1}$.

15.5. $f_c = 56,5 \text{ гц}$. 15.6. $\frac{L_1}{L_2} = 0,03 \text{ гн}$; $C_2 = 0,167 \text{ мкф}$. 15.7. $f_c = 3200 \text{ гц}$;

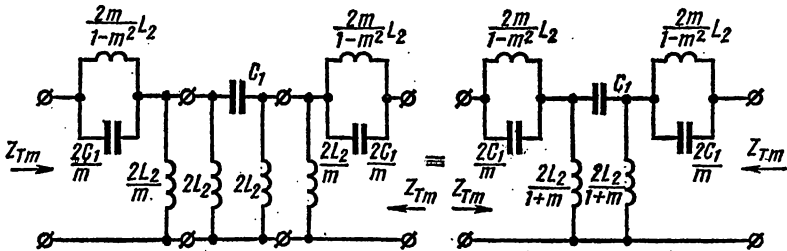
$L_1 = 0,06 \text{ гн}$; $C_2 = 0,167 \text{ мкф}$. 15.11. $f_c = 212 \text{ гц}$; $2,64 \text{ неп}$. 15.12. $L_2 = 0,159 \text{ гн}$;

$C_1 = 0,159 \text{ мкф}$; $2,64 \text{ неп}$. 15.13. $f_c = 940 \text{ гц}$; $L_2 = 0,424 \text{ гн}$;

$C_1 = 0,017 \text{ мкф}$. 15.15. $a = 3,8 \text{ неп}$. 15.16. $L_1 = 1,24 \text{ мгн}$; $L_2 = 15,9 \text{ мгн}$;

$C_1 = 44,3 \text{ нф}$; $C_2 = 3,45 \text{ нф}$; $a = 3,73 \text{ неп}$. 15.18. $f_c = 3200 \text{ гц}$; $a = 1,57 \text{ неп}$.

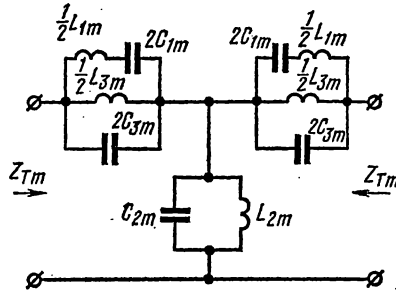
15.20. $t = 0,59$; $2C_{1m} = 91,5 \text{ нф}$; $2L_{2m} = 33 \text{ мгн}$; $\frac{C_{2m}}{2} = 49 \text{ нф}$. 15.21 $a = 4,3 \text{ неп}$.



К отв. зад. 15.21

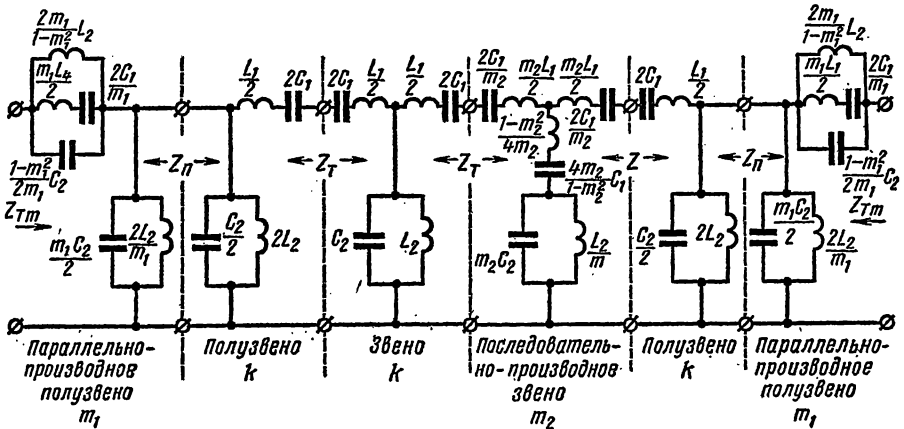
15.22. В схемах б, в, д и е соединение осуществлено по принципу согласования характеристических сопротивлений; в схемах а и г согласования нет.

15.24. $\frac{1}{2} L_{1m} = 0,469 \text{ мкн}; 2C_{1m} = 12,3 \text{ пф}; \frac{1}{2} L_{3m} = 6,6 \text{ мкн}; 2C_{3m} = 0,875 \text{ нф}; L_{2m} = 6,15 \text{ мкн}; C_{2m} = 0,938 \text{ нф}. a = 1,36 \text{ нп.}$



К отв. зад. 15.24

15.25



К отв. зад. 15.25

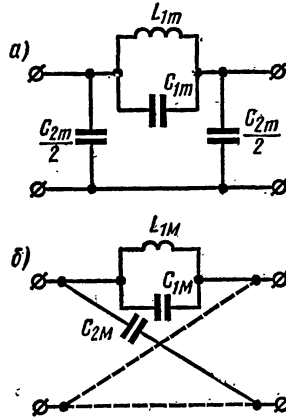
15.26. $f_{1\infty} = 10,67 \text{ кгц}; f_{2\infty} = 18,73 \text{ кгц}; a = 1,386 \text{ нп.}$ 15.29. Схема рис. 15.27, в соответствует ФВЧ; схема 15.27, г — ЗФ. 15.33. Уравнение затухания (см. решение задачи 15.32).

$$\left. \begin{array}{l} \text{th } \frac{a}{2} \\ \text{cth } \frac{a}{2} \end{array} \right\} = \sqrt{\left| -\omega^2 \frac{L_4}{L_1} \cdot \frac{\omega_3^2 - \omega^2}{(\omega_2^2 - \omega^2)^2} \right|};$$

частота $\omega_\infty = 8,55 \cdot 10^4 \text{ сек}^{-1}$.

При частотах $\omega < \omega_\infty$ имеет место соотношение $z_1 < z_2$; при этом следует пользоваться выражением $\text{th} \frac{a}{2}$. При частотах $\omega > \omega_\infty$ ($z_1 > z_2$) — выражением $\text{cth} \frac{a}{2}$. При $\omega' a' = 1,58 \text{ nep}$; при $\omega'' a'' = 3,57 \text{ nep}$.

15.36.



$L_{1M} = 20,2 \text{ мГн};$
 $C_{1M} = 12,5 \text{ нФ};$
 $C_{2M} = 20,2 \text{ нФ}.$

К отв. зад. 15.36

15.39. $m_1 = 0,855$; $m_2 = 0,515$; $t_2 = 2,98 \text{ кГц}.$

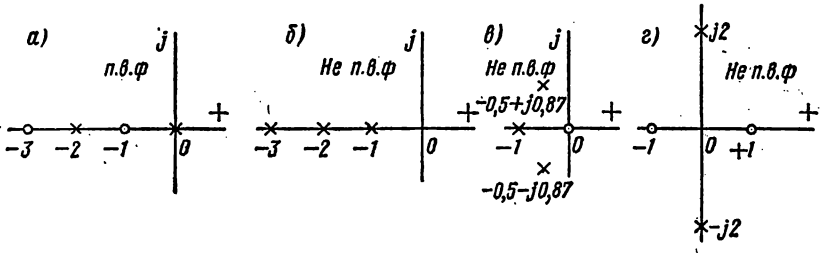
К главе 16

16.3. $r_1 = 600 \text{ ом}; C = 25,5 \text{ нФ}; r_2 = 3267 \text{ ом};$ затухание при 0,3 и 4 кГц: $a_{300} = 12 \text{ мнп}; a_{1000} = 306 \text{ мнп}.$ 16.7. При выборе схемы рис. 16.2, а: 1) $r_1 = 450 \text{ ом}; F_0 = 3,065$; $F_1 = 1,974$; $b_1 = 2,12 \cdot 10^{-4}$; $C_1 = 0,075 \text{ мкФ}; r_2 = 800 \text{ ом}; L_2 = 0,027 \text{ Гн}; \Delta a_{\text{к макс}} = 0,061 \text{ неп}$ при $f = 10000 \text{ Гц}.$ 2) $r_1 = 472 \text{ ом}; F_0 = 3,19$; $F_1 = 1,974$; $b_1 = 2,24 \cdot 10^{-4}$; $C_1 = 0,076 \text{ мкФ}; r_2 = 760 \text{ ом}; L_2 = 27,2 \text{ мГн}; \Delta a_{\text{к макс}} = 0,055 \text{ неп}$ при $f = 10000 \text{ Гц}.$ 16.9. При выборе схемы рис. 16.2, в: 1) $r_1 = 3410 \text{ ом}; C_1 = 0,046 \text{ мкФ}; L_1 = 19,6 \text{ мГн}; r_2 = 106 \text{ ом}; L_2 = 16,6 \text{ мГн}; C_2 = 0,0543 \text{ мкФ}; \Delta a_{\text{к макс}} = 0,131 \text{ неп}$ при $f = 1200 \text{ Гц}.$ 2) $r_1 = 3216 \text{ ом}; C_1 = 0,0466 \text{ мкФ}; L_1 = 19,35 \text{ мГн}; r_2 = 112 \text{ ом}; L_2 = 16,8 \text{ мГн}; C_2 = 0,0539 \text{ мкФ}; \Delta a_{\text{к макс}} = 0,1 \text{ неп}$ при $f = 800 \text{ Гц}.$ 3) $r_1 = 3410 \text{ ом}; C_1 = 0,0473 \text{ мкФ}; L_1 = 17 \text{ мГн}; r_2 = 106 \text{ ом}; L_2 = 17,05 \text{ мГн}; C_2 = 0,0472 \text{ мкФ}; \Delta a_{\text{к макс}} = 0,117 \text{ неп}$ при $f = 1200 \text{ Гц}.$

К главе 17

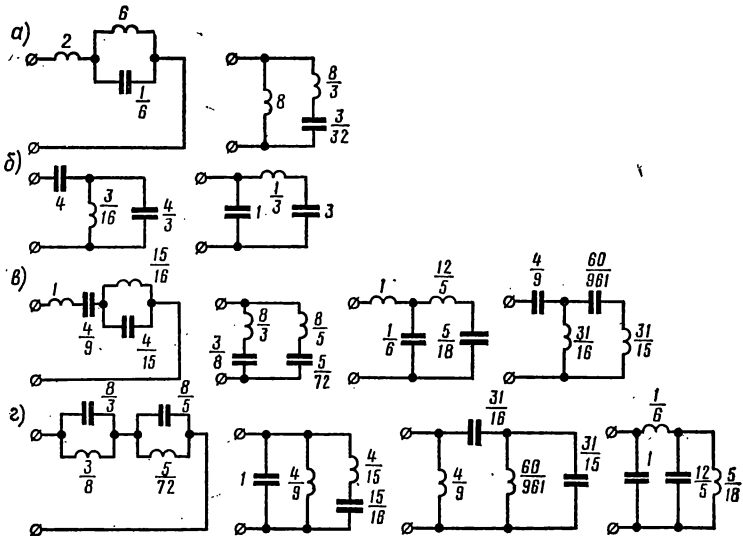
17.3. а) Не п. в. ф., так как наибольшие степени p числителя и знаменателя отличаются более чем на единицу (см. п. 2, б основных положений); б) не п. в. ф., так как на мнимой оси имеются кратные полюсы в точках $\pm j1$ (см. п. 2, в основных положениях), в) не п. в. ф., так как вещественная часть $F_2(j\omega)$ на

мнимой оси отрицательна при $0,707 < \omega < 1$. 17.4. Пункты б) и в) не п. в. ф., так как наибольшие степени p в числителе и знаменателе отличаются более чем на единицу; пункт г) не п. в. ф., так как имеется нуль в правой полуплоскости.



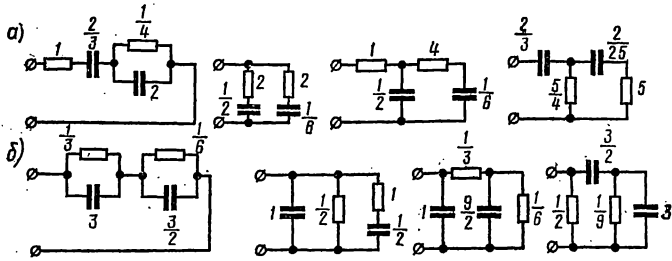
К отв. зад. 17.4

17.6.



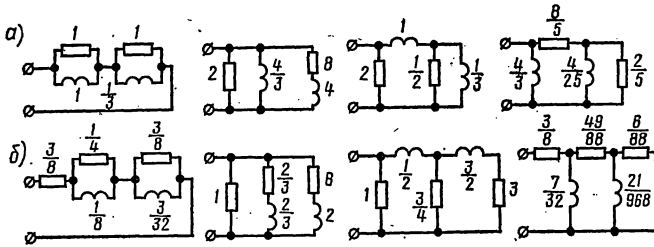
К отв. зад. 17.6

17.8.



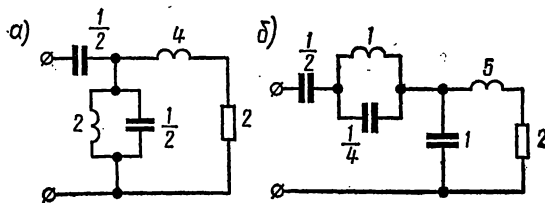
К отв. зад. 17.8

17.10.



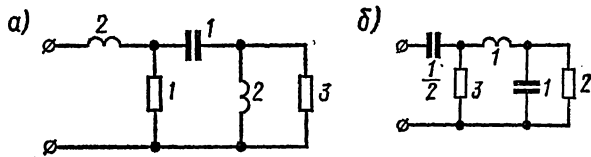
К отв зад. 17.10

17.12.



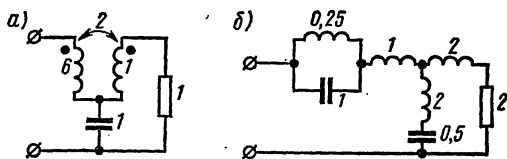
К отв. зад. 17.12

17.15.



К отв. зад. 17.15

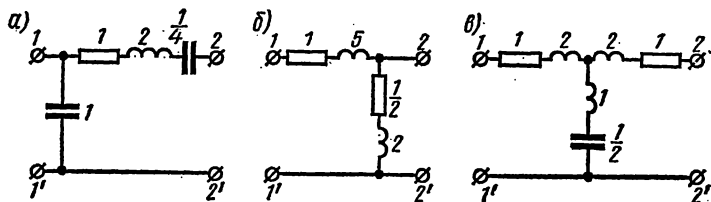
17.22.



К отв. зад. 17.22

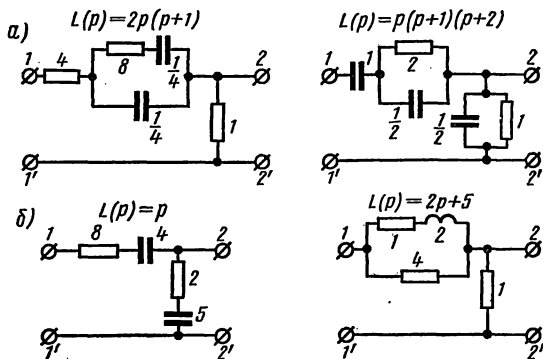
К главе 18

18.2.



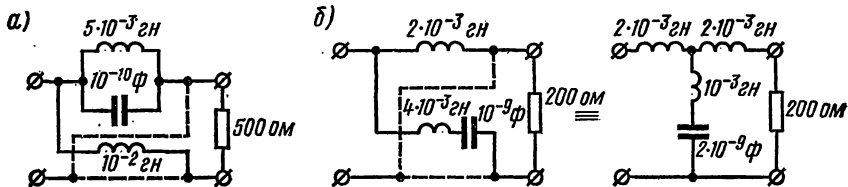
К отв. зад. 18.2

г) Не может быть реализован, так как не выполняются условия вычетов 18.4.



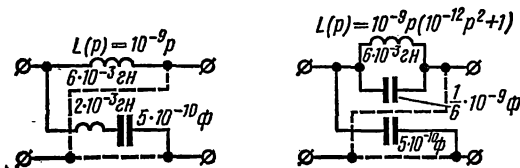
К отв. зад. 18.4

18.6.



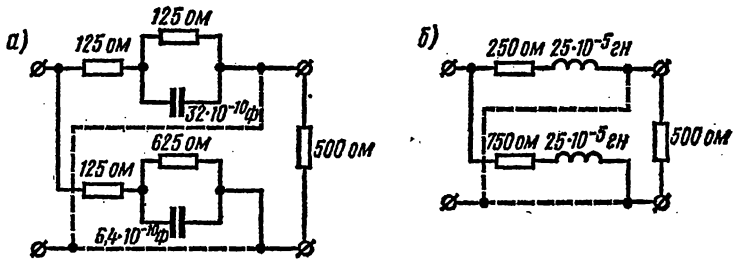
К отв. зад. 18.6

18.9.



К отв. зад. 18.9

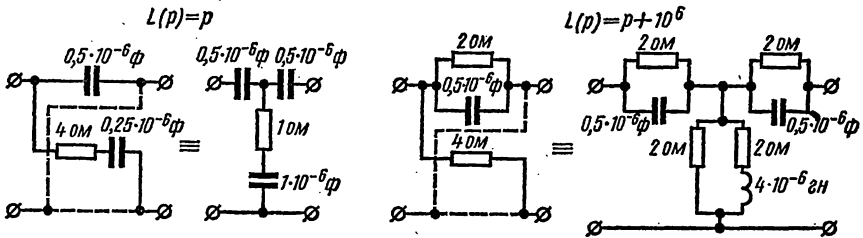
18.12. Если $\sigma'_1 = 10^7$, $k' = 0,2$, $\sigma_1 = 0,2 \cdot 10^7$, $k = 1$



К отв. зад. 18.12

18.13. 1 — неприемлем, так как нет чередования корней с корнями знаменателя $K_{U_{x,x}}$; 4 — неприемлем, так как высшая степень p больше высшей степени знаменателя $K_{U_{x,x}}$; 5 — неприемлем, так как высшая степень p ниже высшей степени знаменателя $K_{U_{x,x}}$; 2, 3, 6 — приемлемы

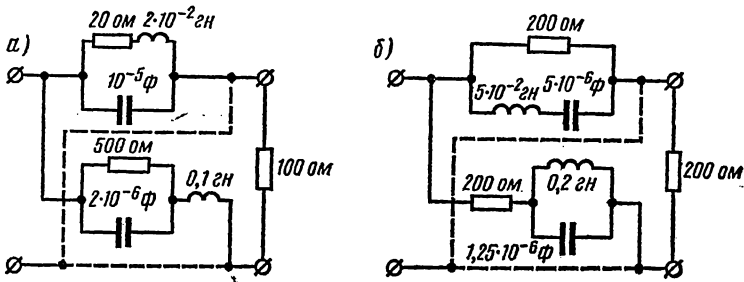
18.14.



К отв. зад. 18.14

18.15. $R_1 = 400$ ом. $R_2 = 900$ ом.

18.17.



К отв. зад. 18.17

Данные основной кривой намагничивания, α/M .
Слабо- и среднелегированная листовая электротехническая сталь (Э11)

α	B									
	0,0	0,01/100	0,02/200	0,03/300	0,04/400	0,05/500	0,06/600	0,07/700	0,08/800	0,09/900
0,4	140	143	146	149	152	155	158	161	164	167
0,5	171	175	179	183	187	191	195	199	203	207
0,6	211	216	221	226	231	236	241	246	251	256
0,7	261	266	271	276	281	287	293	299	306	312
0,8	318	324	330	337	344	352	360	369	378	387
0,9	397	407	417	427	437	447	458	469	480	491
1,0	502	514	527	541	555	570	585	600	615	631
1,1	647	664	682	701	720	739	759	779	800	821
1,2	843	866	891	918	946	976	1010	1040	1070	1100
1,3	1140	1180	1220	1260	1300	1340	1380	1430	1480	1530
1,4	1580	1640	1710	1780	1860	1950	2050	2150	2260	2380
1,5	2500	2640	2790	2950	3110	3280	3460	3660	3880	4120
1,6	4370	4630	4910	5220	5530	5880	6230	6600	6980	7370
1,7	7780	8200	8630	9070	9630	10100	10600	11100	11600	12200
1,8	12800	13400	14000	14600	15200	15900	16600	17300	18000	18800
1,9	19700	20600	21600	22600	23600	24600	25600	26800	28200	29600
2,0	31100	32500	34300	36500	39000	42000	45500	49500	54500	59500

Примеры пользования таблицей: 1) при $B = 0,8$ тл ≈ 8000 гс $H = 318$ а/м; 2) при $B = 1,13$ тл ≈ 11300 гс $H = 701$ а/м.

Переход от алгебраической формы комплексного числа к показательной и обратный переход с помощью логарифмической линейки

Если комплексное число C задано в алгебраической форме

$$C = a + jb,$$

то его аргумент α и модуль r определяются по формулам:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{b}{a}; \quad (\text{П2.1})$$

$$r = \frac{b}{\sin \alpha} = \frac{a}{\cos \alpha}, \quad (\text{П2.2})$$

тогда

$$C = a + jb = re^{j\alpha}. \quad (\text{П2.3})$$

Проще всего находить α и r с помощью логарифмической линейки. При этом надо иметь в виду, что на шкале тангенсов нанесены углы только до 45° . Поэтому надо различать следующие случаи:

1) $a > 0$, $b > 0$ и $\frac{b}{a} \leq 1$; в этом случае угол α находится на шкале тангенсов;

2) $a > 0$, $b > 0$ и $\frac{b}{a} > 1$; в этом случае на шкале тангенсов находится угол $(90^\circ - \alpha)$, так как $\operatorname{tg}(90^\circ - \alpha) = a/b \leq 1$;

3) одно из чисел a или b (или оба) отрицательно. Предварительно определяем, в какой четверти лежит α . Затем, найдя на линейке острый угол, тангенс которого равен $\frac{|b|}{|a|}$, по известным из тригонометрии формулам приведения определяем угол α .

Для выполнения указанных операций нужно движок линейки перевернуть так, чтобы шкалы синусов и тангенсов оказались снаружи.

Рассмотрим несколько типичных случаев.

Пример 1. $C_1 = 26 + j11$.

Решение. Устанавливаем волосок над меньшим числом 11 на основной нижней шкале и делим его на 26, для этого движок передвигаем до тех пор, пока его конец не станет под числом 26. Тогда на шкале тангенсов под волоском найдем $\alpha = 22^\circ 55'$.

Для определения модуля по формуле (П2.2) передвигаем движок до тех пор, пока под волосок не попадет угол в $22^\circ 55'$, нанесенный на шкале синусов. Тогда под концом движка на основной шкале найдем $r = 28,2$.

Итак,

$$C_1 = 26 + j11 = 28,2e^{j22^\circ 55'}.$$

Пример 2. $C_2 = 4 + j7$.

Решение. Деля, как и в первом примере, меньшее число 4 на большее 7, найдем на шкале тангенсов угол $29^{\circ}45'$. Так как $b > a$, то $\alpha = 90^{\circ} - 29^{\circ}45' = 60^{\circ}15'$.

Передвигаем движок и устанавливаем под волоском угол в $29^{\circ}45'$ со шкалы синусов. На основной шкале найдем $r = 8,06$. Таким образом,

$$C_2 = 4 + j7 = 8,06e^{j60^{\circ}15'}$$

Пример 3. $C_3 = 382 + j28$.

Решение. Так как $28/382 < 0,1$, то угол меньше $5^{\circ}45'$ ($\operatorname{tg} 5^{\circ}45' \approx \sin 5^{\circ}45' \approx 0,1$) и находится на средней шкале (где обозначено S и T). Деля меньшее число 28 на 382, на этой шкале найдем $\alpha = 4^{\circ}12'$.

Так как для углов меньше $5^{\circ}45'$ $\operatorname{tg} \alpha \approx \sin \alpha$, то модуль равен 382.

Итак,

$$C_3 = 382 + j28 = 382e^{j4^{\circ}12'}$$

Пример 4. $C_4 = 110 - j90$.

Решение. Угол α лежит в четвертой четверти; так как $|b| < |a|$, то по абсолютной величине он меньше 45° . Деля меньшее число 90 на 110, найдем угол $39^{\circ}20'$. Следовательно, $\alpha = -39^{\circ}20'$. Модуль находится, как в предыдущих примерах:

$$C_4 = 110 - j90 = 142e^{-j39^{\circ}20'}$$

Пример 5. $C_5 = -8 + j13$.

Решение. Угол α лежит во второй четверти. Так как $13/8 > 1$ то $\alpha < 135^{\circ}$ ($\operatorname{tg} 135^{\circ} = -1$). Следовательно, $\alpha = 90^{\circ} +$ угол, найденный на линейке.

Деля меньшее число 8 на 13, найдем угол $31^{\circ}35'$;

$$\alpha = 90^{\circ} + 31^{\circ}35' = 121^{\circ}35'$$

Таким образом,

$$C_5 = -8 + j13 = 15,3e^{j121^{\circ}35'}$$

Рассмотрим, как выполнить обратный переход от показательной формы к алгебраической.

Пример 6. $C_6 = 74e^{j28^{\circ}} = 74 \cos 28^{\circ} + j74 \sin 28^{\circ}$.

Решение. Устанавливаем волосок над числом 74 на нижней основной шкале и совмещаем с этим числом конец движка. Умножая 74 на $\cos 28^{\circ} = \sin 62^{\circ}$ (для чего устанавливаем волосок на 62° шкалы синусов), получим

$$74 \cos 28^{\circ} = 74 \sin 62^{\circ} = 65,3.$$

Умножая 74 на $\sin 28^{\circ}$, для чего нужно только передвинуть бегунок так, чтобы под волоском оказалось 28° шкалы синусов, получим $74 \sin 28^{\circ} = 34,7$.

Следовательно, $C_6 = 74e^{j28^{\circ}} = 65,3 + j34,7$.

Расчет гиперболических функций от комплексного аргумента

При расчете четырехполюсников, фильтров, длинных линий приходится определять значения гиперболических синуса, косинуса и тангенса от комплексного аргумента $g = a + jb$. Для вычисления этих функций можно использовать приведенные далее два способа расчета. При этом следует иметь в виду, что при вычислении по формулам $\text{sh}(a + jb) = Se^{j\varphi_s}$, $\text{ch}(a + jb) = Ce^{j\varphi_c}$ углы φ_s и φ_c находятся в тех же четвертях окружности, что и угол b , причем для нечетных четвертей окружности $\varphi_s \geq b \geq \varphi_c$, а угол $\varphi_t > 0$; для четных четвертей окружности $\varphi_s \leq b \leq \varphi_c$, а угол $\varphi_t < 0$.

Пример 1. Найти $\text{sh}(0,65 + j1,334)$; $\text{ch}(0,65 + j1,334)$; $\text{tg}(0,65 + j1,334)$.

Решение. Здесь $a = 0,65 \text{ nep}$, $b = 1,334 \text{ рад}$, или так как $1 \text{ рад} = 57,3^\circ$, то $b = 1,334 \cdot 57,3^\circ = 76,5^\circ = 76^\circ 30'$, т. е. угол лежит в первой четверти.

По таблицам функций действительного аргумента находим используемые в дальнейших расчетах $\text{sh } a = \text{sh } 0,65 = 0,697$; $\text{ch } a = \text{ch } 0,65 = 1,219$; $\sin b = \sin 1,334 = \sin 76^\circ 30' = 0,972$; $\cos b = \cos 76^\circ 30' = 0,233$; $\text{sh } 2a = \text{sh } 1,30 = 1,698$; $\text{ch } 2a = \text{ch } 1,30 = 1,971$; $\sin 2b = \sin 2,668 = \sin 153^\circ = 0,454$; $\cos 2b = \cos 2,668 = -0,891$.

Расчет гиперболического синуса $\text{sh}(0,65 + j1,334)$

Способ 1. $\text{sh}(a + jb) = \text{sh } a \cdot \cos b + j \text{ch } a \cdot \sin b = 0,697 \cdot 0,233 + j1,219 \cdot 0,972 = 0,163 + j1,185 = 1,196e^{j82^\circ 12'}$.

Способ 2. $S = \sqrt{0,5(\text{ch } 2a - \cos 2b)} = \sqrt{0,5(1,971 + 0,891)} = 1,196$;

$$\text{tg } \varphi_s = \frac{\text{tg } b}{\text{th } a} = \frac{\text{tg } 76^\circ 30'}{\text{th } 0,65} = \frac{4,165}{0,572} = 7,27, \quad \varphi_s = 82^\circ 12'.$$

Следовательно, $\text{sh}(0,65 + j1,334) = 1,196e^{j82^\circ 12'}$.

Расчет гиперболического косинуса $\text{ch}(0,65 + j1,334)$

Способ 1. $\text{ch}(a + jb) = \text{ch } a \cdot \cos b + j \text{sh } a \cdot \sin b = 1,219 \cdot 0,233 + j0,697 \cdot 0,972 = 0,284 + j0,677 = 0,735e^{j67^\circ 12'}$.

Способ 2. $C = \sqrt{0,5(\text{ch } 2a + \cos 2b)} = \sqrt{0,5(1,971 - 0,891)} = 0,735$, $\text{tg } \varphi_c = \text{tg } b \cdot \text{th } a = 4,165 \cdot 0,572 = 2,385$, $\varphi_c = 67^\circ 12'$.

Следовательно, $\text{ch}(0,65 + j1,334) = 0,735e^{j67^\circ 12'}$.

Расчет гиперболического тангенса $\text{th}(0,65 + j1,334)$

Способ 1. $\text{tg}(a + jb) = \frac{\text{sh } 2a}{\text{ch } 2a + \cos 2b} + j \frac{\sin 2b}{\text{ch } 2a + \cos 2b} = \frac{1,698}{1,971 - 0,891} + j \frac{0,454}{1,971 - 0,891} = 1,57 + j0,42 = 1,628e^{j15^\circ}$.

Способ 2. $\text{th}(a + jb) = Te^{j\varphi_t}$,

где
$$T = \sqrt{\frac{\text{ch } 2a - \cos 2b}{\text{ch } 2a + \cos 2b}} = \sqrt{\frac{1,971 + 0,891}{1,971 - 0,891}} = 1,628;$$

$$\operatorname{tg} \varphi_t = \pm \frac{\sin 2b}{\operatorname{sh} 2a} = \frac{0,454}{1,698} = 0,268; \quad \varphi_t = 15^\circ.$$

Способ 3. $\operatorname{th}(a + jb) = \frac{\operatorname{sh}(a + jb)}{\operatorname{ch}(a + jb)} = \frac{Se^{j\varphi_s}}{Ce^{j\varphi_c}} = \frac{1,196e^{j82^\circ 12'}}{0,735e^{j67^\circ 12'}} = 1,628e^{j15^\circ}.$

Согласно указанному выше, так как угол b лежит в первой (нечетной) четверти, поэтому $\varphi_s = 82^\circ 12' > b = 76^\circ 30' > \varphi_c = 67^\circ 12'$.

Пример 2. Найти $\operatorname{sh}(1,15 + j2,825)$; $\operatorname{ch}(1,15 + j2,825)$; $\operatorname{tg}(1,15 + j2,825)$. Здесь $a = 1,15$ *неп*; $b = 2,825$ *рад* $= 162^\circ$, т. е. угол b лежит во второй (четной) четверти.

По таблицам находим: $\operatorname{sh} 1,15 = 1,421$; $\operatorname{ch} 1,15 = 1,737$; $\sin 2,825 = 0,309$; $\cos 2,825 = -0,951$; $\operatorname{sh} 2,30 = 4,937$; $\operatorname{ch} 2,30 = 5,037$; $\sin 5,65 = -0,588$; $\cos 5,65 = 0,809$.

Расчет гиперболического синуса $\operatorname{sh}(1,15 + j2,825)$

Способ 1. $\operatorname{sh}(1,15 + j2,825) = 1,421(-0,951) + j1,737 \cdot 0,309 = -1,351 + j0,536 = 1,454e^{j158^\circ 20'}$.

Способ 2. $S = \sqrt{0,5(5,037 - 0,809)} = 1,454$;

$$\operatorname{tg} \varphi_s = \frac{\operatorname{tg} 162^\circ}{\operatorname{th} 1,15} = \frac{-0,325}{0,818} = -0,397; \quad \varphi_s = 158^\circ 20';$$

$$\operatorname{sh}(1,15 + j2,825) = 1,454e^{j158^\circ 20'}$$

Расчет гиперболического косинуса $\operatorname{ch}(1,15 + j2,825)$

Способ 1. $\operatorname{ch}(1,15 + j2,825) = 1,737(-0,951) + j1,421 \cdot 0,309 = -1,652 + j0,439 = 1,71e^{j165^\circ 7'}$.

Способ 2. $C = \sqrt{0,5(5,037 + 0,809)} = 1,710$;

$$\operatorname{tg} \varphi_c = \operatorname{tg} 162^\circ \cdot \operatorname{th} 1,15 = -0,325 \cdot 0,818 = -0,266, \quad \varphi_c = 165^\circ 7';$$

$$\operatorname{ch}(1,15 + j2,825) = 1,710e^{j165^\circ 7'}$$

Расчет гиперболического тангенса $\operatorname{th}(1,15 + j2,825)$

Способ 1. $\operatorname{th}(1,15 + j2,825) = \frac{\operatorname{sh} 2,30}{\operatorname{ch} 2,30 + \cos 5,65} + j \frac{\sin 5,65}{\operatorname{ch} 2,30 + \cos 5,65} = \frac{4,937}{5,037 + 0,809} + j \frac{-0,588}{5,037 + 0,809} = 0,843 - j0,100 = 0,850e^{-j6^\circ 47'}$.

Способ 2. $T = \sqrt{\frac{5,037 - 0,809}{5,037 + 0,809}} = 0,850$;

$$\operatorname{tg} \varphi_t = \frac{-0,588}{4,937} = -1,119, \quad \varphi_t = -6^\circ 47'.$$

Способ 3. $\operatorname{th}(1,15 + j2,825) = \frac{1,454e^{j158^\circ 20'}}{1,710e^{j165^\circ 7'}} = 0,850e^{-j6^\circ 47'}$.

Так как угол b лежит во второй четверти, то в соответствии с указанным выше имеет место неравенство

$$\varphi_s = 158^\circ 20' < b = 162^\circ < \varphi_c = 165^\circ 7'.$$

Основные понятия о матрицах

Матрица — это прямоугольная таблица, которая характеризует взаимное расположение коэффициентов в определенной системе линейных уравнений. Обычно каждый элемент матрицы имеет два индекса. Первый индекс соответствует номеру строки, второй — номеру столбца. Матрица записывается в виде определителя, но в отличие от него обрамляется по бокам прямоугольными скобками (существуют и другие формы записи матриц). Далее записана матрица, имеющая m строк и n столбцов:

$$[a] = \begin{bmatrix} a_{11}a_{12} \dots a_{1n} \\ a_{21}a_{22} \dots a_{2n} \\ \dots \dots \dots \\ a_{m1}a_{m2} \dots a_{mn} \end{bmatrix}.$$

Матрицу нельзя отождествлять с определителем системы уравнений, который представляет собой определенное число, если раскрыть определитель по известным правилам.

Порядок матрицы, имеющей m строк и n столбцов, определяется произведением $m \times n$.

Классификация матриц. *Квадратной матрицей* называется такая матрица, у которой число строк равно числу столбцов ($m = n$). У такой матрицы линия, соединяющая элементы a_{11} и a_{mn} , называется *главной диагональю* матрицы. *Симметричная матрица* — квадратная матрица, у которой все элементы $a_{ik} = a_{ki}$.

Диагональной матрицей называется матрица, все элементы которой, кроме расположенных на главной диагонали, равны нулю. *Единичная матрица* — диагональная матрица, все элементы главной диагонали которой равны единице. *Матрица-строка* — таблица, у которой имеется лишь одна строка ($m = 1$). *Матрица-столбец* — таблица, имеющая лишь один столбец ($n = 1$).

Свойства матриц. 1) Равенство матриц имеет место при равенстве всех соответствующих элементов. 2) При сложении (вычитании) матриц следует сложить (вычесть) соответствующие элементы этих матриц:

$$[a] + [b] = \begin{bmatrix} a_{11}a_{12} \\ a_{21}a_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11}b_{12} \\ b_{21}b_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} \end{bmatrix}.$$

3) Перемножать матрицы можно, если число столбцов первой матрицы равно числу строк второй. Умножение производится по правилу «строка — столбец»: элемент матрицы произведения c_{ij} , находящийся на пересечении i -й строки первой матрицы и j -го столбца второй матрицы, равен сумме произведений элементов i -й строки

первой матрицы на соответствующие элементы j -го столбца второй матрицы ($c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{in}b_{nj}$) (см. рис. П4.1).

При умножении матриц сохраняет силу сочетательный закон:

$$[a] \cdot [b] \cdot [c] = [d] \cdot [c] = [a] \cdot [e],$$

где

$$[d] = [a] \cdot [b], [e] = [b] \cdot [c].$$

Однако умножение матриц не подчиняется переместительному закону

$$[a] \cdot [b] \neq [b] \cdot [a].$$

Умножение матрицы на число k соответствует умножению каждого ее элемента на это число. Это же соответствует умножению данной матрицы на диагональную матрицу с элементами k .

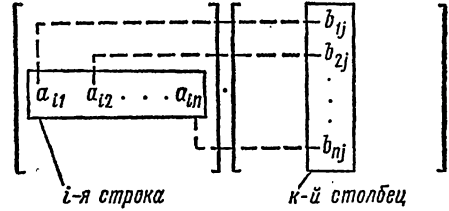


Рис. П4.1

Расчет первичных параметров воздушных и кабельных линий

А. Воздушные двухпроводные линии (рис. П5.1). Сопротивление проводов двухпроводной линии при постоянном токе на единицу длины

$$r_{20} = \rho \frac{8000}{\pi d^2} = \rho \frac{2550}{d^2} \text{ ом/км}, \quad (\text{П5.1})$$

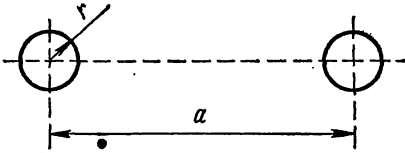


Рис. П5.1

где ρ — удельное сопротивление, $\text{ом} \cdot \text{мм}^2/\text{м}$, при температуре 20°C ;
 d — диаметр проводов, мм .

Сопротивление единицы длины линии на постоянном токе при температуре t° , отличной от 20°C , вычисляется по формуле

$$r_{t^\circ} = r_{20} [1 + \alpha_r (t^\circ - 20^\circ)] \text{ ом/км}, \quad (\text{П5.2})$$

здесь α_r — температурный коэффициент сопротивления.

Некоторые характеристики металлов, из которых изготавливаются провода линий, приведены в табл. П5.1.

Таблица П5.1

Наименование металлов	ρ , $\text{ом} \cdot \text{мм}^2/\text{м}$	α_r	Удельный вес, г/см^3
Медь	0,01785	0,0039	8,9
Алюминий	0,0292	0,0037	2,72
Сталь	0,138	0,0046	7,7

Активное сопротивление единицы длины линии при переменном токе

$$r_0 = r_{t^\circ} [1 + F(x)] \text{ ом/км}, \quad (\text{П5.3a})$$

здесь $F(x)$ — поправочный коэффициент, учитывающий увеличение активного сопротивления линии вследствие поверхностного эффекта; он является функцией x , определяемой по формуле

$$x = 7,09 \sqrt{\frac{f\mu}{10^4 r_{t^\circ}}}, \quad (\text{П5.4})$$

где f — частота, Гц ;

μ — магнитная проницаемость (для медных и алюминиевых проводов $\mu = 1$, для стальных $\mu = 120$).

Коэффициент $F(x)$ определяется по табл. П5.2.

* Вывод этой и всех других формул, приведенных в этом приложении, можно найти в [22].

Таблица П5.2

x	$F(x)$	$G(x)$	$H(x)$	$Q(x)$
0	0	0	0,0417	1
0,5	0,0003	0,001	0,042	0,9998
1,0	0,0052	0,0152	0,053	0,997
1,5	0,0258	0,0691	0,092	0,987
2,0	0,0782	0,1724	0,169	0,961
2,5	0,1756	0,295	0,263	0,913
3,0	0,318	0,405	0,348	0,845
3,5	0,492	0,499	0,416	0,766
4,0	0,678	0,584	0,466	0,686
4,5	0,862	0,669	0,503	0,616
5,0	1,042	0,755	0,530	0,556
6,0	1,394	0,932	0,575	0,465
7,0	1,743	1,109	0,608	0,400
8,0	2,094	1,287	0,634	0,351
9,0	2,446	1,464	0,655	0,313
10,0	2,799	1,641	0,750	0,282
более 10	$\frac{x\sqrt{2}-3}{4}$	$\frac{x\sqrt{2}-1}{8}$	0,750	$\frac{2\sqrt{2}}{x}$

Активное сопротивление единицы длины медной двухпроводной линии диаметром d при радиочастотах может быть вычислено по формуле

$$r_0 = \frac{16,65 \cdot 10^{-3}}{d \text{ (мм)}} \sqrt{f \text{ (Гц)}} \text{ ом/км.} \quad (\text{П5.36})$$

Индуктивность двухпроводной воздушной линии на единицу длины при переменном токе определяется по формуле

$$L_0 = \left[4 \ln \frac{a}{r} + Q(x) \mu \right] \cdot 10^{-4} \text{ гн/км,} \quad (\text{П5.5a})$$

здесь a — расстояние между осями проводов;

r — радиус проводов, коэффициент $Q(x)$, учитывающий внутреннюю индуктивность линии, определяется по табл. П5.2 в зависимости от x .

При радиочастотах индуктивность

$$L_0 = 4 \cdot 10^{-4} \ln \frac{a}{r} \text{ гн/км.} \quad (\text{П5.5б})$$

Емкость двухпроводной воздушной линии на единицу длины

$$C_0 = 1,05 \frac{1}{36 \ln \frac{a}{r}} 10^{-8} \text{ ф/км.} \quad (\text{П5.6})$$

Коэффициент 1,05 учитывает влияние изоляторов и соседних проводов на емкость линии. При радиочастотах вместо коэффициента 1,05 берут 1.

Пр о в о д и м о с т ь изоляции единицы длины двухпроводной линии

$$g_0 = g' + nf, \quad (\text{П5.7})$$

где g' — проводимость изоляции при постоянном токе, равная $0,01 \times 10^{-6}$ *сим/км* при сухой погоде и $0,5 \cdot 10^{-6}$ *сим/км* при сырой погоде; n — коэффициент диэлектрических потерь в изоляторах, равный при сухой погоде $0,05 \cdot 10^{-9}$, а при сырой — $0,25 \cdot 10^{-9}$; f — частота, *гц*.

Б. Кабельные линии. Сопротивление единицы длины линии при постоянном токе и температуре $+20^\circ\text{C}$ может быть вычислено по формуле (П5.1), а при температуре, отличной от 20°C , — по формуле (П5.2).

Ак т и в н о е с о п р о т и в л е н и е при переменном токе токопроводящих жил двухпроводной цепи с учетом дополнительных сопротивлений, обусловленных поверхностным эффектом и эффектом близости, определяется по формуле

$$r' = r_{t_0} \left[1 + F(x) + \frac{\rho G(x) \left(\frac{d}{a}\right)^2}{1 - H(x) \left(\frac{d}{a}\right)^2} \right] \text{ ом/км}, \quad (\text{П5.8})$$

где a — расстояние между осями проводников;

d — диаметр жилы проводника;

ρ — коэффициент, учитывающий тип скрутки жил кабеля;

$F(x)$, $G(x)$ и $H(x)$ — коэффициенты, зависящие от x , которое вычисляется по формуле (П5.4), определяются по табл. П5.2.

В диапазоне высоких частот (свыше 30 *кГц*) еще учитывают дополнительное сопротивление кабельной линии, обусловливаемое потерями на вихревые токи в соседних проводниках и свинцовой оболочке, по формуле

$$\Delta r' = 8 \sqrt{\frac{f \text{ (гц)}}{200\,000}} \text{ ом/км}. \quad (\text{П5.9})$$

Таким образом, активное сопротивление единицы длины кабеля

$$r_0 = r' + \Delta r'. \quad (\text{П5.10})$$

И н д у к т и в н о с т ь единицы длины цепи кабеля вычисляется (приближенно) по формуле (П5.5).

Е м к о с т ь единицы длины кабеля определяют по формуле

$$C_0 = \frac{\epsilon}{36 \ln 0,6 \frac{a}{r}} 10^{-8} \text{ ф/км}, \quad (\text{П5.11})$$

здесь ε — эквивалентная диэлектрическая проницаемость изоляции, а 0,6 — среднее значение коэффициента, учитывающего скрутку жил кабеля.

Проводимость изоляции определяется по формуле

$$g_0 = \omega C_0 \operatorname{tg} \delta \text{ см/км}, \quad (\text{П5.12})$$

здесь δ — угол диэлектрических потерь.

В. Коаксиальные кабели. Первичные параметры коаксиальной пары (рис. П5.2) из медных проводников вычисляются по формулам:

активное сопротивление (при $f > 60$ кГц)

$$r_0 = 8,35 \sqrt{f \text{ (Гц)}} \left(\frac{1}{d \text{ (мм)}} + \frac{1}{D \text{ (мм)}} \right) \times 10^{-2} \text{ ом/км}; \quad (\text{П5.13})$$

индуктивность

$$L_0 = 2 \ln \frac{D}{d} 10^{-4} \text{ гн/км}; \quad (\text{П5.14})$$

емкость

$$C_0 = \frac{\varepsilon}{18 \ln \frac{D}{d}} 10^{-6} \text{ ф/км}, \quad (\text{П5.15})$$

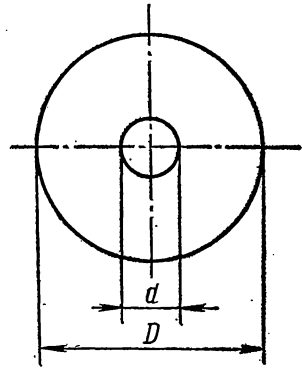


Рис. П5.2

где ε — эквивалентная диэлектрическая проницаемость изоляции; *проводимость* g_0 определяется по формуле (П5.12).

В формулах (П5.13 — П5.15) d — диаметр внутреннего проводника, мм; D — диаметр внешнего проводника, мм; f — частота, Гц.

ЛИТЕРАТУРА

Основная

1. Атабеков Г. И. Теоретические основы электротехники. Линейные электрические цепи. Ч. 1, изд. 4-е. «Энергия», 1970.
2. Атабеков Г. И. Основы теории цепей. «Энергия», 1969.
3. Бессонов Л. А. Теоретические основы электротехники. Изд. 6-е «Высшая школа», 1973.
4. Гоноровский И. С. Радиотехнические цепи и сигналы. «Советское радио», 1964.
5. Зевеке Г. В., Ионкин П. А. [и др.]. Основы теории цепей. «Энергия», 1965.
6. Зернов П. В. и Карпов В. Г. Теория радиотехнических цепей. «Энергия», 1972.
7. Ионкин П. А., Мельников Н. А. [и др.]. Теоретические основы электротехники. Госэнергоиздат, 1961.
8. Каплянский А. Е. [и др.]. Теоретические основы электротехники. Изд. 2-е. «Высшая школа», 1972.
9. Кошечев И. А. Основы теории электрической связи. Связьиздат, 1954.
10. Кульбацкий К. Е. и Аносович Б. Ф. Лекции по курсу «Теория электрической связи». Изд. ВЗЭИС, 1968.
11. Кугушев А. М. и Голубева Н. С. Основы радиотехники. «Энергия», 1969.
12. Лосев А. К. Линейные радиотехнические цепи. «Высшая школа», 1971.
13. Нейман Л. Р. и Демирчян К. С. Теоретические основы электротехники. «Энергия», 1966.
14. Поливанов К. М. Теоретические основы электротехники. Ч. 1, «Энергия», 1965.
15. Жуховицкий Б. Я. и Негневицкий И. Б. Теоретические основы электротехники. Ч. 2, «Энергия», 1965.
16. Харкевич А. А. Основы радиотехники. Связьиздат, 1962.

Дополнительная

17. Балабанян Н. Синтез электрических цепей. Госэнергоиздат, 1961.
18. Бессонов Л. А. Линейные электрические цепи. «Высшая школа», 1968.
19. Белецкий А. Ф. Основы теории линейных электрических цепей. «Связь», 1967.
20. Гарднер М. Ф. и Бернс Д. А. Переходные процессы в линейных системах. Физматгиз, 1961.
21. Гиллемин Е. А. Синтез пассивных цепей. «Связь», 1970.
22. Гроднев И. И. и Курбатов Н. Д. Линейные сооружения связи. Государственное издательство литературы по вопросам связи и радио. Москва, 1963.
23. Каллер М. Я. Теория электрических цепей. Трансжелдориздат, 1956.
24. Конторович М. И. Операционное исчисление и нестационарные явления в электрических цепях. Гостехтеоретиздат, 1949.

25. К р у г К. А. Переходные и установившиеся процессы в линейных электрических цепях. Госэнергоиздат, 1948.
26. М а к с и м о в и ч Н. Г. Линейные электрические цепи и их преобразования. Госэнергоиздат, 1961.
27. М а т х а н о в П. Н. Лнейные цепи. Основы анализа электрических цепей. «Высшая школа», 1972.
28. Р е з а Ф. и С и л и С. Современный анализ электрических цепей. «Энергия», 1964.
29. С е ш у С. и Б а л а б а н я н Н. Анализ линейных цепей. Госэнергоиздат, 1963.
30. Ш е б е с М. Р. [и др.]. Лекции по теории линейных электрических цепей. Вып. 3 и 4. Изд. ВЗЭИС, 1969.

Задачники

31. Б е с с о н о в Л. А. [и др.]. Задачник по теоретическим основам электротехники. Изд. МИРЭиА, 1970.
32. Г и н з б у р г С. Г. Методы решения задач по переходным процессам в электрических цепях. «Высшая школа», 1967.
33. Г о л ь д и н О. Е. Задачник по теории электрических цепей. «Высшая школа», 1969.
34. З а е з д н ы й А. М. и Г у р е в и ч И. В. Основы расчетов радиотехнических цепей. «Связь», 1968.
35. Задачник по теоретическим основам электротехники под ред. К. М. Поливанова. «Энергия», 1973.
36. З а й ц е в И. А. и Л у р ь е А. Г. Задачник по теоретическим основам электротехники. Госэнергоиздат, 1961.
37. К у р е н е в С. И. и др. Сборник задач по расчету электрических цепей. «Высшая школа», 1967.
38. Сборник программированных задач по теоретическим основам электротехники. Под ред. Н. Г. Максимовича и Ю. Е. Батракина. Изд. Львовского Государственного университета, 1967.
39. С а д о в с к и й А. С. Задачник по теории электрической связи. Связьиздат, 1963.
40. Ш е б е с М. Р. Сборник упражнений и задач по теоретическим основам электротехники. «Высшая школа», 1962.

СОДЕРЖАНИЕ

Предисловие	3
Глава первая Линейные электрические цепи постоянного тока	
Основные положения и соотношения	5
Упражнения и задачи	18
А. Расчет эквивалентных сопротивлений	18
Б. Законы Ома и Кирхгофа. Баланс мощностей	18
В. Методы контурных токов и узловых потенциалов	33
Г. Метод наложения. Преобразование треугольника в звезду и обратно	44
Д. Метод эквивалентного генератора. Преобразование источников. Принцип взаимности	50
Е. Условие выделения максимальной мощности в нагрузке	62
Ж. Входные и взаимные проводимости ветвей	64
З. Линейные соотношения	67
Глава вторая Электрические цепи однофазного синусоидального тока	
Основные положения и соотношения	70
Упражнения и задачи	77
А. Мгновенные значения синусоидального тока, напряжения, мощности. Их графики	77
Б. Последовательное и параллельное соединение сопротивлений	84
Глава третья Символический метод расчета цепей синусоидального тока	
Основные положения и соотношения	99
Упражнения и задачи	105
А. Различные формы записи комплексных величин. Активная и реактивная составляющие напряжения и тока. Последовательное, параллельное и смешанное соединения сопротивлений. Активная, реактивная и полная мощности. Векторные и топографические диаграммы	105
Б. Применение различных методов к расчету цепей синусоидального тока	123
В. Условие выделения максимальной мощности в нагрузке	134
Г. Круговые диаграммы	135
Глава четвертая Резонанс в электрических цепях	
Основные положения и соотношения	137
Упражнения и задачи	144

А. Резонанс напряжений	144
Б. Резонанс токов	153
В. Резонансы напряжений и токов в сложных контурах	163

Глава пятая
Связанные цепи

Основные положения и соотношения	171
Упражнения и задачи	179
А. Расчет связанных цепей	179
Б. Резонансы в связанных контурах	202

Глава шестая
Трехфазные цепи

Основные положения и соотношения	213
Упражнения и задачи	214
А. Симметричная нагрузка и режимы, возникающие при обрывах проводов	214
Б. Несимметричный режим	221

Глава седьмая
Цепи периодического несинусоидального тока

Основные положения и соотношения	230
Упражнения и задачи	235
А. Аналитический и графо-аналитический методы разложения периодических кривых в ряд Фурье	235
Б. Расчет цепей, находящихся под воздействием периодических источников	245
В. Коэффициенты, характеризующие форму периодической несинусоидальной кривой	253

Глава восьмая
Катушки и трансформаторы с ферромагнитными сердечниками

Основные положения и соотношения	255
Упражнения и задачи	258
А. Потери в катушке со стальным сердечником, ее эквивалентная схема и векторная диаграмма	258
Б. Трансформатор со стальным сердечником	264

Глава девятая
Классический метод расчета переходных процессов в электрических цепях с сосредоточенными параметрами

Основные положения и соотношения	268
Упражнения и задачи	270
А. Расчет цепей, содержащих r , L -или r , C -элементы	270
Б. Расчет цепей, содержащих элементы r , L , C	292
В. Переходные процессы при импульсных воздействиях	301
Г. Решение задач с «некорректно» поставленными начальными условиями	305

Глава десятая
Операторный метод расчета переходных процессов в электрических цепях с сосредоточенными параметрами

Основные положения и соотношения	309
Упражнения и задачи	314

А. Расчет переходных процессов при нулевых и ненулевых начальных условиях. Операторные схемы замещения. Использование таблицы 10.1 и теоремы разложения для перехода от изображения к оригиналу	314
Б. Расчет переходных процессов в цепях со взаимной индуктивностью	331

Глава одиннадцатая

Расчет линейных электрических цепей с сосредоточенными параметрами методом интеграла Дюамеля и спектральным методом

Основные положения и соотношения	334
Упражнения и задачи	340
А. Переходные характеристики. Расчет переходных процессов с помощью интеграла Дюамеля	340
Б. Импульсные характеристики. Расчет переходных процессов при импульсных воздействиях	348
В. Дифференцирующие и интегрирующие цепи	351
Г. Частотные характеристики цепей. Спектры непериодических сигналов (интеграл Фурье). Прохождение непериодических сигналов через линейные цепи	352

Глава двенадцатая

Электрические цепи с распределенными параметрами (длинные линии)

Основные положения и соотношения	363
Упражнения и задачи	369
А. Первичные и вторичные параметры линий. Фазовая скорость. Длина волны	369
Б. Согласованная и несогласованная нагрузки линии. Напряжение, ток, мощность в начале и конце линии. Входное сопротивление. Прямые и обратные волны	375
В. Неискажающая линия. Схемы замещения линии	381
Г. Рабочее затухание линии. Определение параметров линии по опытам холостого хода и короткого замыкания	382
Д. Расчет уровней передачи	386
Е. Линия без потерь. Стоячие волны	387
Ж. Методы согласования линий с нагрузкой	396
З. Схемы, эквивалентные отрезкам линии	402

Глава тринадцатая

Двухполюсники

Основные положения и соотношения	405
Упражнения и задачи	410
А. Эквивалентные и обратные двухполюсники	410
Б. Реактивные двухполюсники	413
В. Частотные характеристики двухполюсников	421

Глава четырнадцатая.

Четырехполюсники

Основные положения и соотношения	425
Упражнения и задачи	441
А. Параметры четырехполюсника. Т- и П-схемы замещения четырехполюсника	441
Б. Входное сопротивление четырехполюсника	444
В. Схемы соединения четырехполюсников	446
Г. Характеристические параметры, их связь с другими параметрами четырехполюсника. Повторные параметры	453

Д. Эквивалентность четырехполюсников	456
Е. Коэффициенты отражения, эхо. Вносимое и рабочее затухания. Коэффициенты передачи напряжения, тока	458
Ж. Удлинитель	460
З. Трансформаторы для согласования сопротивлений четырехполюсника и нагрузки	461
И. Полюсно-нулевое изображение передаточных и входной функций. Минимально- и неминимально-фазовые четырехполюсники	462
К. Активные неавтономные четырехполюсники	466

Глава пятнадцатая Электрические фильтры

Основные положения и соотношения	475
Упражнения и задачи	485
А. Задачи на применение общей теории реактивных Т- и П-образных фильтров	485
Б. Фильтры типа k	490
В. Фильтры типа m . Совместная работа фильтров типа k и m . Потери в фильтрах	498
Г. Мостовые фильтры	508
Д. Задачи на различные темы, не рассмотренные в предыдущих пунктах	516

Глава шестнадцатая Корректирующие цепи

Основные положения и соотношения	522
Упражнения и задачи	526
А. Корректоры амплитудно-частотных искажений	526
Б. Корректоры фазочастотных искажений	538

Глава семнадцатая Основы синтеза двухполюсников

Основные положения и соотношения	547
Упражнения и задачи	559
А. Положительные вещественные функции	559
Б. Синтез реактивных двухполюсников	560
В. Синтез двухполюсников, состоящих из элементов r и C или r и L	564
Г. Синтез двухполюсников общего вида. Полином Гурвица. Метод Бруне	573

Глава восемнадцатая Элементы синтеза четырехполюсников

Основные положения и соотношения	592
Упражнения и задачи	601
Ответы	612
Приложения	639
Литература	650